УДК 539.374

И. С. Онищенко, Ю. А. Черняков, В. П. Шнейдер

Днепропетровский национальный университет имени О. Гончара
ООО «Завод Мастер - Профи»

НЕПРЕРЫВНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ МИКРОДЕФОРМАЦИИ

Различные варианты теории вязкопластичности, учитывающие микродеформации, были предложены и развивались в целом ряде работ, и некоторые из них получили достаточно полное экспериментальное подтверждение. Недостатком предложенных вариантов теории являлось отсутствие четкого предельного перехода от вязкопластического к упругопластическому поведению. В настоящей работе построен вязкопластический касательный оператор, способный обеспечить такой переход и построить матрицу касательной жесткости, необходимую для решения задач локализации необратимой деформации и разрушения.

Ключевые слова: вязкопластичность, теория микродеформации, оператор касательной жесткости.

Різні варіанти теорії в'язкопластичності з урахуванням мікродеформацій запропоновано і розвивинуто в цілому ряді робіт, деякі з них набули досить повного експериментального підтвердження. Недоліком запропонованих варіантів теорії можна вважати відсутність чіткого переходу від в’язкопластичної до пружнопластичної поведінки. У даній роботі побудовано в’язкопластичний дотичний оператор, здатний забезпечити такий перехід і побудувати матрицю дотичної жорсткості, необхідну для розв’язання задач локалізації незворотної деформації і руйнування.

Ключові слова: в'язкопластичний, теорія мікродеформації, оператор дотичної жорсткості.

The different variants of theory which take into account the microstrain have been proposed, they evolved in many papers. And some of them have obtained completely experimental proof. The drawback was the lack of a clear passage to from viscoplastic to elastoplastic behavior. In this paper, we construct a viscoplastic tangent operator. It provides this transition and allows to construct the tangent stiffness matrix, which is necessary for solving the localization of irreversible deformation and fracture.

Key words: viscoplasticity theory of microstrain, the operator of the tangent stiffness.

Введение. В последние годы предложен целый ряд формулировок континуальной теории вязкопластичности [1 – 3], которые приводят к определяющим соотношениям, сходным по их математической структуре с соотношениями классической теории течения. С помощью такого представления теории с независимой от скорости пластичностью легко распространяются на описание материалов, поведение которых зависит от скорости. Кроме того, могут использоваться известные подходы теории пластичности для интегрирования уравнений вязкопластической скорости, основанные на алгоритмическом касательном упругопластическом операторе [4;5].

Постановка задачи. Оставаясь в рамках основных гипотез теории пластичности и ползучести, учитывающей микродеформации [6], будем считать, что представительный макрообъем состоит из некоторой совокупности взаимосвязанных микрочастиц, напряженно-деформированное состояние которых определяется микронапряжениями σ_α и микродеформациями $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ соответственно. Таким образом, принимаем существование, по крайней мере, двух уровней

© Онищенко И.С., Черняков Ю.А., Шнейдер В.П., 2014

характерных размеров: макроуровень, определяемый размерами представительного макрообъема, и микроуровень, характерный размер которого определяется размерами микрочастицы. В теории микродеформаций микроуровень обычно находится на уровне размера зерна поликристаллического материала. В [7;8] именно уровень зерна принят в качестве микроуровня, что принято и в настоящей работе.

Обозначим относительный объем зерна (отношение объема зерна к объему представительного макрообъема) через Δv_α. Начальный предел текучести зерна положим равным τ_0. Однородную в пределах этого объема пластическую деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p = \lambda_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha$ характеризует величина λ_α ($\lambda_\alpha = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p}$) и направление $\boldsymbol{\mu}_\alpha \in \Omega$. Материал принимается первоначально изотропным, и в силу этого мы считаем, что все возможные направления микровязкопластического деформирования распределены равномерно в Ω.

