

17. **Kosseff J. R.** The lid-driven cavity flows: a synthesis of qualitative and quantitative observations / J.R. Kosseff, R.L. Street // Ibid. – Рус. пер. Течение в каверне с движущейся крышкой // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. – Сер. Теор. основы инж. расчетов. – 1984. – Т. 106. – № 4. – С. 136 – 145.

18. **Schreiber R.** Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques / R. Schreiber, H.B. Keller // J. Comp. Phys. – 1983. – Vol. 49. – P. 310 – 333.

Надійшла до редколегії 12.01.2014

УДК 532.685:536.24

А. П. Лукиша

Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПОРИСТОМ КАНАЛЕ

В одномерной постановке получено аналитическое решение уравнения теплопроводности при движении двухфазного испаряющегося теплоносителя сквозь пористый цилиндрический канал при граничных условиях первого, второго и третьего рода. Полученное решение сравнено с имеющимся решением для плоского канала. Выведено соотношение для расчёта паросодержания применительно к рассматриваемой задаче.

Ключевые слова: пористый цилиндрический канал, двухфазный испаряющийся поток, уравнение теплопроводности, граничные условия 1, 2, 3-го рода.

В одновимірній постановці отримано аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності під час руху двофазного теплоносія, що випаровується крізь пористий циліндричний канал за межових умов першого, другого і третього роду. Отриманий розв'язок зіставлено з відомим розв'язком для плоского каналу. Виведено співвідношення для розрахунку паровмісту стосовно аналізованої задачі.

Ключові слова: пористий циліндричний канал, двофазний потік, що випаровується, рівняння теплопровідності, межові умови 1, 2, 3-го роду.

In this article an analytical solution of the heat equation in one-dimensional formulation at the motion of two-phase evaporating coolant through the porous cylindrical channel at the boundary conditions of the first, second and third kind is derived. The resulting solution is compared with the existing solution for the flat channel. Produced the equation for calculating steam content in regard to the problem.

Key words: porous cylindrical channel, two-phase evaporating flow, heat conduction equation, the boundary conditions of the first, second and the third kind.

Введение. Важной задачей развития техники и промышленности на современном этапе является внедрение высокоэффективных энергетических машин и агрегатов. Одним из путей решения данной задачи является создание высокоэффективных теплообменников в составе энергетических машин. Примером такого рода теплообменников могут служить пористые высокотеплопроводные элементы, через которые прокачивается охладитель в различных фазовых состояниях.

В целом ряде работ [2 – 6] рассмотрен вопрос теплогидравлической эффективности пористых теплообменных каналов при жидкостном движении теплоносителя. Однако наибольший интерес представляет случай движения сквозь пористый теплообменный элемент охладителя с фазовым переходом испарения.

Для создания методики расчета теплогидравлической эффективности пористых теплообменных элементов при испарении движущегося сквозь них теплоносителя необходимы зависимости, описывающие в этом случае гидродинамику и теплообмен.

В работах [7 – 9] описано температурное состояние плоского пористого канала в одномерной постановке при движении сквозь него испаряющегося теплоносителя при различных граничных условиях, а также описана физическая картина процесса. Однако на практике, при создании реальных инженерных конструкций, значительный интерес представляет применение теплообменных каналов круглого поперечного сечения. Опираясь на данные работ [7 – 9], решим задачу теплообмена в одномерной постановке при движении испаряющегося теплоносителя сквозь прямолинейные пористые каналы круглого поперечного сечения. Вкратце приведём соотношения, характеризующие решение для плоского канала.

Постановка и решение задачи для плоского канала. Согласно [7], учитывая медленное изменение параметров потока вдоль канала и значительную протяженность области испарения по сравнению с шириной канала 2δ , процесс теплообмена в канале можно считать квазиодномерным. Температура T пористого материала поперек плоского канала и температура t испаряющегося теплоносителя связаны дифференциальным уравнением

$$\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = h_v (T - t), \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности пористого материала. Поскольку давление поперек канала постоянно, то и температура паровой фазы смеси, равная температуре насыщения t_s , также постоянна. Примем, что интенсивность объемного внутрипористого теплообмена h_v постоянна поперек канала в области испарения.

Граничные условия третьего рода для плоского канала запишем в виде

$$Z=0, \quad \lambda \frac{dT}{dz} = 0; \quad Z=\delta, \quad \lambda \frac{dT}{dz} = \alpha_\infty (t_\infty - T). \quad (2)$$

Внешний коэффициент теплоотдачи α_∞ учитывает также и термическое сопротивление стенки.