Для упрощения изложения будем рассматривать случай малых деформаций. При построении локального закона деформирования микрочастицы с номером α тензор микродеформации $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ представим в виде суммы упругой $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e$ и пластической $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p$ составляющих

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e + \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p . \tag{1}$$

Макропластическую деформацию получим осреднением локальной вязкопластической деформации по всему представительному макрообъему

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha \Delta \nu_\alpha \quad \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \Delta \nu_\alpha = 1 \right). \tag{2}$$

В предположении, что пластические деформации не влияют на упругость материала, можем записать

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}_e : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) , \tag{3}$$

где $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор макронапряжений; $\mathbf{G}_e$ – тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости), который запишем

$$\mathbf{G}_e = 2G \left[\frac{1}{2} \mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \right], \tag{4}$$

где G и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; $\mathbf{I}, \mathbf{i}$ – единичные тензоры четвертого и второго рангов. При этом полагаем, что упругая матрица жесткости микрочастицы совпадает с упругой матрицей жесткости макрообъема.

Девиатор $\mathbf{s}_\alpha = \boldsymbol{\sigma}_\alpha - \sigma_\alpha \mathbf{i}$, ($\sigma_\alpha = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \mathbf{i}$) действующего в зерне напряжения представим, как это принято в теории микродеформации, в виде суммы

$$\mathbf{s}_\alpha = \boldsymbol{\tau}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_\alpha ,$$

где $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ и $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ - диссипативная и «упругая» составляющие сопротивления пластическим деформациям. В проекции на направление $\boldsymbol{\mu}_n$ имеем

$$s_\alpha = \tau_\alpha + \rho_\alpha\,, \tag{5}$$

где обозначено

$$s_\alpha = \mathbf{s}_\alpha : \boldsymbol{\mu}_\alpha, \tau_\alpha = \boldsymbol{\tau}_\alpha : \boldsymbol{\mu}_\alpha, \rho_\alpha = \boldsymbol{\rho}_\alpha : \boldsymbol{\mu}_\alpha. \tag{6}$$

Отметим, что в общем случае локальный предел текучести (предел текучести отдельного зерна) зависит от размеров и формы конкретного зерна. В [9] было показано, что учет реального распределения размеров зерен в образце материала (а соответственно, и распределение пределов текучести различных зерен) позволяет существенно улучшить описание пластического деформирования поликристаллических материалов. Однако в настоящей работе мы будем использовать среднее значение предела текучести τ_0.

Для описания вязкопластического течения в работах [6;7] было предложено тензоры диссипативных $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ и внутренних сил $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ задавать с использованием закона пластического течения, чувствительного к скорости деформации, в форме

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^p = \dot{\lambda}_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha\,,\ \boldsymbol{\tau}_\alpha = \tau_\alpha(\lambda_\beta, \dot{\lambda}_\beta)\boldsymbol{\mu}_\alpha\,,\ \boldsymbol{\rho}_\alpha = \rho_\alpha(\lambda_\beta, \dot{\lambda}_\beta)\boldsymbol{\mu}_\alpha\,, \tag{7}$$

где $\dot{\lambda}_\alpha = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^p}$ – скорость вязкопластической деформации n-й микрочастицы.

Девиатор внутренних микронапряжений микрочастицы, с учетом результатов работ [6;7], представим в следующем виде:

$$\rho_\alpha = \rho(\lambda_\alpha)\varphi(\dot{\lambda}_\alpha), \quad \tau_\alpha = \tau_0(\bar{\lambda}) + \tau_1(\bar{\lambda})\psi(\dot{\lambda}_\alpha)\,. \tag{8}$$

Уравнение эволюции для параметра $\rho(\lambda_\alpha)$ представим в виде

$$\dot{\rho}_\alpha = a(\boldsymbol{\mu}_\alpha : \boldsymbol{\mu}'_\alpha) R_1 \dot{\lambda}_\alpha + R_2 \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p : \boldsymbol{\mu}_\alpha + R_3 \dot{\bar{\lambda}}\,, \tag{9}$$

где обозначено

$$\dot{\bar{\lambda}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\lambda}_\alpha \Delta\nu_\alpha,\ a(\boldsymbol{\mu}_\alpha : \boldsymbol{\mu}'_\alpha) = \frac{1}{2}[1 - \eta + (1+\eta) sign(\boldsymbol{\mu}_\alpha : \boldsymbol{\mu}'_\alpha)] \tag{10}$$

и R_1, R_2, R_3, η – константы материала; $\boldsymbol{\mu}'_\alpha$ – направление активного микропластического деформирования. Как следует из (9), в процессе пластического деформирования величина $\rho(\lambda_\alpha)$ изменяется не только в направлении активного микропластического деформирования, но и во всех остальных направлениях.

Для установления связи локальных законов микро- и макроскопического деформирования воспользуемся соотношениями типа Кренера

$$\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_\alpha = A_0\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right),$$

где A_0 – константа материала. Из последнего соотношения в проекции на направление $\boldsymbol{\mu}_\alpha$, с учетом (3), (5)− (10), находим

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\mu}_\alpha = \tau_0(\bar{\lambda}) + \tau_1(\bar{\lambda})\psi(\dot{\lambda}_\alpha) + \rho(\lambda_\alpha)\varphi(\dot{\lambda}_\alpha) + A_0(\lambda_\alpha - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \boldsymbol{\mu}_\alpha)\,. \tag{11}$$

Последнее соотношение представляет собой локальное условие текучести в направлении $\boldsymbol{\mu}_\alpha$.

В работе [8] был рассмотрен частный случай, когда

$$\varphi\left(\dot{\lambda}_\alpha\right)=1, \psi\left(\dot{\lambda}_\alpha\right)=\left(\dot{\lambda}_\alpha\right)^m, \tag{12}$$

т.е. принималось, что скорость деформации влияет только на локальный предел текучести. В этом случае из (11) следует

$$\bar{\mathbf{s}} : \boldsymbol{\mu}_\alpha - A_0(\lambda_\alpha - \boldsymbol{\mu}_\alpha : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \rho(\lambda_\alpha) - \tau_0 = \tau_1 f(\dot{\lambda}_\alpha{}^m), \tag{13}$$

т.е. приходим к локальному закону типа теории вязкопластичности Пежины

$$\dot{\lambda}_\alpha = \left\langle \frac{\bar{\mathbf{s}} : \boldsymbol{\mu}_\alpha - A_0(\lambda_\alpha - \boldsymbol{\mu}_\alpha : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \rho_\alpha(\lambda_\alpha) - \tau_0}{\tau_1} \right\rangle^{1/m}, \tag{14}$$

где $\langle .. \rangle$ – оператор, который задается формулой $\langle \mathrm{x} \rangle = 0{,}5(\mathrm{x} + |\mathrm{x}|)$.

Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными [9], приведенными в работе [8], показало, что удовлетворительных результатов можно достичь при обязательном учете распределения по пределам текучести.

Рассмотрим обобщенный локальный закон, полагая

$$\varphi\left(\dot{\lambda}_\alpha\right) = \psi\left(\dot{\lambda}_\alpha\right) = f^{-1}\left(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\dot{\lambda}_0}\right), \tau_0 = 0, \tau_1 = const, \tag{15}$$

где f^{-1} – функция, обратная к заданной функции $f = f\left(\dot{\lambda}_n / \dot{\lambda}_0\right)$, зависящей от относительной скорости микропластического деформирования.