В безразмерных переменных задачу (1), (2) запишем следующим образом:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} - \gamma^2 \vartheta = 0, \quad (3)$$

$$z = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dz} = 0; \quad z = 1, \quad \vartheta = \vartheta_\infty - \frac{1}{Bi} \frac{d\vartheta}{dz}, \quad (4)$$

где $\vartheta = T - t_s$; $\vartheta_\infty = t_\infty - t_s$; $z = Z/\delta$; $\gamma^2 = h_v \delta^2 / \lambda$; $Bi = \alpha_\infty \delta / \lambda$.

При $Bi \rightarrow \infty$ второе граничное условие (4) переходит в условие постоянной температуры стенки $\vartheta(1) = \vartheta_\infty$.

Решение системы, зависящее от параметров γ , ϑ_∞ , Bi запишем в виде

$$\vartheta = C [\exp(\gamma z) + \exp(-\gamma z)], \quad (5)$$

$$C = \vartheta_\infty \{ [\exp(\gamma) + \exp(-\gamma)] + \gamma / Bi [\exp(\gamma) - \exp(-\gamma)] \}^{-1}. \quad (6)$$

Для граничных условий второго рода

$$Z = \delta; \lambda \frac{dT}{dZ} = q; Z = 0; \lambda \frac{dT}{dZ} = 0. \quad (7)$$

Решение задачи, согласно [9], запишем в виде

$$\vartheta = \frac{\beta \cdot \exp(-\gamma)}{1 - \exp(-2\gamma)} [\exp(\gamma \zeta) + \exp(-\gamma \zeta)] \quad , \quad (8)$$

где $\beta = \frac{q}{(\lambda h_v)^{1/2}}; \gamma^2 = \frac{h_v \delta^2}{\lambda}; \zeta = \frac{Z}{\delta}.$

Постановка задачи для круглого канала. Дифференциальное уравнение, описывающее в квазиодномерной постановке температурное состояние пористого круглого цилиндрического образца в процессе испарения теплоносителя, можно записать в виде

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = h_v (T - t_s) \quad (9)$$

или

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} \right) = h_v (T - t_s). \quad (10)$$

Граничные условия 3-го рода. Граничные условия 3-го рода можно записать следующим образом:

$$R=0, \lambda \frac{dT}{dr} = 0, r=\delta, \lambda \frac{dT}{dr} = \alpha_\infty (t_\infty - T). \quad (11)$$

Введём обозначения

$$\vartheta = T - t_s, \quad \vartheta_\infty = t_\infty - t_s, \quad \zeta = r/\delta, \quad \gamma^2 = \frac{h_v \delta^2}{\lambda}, \quad Bi = \frac{\alpha_\infty \delta}{\lambda}, \quad (12)$$

где h_v – интенсивность объемного внутрипористого теплообмена; α_∞ – внешний коэффициент теплоотдачи, учитывающий также и термическое сопротивление стенки; λ – теплопроводность пористого образца, учитывающая теплопроводность каркаса, теплопроводность жидкостной и паровой фаз.

Запишем уравнение (10) с граничными условиями (11) в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\vartheta}{d\zeta} - \gamma^2 \vartheta = 0 \quad (13)$$

или

$$\zeta^2 \vartheta'' + \vartheta' \zeta - \vartheta \zeta^2 \gamma^2 = 0 \quad (14)$$

при

$$\zeta=0, d\vartheta/d\zeta=0, \zeta=1, \vartheta = \vartheta_\infty - \frac{1}{Bi} \frac{d\vartheta}{d\zeta}. \quad (15)$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка, решением которого являются цилиндрические функции мнимого аргумента. Его решение в общем случае имеет вид [1]

$$\vartheta = C_1 I_0(\gamma \xi) + C_2 K_0(\gamma \xi), \quad (16)$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка, называемая также функцией Макдональда.

При нахождении решения (16) дифференциального уравнения Бесселя (14) используем подстановку $\vartheta_1 = \gamma \vartheta$.

Учитывая, что на оси пористого канала значение температуры пористого образца должно иметь конечное значение, а также то обстоятельство, что функция $K_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, получаем, что $C_2 = 0$ и решение (16) поэтому можно записать следующим образом:

$$\vartheta = C_1 I_0(\gamma \xi). \quad (17)$$

Постоянную C_1 найдем из второго граничного условия (15):

$$C_1 = \frac{\vartheta_\infty}{I_0(\gamma) + \frac{\gamma}{Bi} I_1(\gamma)}, \quad (18)$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя первого рода, первого порядка.