В этом случае на основании (11) находим

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\mu}_\alpha - A_0(\lambda_\alpha - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \boldsymbol{\mu}_\alpha) = [\tau_1 + \rho(\lambda_\alpha)] f^{-1}\left(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\dot{\lambda}_0}\right). \tag{16}$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\dot{\lambda}_\alpha = \dot{\lambda}_0 f\left(\chi_\alpha(t)\right), \tag{17}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &\chi_\alpha(t) = \left\langle \frac{p_\alpha(t)}{g_\alpha(t)} \right\rangle, g_\alpha(t) = \tau_1 + \rho(\lambda_\alpha(t)), \\ &p_\alpha(t) = [\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + A_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t)] : \boldsymbol{\mu}_\alpha - A_0 \lambda_\alpha(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Зададим процесс деформирования: $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$. Пусть в некоторый момент времени t нам известны значения $\lambda_\alpha(t), \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t), \rho_\alpha(t), \Omega$. Зададим $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau)$ в момент времени $\tau = t + \Delta t$ и поставим задачу определения $\lambda_\alpha(\tau), \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\tau), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau), \rho_\alpha(\tau)$ в этот момент времени.

Запишем локальный закон (17) в момент времени $\tau = t + \Delta t$:

$$\dot{\lambda}_\alpha(\tau) = \dot{\lambda}_0 f\left[\frac{p_\alpha(\tau)}{g_\alpha(\tau)}\right] = \dot{\lambda}_0 f\left[\frac{p_\alpha(t) + \Delta p_\alpha(\tau)}{g_\alpha(t) + \Delta g_\alpha(\tau)}\right]. \tag{19}$$

Представим $f(t + \Delta t)$ в виде разложения в ряд Тейлора

$$\dot{\lambda}_\alpha(t + \Delta t) = \dot{\lambda}_0 f\left[\frac{p_\alpha(t)}{g_\alpha(t)}\right] + \left.\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right|_t \Delta p_\alpha(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial g_\alpha}\right|_t \Delta g_\alpha(t). \tag{20}$$

Учитывая выражения для производных

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right|_t = f'\left[\frac{p_\alpha(t)}{g_\alpha(t)}\right]\frac{g_\alpha(t)}{g_\alpha^2(t)}, \left.\frac{\partial \dot\lambda_\alpha}{\partial g_\alpha}\right|_t = -f'\left[\frac{p_\alpha(t)}{g_\alpha(t)}\right]\frac{p_\alpha(t)}{g_\alpha^2(t)},$$

из (20) находим

$$\dot\lambda_\alpha(t+\Delta t) = \dot\lambda_\alpha(t) + [\Delta p_\alpha(t) - \Delta g_\alpha(t)\chi_\alpha(t)]\, f'\left[\chi_\alpha(t)\right]\frac{\dot\lambda_0}{g_\alpha(t)}. \quad (21)$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{\Delta t}[\lambda_\alpha(t+\Delta t) - \lambda_\alpha(t)] = \frac{\Delta\lambda_\alpha}{\Delta t} = (1-\theta)\dot\lambda_\alpha(t) + \theta\dot\lambda_\alpha(t+\Delta t). \quad (22)$$

Если в последнем положить $\theta = 0$, то приходим к прямому методу Эйлера, $\theta = 1/2$ - к схеме обратного интегрирования, $\theta = 2/3$ – к методу Галеркина, $\theta = 1$ - к методу обратного дифференцирования. Подставляя (21) в (22), получаем

$$\Delta\lambda_\alpha = \dot\lambda_0 f(\chi_\alpha)\Delta t + \theta\dot\gamma_\alpha[\Delta p_\alpha(t) - \Delta g_\alpha(t)\chi_\alpha(t)]\Delta t, \quad (23)$$

где обозначено

$$\dot\gamma_\alpha = f'\left[\chi_\alpha(t)\right]\frac{\dot\lambda_0}{g_\alpha(t)}. \quad (24)$$

В качестве примера рассмотрим функцию f вида $f = \mathrm{ch}(\chi_\alpha^n)$, которая позволяет описать ползучесть, не используя распределение пределов текучести, как это было сделано в [8]. В этом случае имеем

$$\dot\gamma_\alpha = n\sinh(\chi_\alpha^n)\chi_\alpha^{n-1}\frac{\dot\lambda_0}{g_\alpha}. \quad (25)$$