Поэтому решение уравнения (14) при граничных условиях 3-го рода (15) будет иметь вид

$$\vartheta = \frac{I_0(\gamma \xi) \vartheta_\infty}{I_0(\gamma) + \frac{\gamma}{Bi} I_1(\gamma)}. \quad (19)$$

При $Bi \rightarrow \infty$ граничные условия 3-го рода переходят в граничные условия первого рода ($\vartheta_\infty = const$) и решение в этом случае запишем так:

$$\vartheta = \frac{I_0(\gamma \xi) \vartheta_\infty}{I_0(\gamma)}. \quad (20)$$

При этом, используя соотношение $q = \lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=\delta} = \frac{\lambda}{\delta} \frac{d\vartheta}{d\xi} \Big|_{\xi=1}$, плотность теплового потока, передаваемого от стенки внутрь канала, определим следующим образом:

$$q = (\lambda h_v)^{1/2} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \vartheta(1). \quad (21)$$

Комплекс $(\lambda h_v)^{1/2} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)}$ можно рассматривать как эффективный коэффициент теплоотдачи α от внутренней поверхности стенки цилиндрического пористого канала, если записать плотность теплового потока в виде

$$q = \alpha (T - t_s) \Big|_{\xi=1}. \quad (22)$$

Граничные условия второго рода. При граничных условиях второго рода выражения для теплообмена на оси и на стенке канала запишем следующим образом:

$$r=0, \frac{dT}{dr}=0, \quad r=\delta, \quad \lambda \frac{dT}{dr}=q \quad (23)$$

или, используя обозначения (12), получим

$$\xi=0, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi}=0, \quad \xi=1, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi}=\frac{q\delta}{\lambda}. \quad (24)$$

При этом решение уравнения (16), с учетом замечаний относительно постоянной C_2 , аналогичных замечаниям при граничных условиях 3-го рода, будет выглядеть следующим образом:

$$\vartheta = \frac{q}{(\lambda h_v)^{1/2}} \frac{I_0(\gamma \xi)}{I_1(\gamma)}. \quad (25)$$

Для того чтобы получить связь между температурой нагреваемой стенки и подводимым тепловым потоком, воспользуемся соотношением

$$q = \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=\delta} = \frac{\lambda}{\delta} \left. \frac{d\vartheta}{d\xi} \right|_{\xi=1}. \quad (26)$$

При этом искомое выражение получим в виде

$$q = (\lambda h_v)^{1/2} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \vartheta(1). \quad (27)$$

Комплекс $(\lambda h_v)^{1/2} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)}$ можно рассматривать как эффективный коэффициент теплоотдачи α от внутренней поверхности стенки, если плотность теплового потока записать в виде

$$q = \alpha(T-t_s)|_{z=1} = \alpha \vartheta(1). \quad (28)$$

Сравнительный анализ расчетных данных избыточной температуры $\vartheta = T - t_s$ пористого материала поперек канала при $\vartheta(1) = \vartheta_\infty = 100^\circ\text{C}$ для различных значений γ для каналов плоского и круглого поперечных сечений и граничных условий первого, второго и третьего рода показан соответственно на рис. 1 - 3.

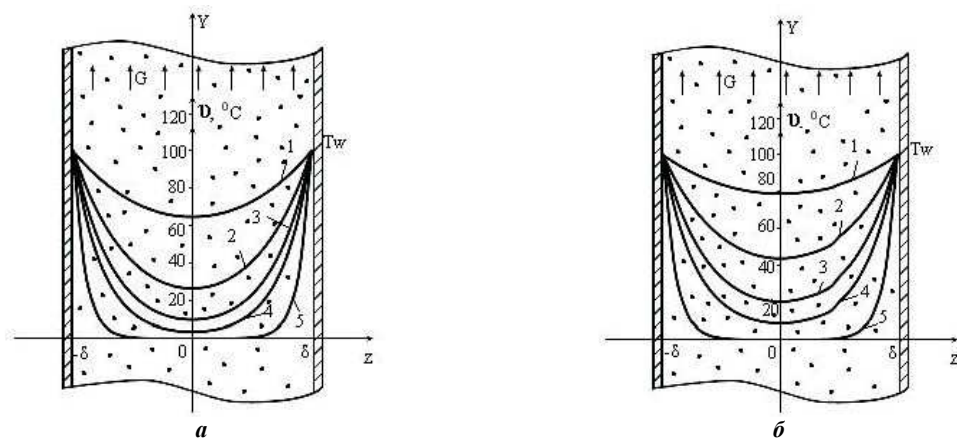


Рис. 1 Распределение избыточной температуры $\vartheta = T - t_\infty$ пористого материала поперёк *a* - плоского, *б* - цилиндрического канала для $\vartheta(1) = \vartheta_\infty = 100^\circ \text{C}$ для следующих значений γ : 1 - 1; 2 - 2; 3 - 3; 4 - 4; 5 - 10