На основании (18) можем записать

$$\begin{aligned} \Delta p_\alpha &= [\Delta\bar{\boldsymbol\sigma} + A_0\Delta\bar{\boldsymbol\varepsilon}^p] : \boldsymbol\mu_\alpha - A_0\Delta\lambda_\alpha, \\ \Delta g_\alpha &= \Delta\rho = R_1\Delta\lambda_\alpha + R_2\Delta\bar{\boldsymbol\varepsilon}^p : \boldsymbol\mu_\alpha + R_3\Delta\bar\lambda, \\ \Delta\bar\lambda &= \sum_\beta \Delta\lambda_\beta, \quad \Delta\bar{\boldsymbol\varepsilon}^p = \sum_\beta \Delta\lambda_\beta\boldsymbol\mu_\beta. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (26) и (17) в формулу (23), находим

$$\begin{aligned} [1 + \theta\dot\gamma_\alpha\Delta t(A_0 + R_1\chi_\alpha)]\Delta\lambda_\alpha &= \theta\dot\gamma_\alpha\Delta t(A_0 - R_2\chi_\alpha)\Delta\bar{\boldsymbol\varepsilon}^p : \boldsymbol\mu_\alpha \\ &- \theta\dot\gamma_\alpha\Delta t R_3\bar\lambda\chi_\alpha + \dot\lambda_0\Delta t f(\chi_\alpha) + \theta\dot\gamma_\alpha\Delta t\Delta\bar{\boldsymbol\sigma} : \boldsymbol\mu_\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений (27) для определения $\Delta\lambda_\alpha$. Представим систему (27) в следующем виде:

$$\Delta\lambda_\alpha = A_\alpha\Delta\bar{\boldsymbol\varepsilon}^p : \boldsymbol\mu_\alpha - B_\alpha\Delta\bar\lambda + C_\alpha + D_\alpha\Delta\bar{\boldsymbol\sigma} : \boldsymbol\mu_\alpha, \quad (28)$$

где обозначено

$$A_\alpha = \frac{(A_0 - R_2\chi_\alpha)}{1/(\dot\gamma_\alpha \Delta t) + (A_0 + R_1\chi_\alpha)},\ B_\alpha = \frac{R_3\chi_\alpha}{1/(\dot\gamma_\alpha \Delta t) + (A_0 + R_1\chi_\alpha)},$$
$$C_\alpha = \frac{(\dot\lambda_0 / \dot\gamma_\alpha) f(\chi_\alpha)}{1/(\dot\gamma_\alpha \Delta t) + (A_0 + R_1\chi_\alpha)},\ D_\alpha = \frac{\theta}{1/(\dot\gamma_\alpha \Delta t) + (A_0 + R_1\chi_\alpha)}. \qquad (29)$$

Заметим, что при $\Delta t \to 0$ имеем $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha \to 0$ и, как следствие, $\Delta\lambda_\alpha \to 0$. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ имеем чисто упругую реакцию. Если формально принять Δt достаточно большими, то получаем независимое от времени пластическое поведение.

$$A_\alpha = \frac{A_0 - R_2\chi_\alpha}{A_0 + R_1\chi_\alpha},\ B_\alpha = \frac{R_3\chi_\alpha}{A_0 + r_1\chi_\alpha},$$
$$C_\alpha = \frac{(\dot\lambda_0 / \dot\gamma_\alpha) f(\chi_\alpha)}{A_0 + R_1\chi_\alpha},\ D_\alpha = \frac{\theta}{A_0 + R_1\chi_\alpha}. \qquad (30)$$

Построим два вспомогательных уравнения, первое из которых получим из (28) путем суммирования по всем активным частицам, а второе – путем диадного умножения на $\boldsymbol{\mu}_\alpha$ с последующим суммированием по всем активным частицам. Находим

$$(1+\Omega_B)\Delta\bar\lambda = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \mathbf{F}_A + \Omega_C + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{F}_D,$$
$$(\mathbf{E} - \mathbf{G}_A) : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = -\mathbf{F}_B \Delta\bar\lambda + \mathbf{F}_C + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{G}_D, \qquad (31)$$