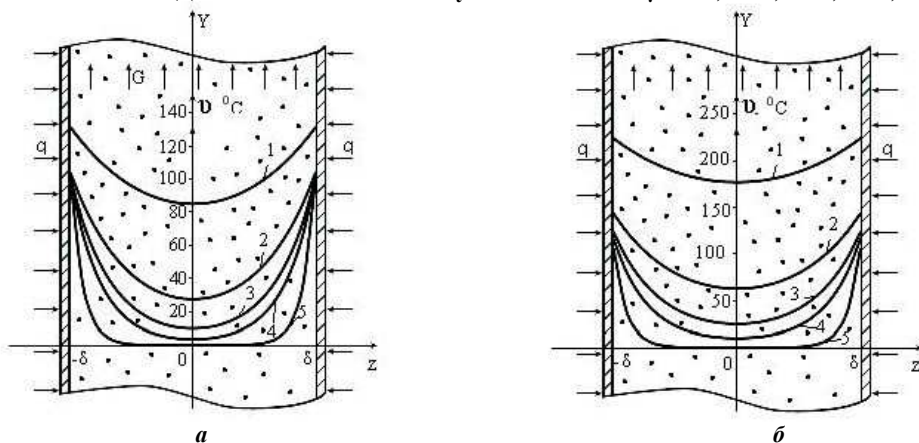


Рис. 2 Распределение избыточной температуры $\vartheta = T - t_\infty$ пористого материала поперёк *a* - плоского, *б* - цилиндрического канала для $\beta = q/(\lambda h)^{1/2} = 100^\circ \text{C}$ (граничные условия 2-го рода) для следующих значений γ : 1 - 1; 2 - 2; 3 - 3; 4 - 4; 5 - 10

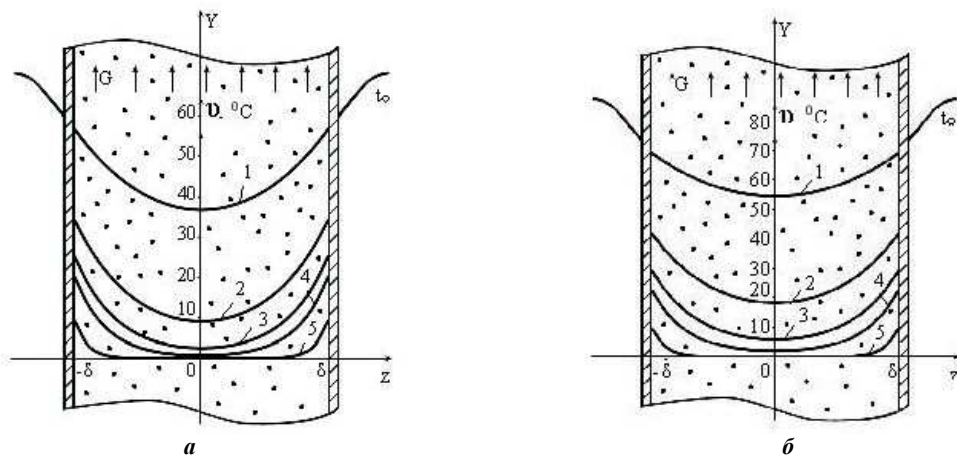


Рис. 3 Распределение избыточной температуры $\vartheta = T - t_\infty$ пористого материала поперёк *a* - плоского, *б* - цилиндрического канала для $\vartheta_\infty = 100^\circ \text{C}$, $Bi = 1$ (граничные условия 3-го рода) для следующих значений γ : 1 - 1; 2 - 2; 3 - 3; 4 - 4; 5 - 10

Профили температур для каналов плоского поперечного сечения взяты из работ [7] и [9] соответственно, а также дополнительно были рассчитаны по соотношениям (19), (20), (25). Соответствие профилей температур для плоского и круглого каналов свидетельствует о правильности полученных аналитических выражений для каналов круглого поперечного сечения.

Более высокие значения температур для круглого пористого канала по сравнению с плоским каналом можно объяснить тем, что в канале круглого поперечного сечения нагрев идёт по всему периметру сечения, а в плоском канале – только с двух сторон – сверху и снизу.