где обозначено

$$\mathbf{G}_A = \sum_\alpha A_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,\ \mathbf{G}_D = \sum_\alpha D_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,\ \mathbf{F}_A = \sum_\alpha A_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,\ \mathbf{F}_B = \sum_\alpha A_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,$$
$$\mathbf{F}_C = \sum_\alpha C_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,\ \mathbf{F}_D = \sum_\alpha D_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha,\ \Omega_B = \sum_\alpha B_\alpha,\ \Omega_C = \sum_\alpha C_\alpha. \qquad (32)$$

Разрешая последнюю систему относительно $\Delta\bar\lambda$ и $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, получаем

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \left(\mathbf{E} - \mathbf{G}_A + \frac{\mathbf{F}_B \mathbf{F}_A}{1+\Omega_B}\right)^{-1} : \left[\mathbf{F}_C - \frac{\Omega_C \mathbf{F}_B}{1+\Omega_B} + \left(\mathbf{G}_D - \frac{\mathbf{F}_B \mathbf{F}_D}{(1+\Omega_B)}\right) : \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}\right],$$
$$\Delta\bar\lambda = \frac{1}{1+\Omega_B}\left[\mathbf{F}_A : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Omega_C + \mathbf{F}_D : \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}\right]. \qquad (33)$$

Таким образом, мы приходим к определяющим соотношениям теории ползучести, учитывающей микродеформации по виду, совпадающим с соотношениями теории микродеформации (33). Особенностью записанных соотношений является то, что матрица жесткости в определяющих соотношениях является теперь явной функцией шага по времени Δt, как следует из формул (29). В силу этого матрицу жесткости определяющих соотношений можно трактовать как касательный оператор жесткости.

Преимущество представления (33) заключается в том, что эти соотношения можно использовать для решения граничных задач и задач устойчивости, используя подходы, которые были развиты в теории микродеформации. Кроме того, соотношения (33) можно непосредственно использовать для числового анализа неустановившейся ползучести при сложном нагружении, задавая шаг по времени Δt.

Числовые результаты. Числовые расчеты, которые проводились в рамках построенных соотношений для функции $f = \sinh\left(\chi_\alpha(t)\right)^n$, показали, что модифицированный закон течения позволяет достичь описания экспериментальных данных [9] даже при существенном уменьшении числа констант материала в определяющих соотношениях. При расчетах принимались следующие значения констант: $\tau_1 = 100, R_1 = 120, R_2 = R_3 = 0$, $G = 53000, v = 0.292$, $m = 0.06$.

Выводы. Построен оператор касательной жесткости теории вязкопластичности, учитывающей микродеформации, который определяет непрерывный переход от вязкопластического поведения к чисто пластическому (независящему от времени). Такое представление определяющих соотношений позволяет использовать алгоритмы расчета ползучести, устойчивости и разрушения элементов конструкций, принятые при исследовании чисто пластического поведения. Установлено, что расчет с использованием этих соотношений имеет неоспоримые преимущества по сравнению с прямым методом Эйлера, который применялся в работе [8]. Расчеты показали, что наиболее приемлемым является значение $\theta = 0.4$. Если использовать метод Эйлера, то требуется итераций в 1,5 раза больше.