Расчет массового паросодержания вдоль канала. Важным параметром для расчета связанных между собой процессов теплообмена и гидравлики при испарении движущегося потока в пористом канале является массовое расходное паросодержание.

Массовое расходное паросодержание потока определим как отношение количества тепла, поглощенного потоком от начала области испарения до рассматриваемого сечения, к количеству тепла, необходимого для полного испарения потока.

В общем случае расходное массовое паросодержание для случая движения испаряющегося потока сквозь канал рассчитываем по соотношению

$$x = \frac{Q_{\text{погл.}}}{Q_{\Sigma}}, \quad (29)$$

где $Q_{\text{погл.}}$ – поглощенное количество тепла к данному сечению; Q_{Σ} – суммарное количество тепла, необходимое для испарения заданного массового расхода жидкости (потока). Для цилиндрического канала получим

$$Q_{\Sigma} = \dot{m} \cdot r = G \frac{\pi d^2}{4} r = \bar{q} \pi d (K - L), \quad (30)$$

где r – теплота парообразования;

$$\bar{q} = \frac{1}{K - L} \int_L^K q(z) dz, \quad (31)$$

$$Q_{\text{погл.}} = \pi d \int_L^Z q(z) dz = \bar{q} \pi d (Z - L), \quad (32)$$

$$x = \frac{\left(\int_L^Z q(z) dz \right) \cdot \pi d (Z - L)}{(Z - L) G \frac{\pi d^2}{4} r} = \frac{4 \int_L^Z q(z) dz}{G d r}. \quad (33)$$

В формулах (30) – (33) K , L - координаты конца и начала области испарения; Z - текущая координата в области испарения.

Физическая картина процесса детально рассматривается в работах [7 – 9], в которых получено решение задачи испарения потока теплоносителя в одномерной постановке для плоского пористого канала.

Выводы. Полученные аналитические решения задачи о теплообмене при испарении потока в пористом цилиндрическом канале могут быть использованы при создании различного рода высокоэффективных теплообменных устройств, используемых в разнообразных энергетических машинах. Сравнение решений для цилиндрического и плоского пористых каналов и их соответствие свидетельствуют о правильности полученных решений.

Библиографические ссылки

1. Кузнецов Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. – М.: Высш. шк., 1965. – 423 с.
2. Лукиша А. П. Расчёт эффективности пористых каналов кругового сечения при ламинарном течении жидкого теплоносителя / А. П. Лукиша // Науч. журн. «Техническая механика». – 2010. – № 1. – С. 61 – 70.
3. Лукиша А. П. Эффективность пористых круглых каналов при движении жидкостного охладителя и граничных условиях первого рода / А. П. Лукиша, В. А. Габринец // Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика: зб. наук пр. – Д.: Нова ідеологія, 2010. – Вип. 2 – С. 122 – 142.
4. Lukisha A. P. Calculation of the efficiency of circular porous channels by the modified Guhman method / A. P. Lukisha // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Springer. – New York, 2012. – Vol.85. – No 6. – P. 1266 – 1277.
5. Lukisha A. P. The efficiency of round porous channels in a transition regime flow of a fluid coolant at boundary conditions of the first kind / A. P. Lukisha // Heat Pipe Science and Technology. An International Journal, Begell House Inc. – 2012. – Vol. 2, Issue1. – P.1 – 22.
6. Lukisha A. P. The efficiency of round channels fitted with porous, highly heat-conducting insert in a laminar fluid coolant flow at boundary conditions of the third kind / A. P. Lukisha, V. F. Prisnyakov // International Journal of Heat and Mass Transfer. 53 (2010). – P. 2469 – 2476.
7. Майоров В. А. Интенсификация теплообмена при испарении потока в канале с пористым высокотеплопроводным наполнителем / В. А. Майоров // Промышленная теплотехника. – 1981. – № 4. – С.22 – 28.
8. Майоров В. А. Гидродинамика и теплообмен парожидкостного потока в пористых матрицах / В. А. Майоров // Процессы тепло - и массообмена при фазовых превращениях и в двухфазных потоках. Материалы международной школы-семинара, 19-26 сент. 1985г. – Минск, 1985. – С. 82 – 97.
9. Майоров В. А. Теплообмен и структура потока при испарении его в канале парогенератора с пористым наполнителем / В. А. Майоров // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. – Тула, 1982. – С. 125 – 133.

Надійшла до редколегії 19.05.2014