Библиографические ссылки

1. **Carosio, A.,** Willam, K., Etse, G. On the consistency of viscoplastic formulations. // International Journal of Solids and Structures, 37 – 2000. – P.7349 – 7369
2. **Ponthot, J.P.,** 1995. Radial return extensions for visco-plasticity and lubricated friction. // Proc. International Conference on Structural Mechanics and Reactor Technology SMIRT-13. Porto Alegre, Brazil, 2. – P.711 – 722.
3. **Wang, W.M.,** Sluys, J.L., de Borst, R. Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. // Int. J. Num. Meth. Engng., 40. – 1997. – P.3839 – 3864.
4. **Simo, J.C.,** Taylor, R.L., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 48. – P.101 – 118.
5. **Ju, J.W.,** 1990. Consistent tangent moduli for a class of viscoplasticity. // J. Engng. Mech. ASCE 116 (8) – P.1764 – 1799.
6. **Кадашевич, Ю.И.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А. Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 890 – 897.
7. **Kadashevich, Yu.I.,** Chernyakov, Yu.A. Theory of plasticity, taking into account micro stresses // Advances in Mechanics. – 1992. – 15 (№3-4). – P. 3 – 39.
8. **Черняков, Ю.А.** Теория вязкопластичности, учитывающая микродеформации/ Ю.А. Черняков, В.П. Шнейдер, А.В. Гончаренко // Вісн. Дніпропетр. ун-ту, Механіка. – 2008. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 145 – 152.
9. **Ohashi, Y.,** Kawai M., Momose T. Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature // Transactions of the ASME. – 1986. – Vol. 108. – P. 68 – 74.
10. **Harren, S. V.,** and Asaro, R. J. (1989), Nonuniform Deformation in Polycrystals and Aspects of the Validity of the Taylor Model // J. Mech. Phys. Solids. – Vol. 37. – P. 191 – 232.
11. **Peirce, D.,** Asaro R. J., and Needleman, A. (1983), Material Rate Dependency and Localized Deformation in Crystalline Solids // Acta Metall. – Vol. 31. – P. 1951 – 1976.

12.**Shneider, V.P.,** Chernyakov, Yu.A. The development of micro deformations theory: the account of polycrystalline material grain sizes // Proceedings of third international conference "Multiscale Material Modeling". – Freiburg (Germany), 2006. – P. 530 – 533.

Надійшла до редколегії 25.02.2014

УДК 539.3

К. В. Панин

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ ПРИ СЛОЖНОМ СДВИГЕ

Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластического бруса с краевой трещиной в условиях сложного сдвига, а также исследуется влияния истории нагружения на величину раскрытия трещины.

Ключевые слова: сложный сдвиг, теория пластичности, учитывающая микродеформации, метод конечных элементов, зона пластичности, раскрытие трещины.

Розглядається задача про визначення напружено-деформованого стану пружнопластичного брусу з крайовою тріщиною в умовах складного зсуву, а також досліджується вплив історії навантаження на величину розкриття тріщини.

Ключові слова: складний зсув, теорія пластичності, що враховує мікродеформації, метод скінченних елементів, зона пластичності, розкриття тріщини.

The problem of determining the stress-strain state of the elasticplastic beam with edge crack in a complex shift is considered and the influence of the loading history on the crack opening displacement is investigated.

Key words: anti-plane deformation, theory plasticity taking into account micro deformation, finite element method, plastic zone, crack opening displacement.

Введение. Известно, что когда линейный размер пластической зоны у вершины трещины более чем на 20% превышает длину трещины, то формулировка закономерностей, которые определяют поведение тела так или иначе должна быть связана со свойствами сопротивления материала пластическим деформациям. В такой постановке задача относится к нелинейной механике разрушения, все модели которой вытекают из наличия достаточно развитой пластической зоны перед вершиной трещины. В этом случае для оценки трещиностойкости широко используются энергетические и деформационные критерии. Среди них наибольшее применение нашли однопараметрические критерии на основе независимого от контура интегрирования J-интеграла и раскрытия трещины δ [1]. Строгого теоретического обоснования, как в случае J-интеграла, критерий критического раскрытия трещины δ не имеет. Тем не менее он применяется довольно часто. Показано, что величины J-интеграла и раскрытия трещины δ связаны однозначной зависимостью, что является серьезным аргументом в пользу применения указанного критерия в нелинейной механике разрушения. В данной работе исследуется вопрос о влияния истории нагружения на величину раскрытия трещины δ.

Постановка задачи. Рассматривается равновесие призматического бруса квадратного сечения ($a \times a$), ослабленного краевой трещиной длины $l = a/2$, и

© Панин К.В., 2014