

12. **Shneider, V.P.**, Chernyakov, Yu.A. The development of micro deformations theory: the account of polycrystalline material grain sizes // Proceedings of third international conference "Multiscale Material Modeling". – Freiburg (Germany), 2006. – P. 530 – 533.

Надійшла до редколегії 25.02.2014

УДК 539.3

К. В. Панин

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ ПРИ СЛОЖНОМ СДВИГЕ

Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластического бруса с краевой трещиной в условиях сложного сдвига, а также исследуется влияние истории нагружения на величину раскрытия трещины.

Ключевые слова: сложный сдвиг, теория пластичности, учитывающая микродеформации, метод конечных элементов, зона пластичности, раскрытие трещины.

Розглядається задача про визначення напружено-деформованого стану пружнопластичного бруса з крайовою тріщиною в умовах складного зсуву, а також досліджується вплив історії навантаження на величину розкриття тріщини.

Ключові слова: складний зсув, теорія пластичності, що враховує мікродеформації, метод скінченних елементів, зона пластичності, розкриття тріщини.

The problem of determining the stress-strain state of the elasticplastic beam with edge crack in a complex shift is considered and the influence of the loading history on the crack opening displacement is investigated.

Key words: anti-plane deformation, theory plasticity taking into account micro deformation, finite element method, plastic zone, crack opening displacement.

Введение. Известно, что когда линейный размер пластической зоны у вершины трещины более чем на 20% превышает длину трещины, то формулировка закономерностей, которые определяют поведение тела так или иначе должна быть связана со свойствами сопротивления материала пластическим деформациям. В такой постановке задача относится к нелинейной механике разрушения, все модели которой вытекают из наличия достаточно развитой пластической зоны перед вершиной трещины. В этом случае для оценки трещиностойкости широко используются энергетические и деформационные критерии. Среди них наибольшее применение нашли однопараметрические критерии на основе независимого от контура интегрирования J -интеграла и раскрытия трещины δ [1]. Строгого теоретического обоснования, как в случае J -интеграла, критерий критического раскрытия трещины δ не имеет. Тем не менее он применяется довольно часто. Показано, что величины J -интеграла и раскрытия трещины δ связаны однозначной зависимостью, что является серьезным аргументом в пользу применения указанного критерия в нелинейной механике разрушения. В данной работе исследуется вопрос о влиянии истории нагружения на величину раскрытия трещины δ .

Постановка задачи. Рассматривается равновесие призматического бруса квадратного сечения ($a \times a$), ослабленного краевой трещиной длины $l = a/2$, и

© Панин К.В., 2014

находящегося под действием постоянных касательных усилий $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$, действующих по его граням (рис.1). Нагружение бруса - квазистатическое. Материал бруса – упругопластический упрочняющийся. Требуется определить компоненты напряженно-деформированного состояния бруса в произвольный момент времени.

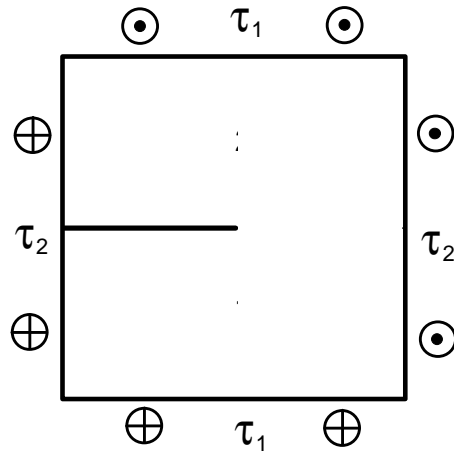


Рис.1. Сечение бруса

Для описания процессов сложного упругопластического деформирования бруса воспользуемся уравнениями состояния теории пластичности, учитывающей микродеформации [2]. В [3] показано, что этот дифференциально-нелинейный вариант теории пластичности, который относится к классу микроструктурных, достаточно хорошо описывает сложное упругопластическое деформирование поликристаллических тел. В нем неравномерность пластической деформации, обусловленная структурой материала, приближенно учитывается путем представления тензора пластической деформации в виде суммы (или в пределе в виде интеграла) элементарных пластических деформаций, каждой из которых отвечает своя поверхность текучести и система внутренних микроупругих сил.

Так как в случае антиплоской деформации траектории нагружения и деформирования являются плоскими, то определяющие соотношения теории пластичности, учитывающей микродеформации, принимают следующий вид:

$$\dot{S}_k = 2G(\delta_{km} - G_{km}^{(1)})\dot{\Xi}_m \quad (k, m = 1, 2),$$

$$G_{km}^{(1)} = (\delta_{kn} + B_2 G_{kn}^{(2)})^{-1} G_{nm}^{(2)},$$

$$G_{nm}^{(2)} = \frac{1}{B_1} \left(G_{nm} - \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \Omega} F_n F_m \right),$$

$$F_k = \int_{\Omega'} \lambda'_k d\Omega', \quad G_{km} = \int_{\Omega'} \lambda'_k \lambda'_m d\Omega', \quad \Omega = \int_{\Omega'} d\Omega',$$

где $\dot{S}_k = \dot{\sigma}_{k3}$, $\dot{\Xi}_k = \dot{\epsilon}_{k3}$ – компоненты векторов скоростей напряжений и деформаций; G – модуль сдвига; $\mu_1 = B_3/B_1$; B_i – универсальные функции материала; $\lambda'_1 = \cos \theta_1$, $\lambda'_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$ – направления активного

микропластического деформирования; $d\Omega' = \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2$ – дифференциальная форма “телесный угол”.

Область направлений активного микропластического деформирования Ω' строится с помощью соотношений

$$E(\lambda'_k, t) \leq \partial_k \lambda'_k, \quad \dot{\lambda}'_k \lambda'_k - \frac{\mu}{1 + \mu\Omega} F_k \dot{\lambda}'_k > 0,$$

где $\dot{\lambda}'_k = \dot{S}_k - B_2 G_{km}^{(1)} \dot{\epsilon}_m$ – компоненты вектора активных деформаций.

Интенсивность разрешающих деформаций $E(\lambda'_k, t)$ определяется с помощью формул

$$E(\lambda'_k, 0) = \epsilon_o, \quad \dot{E}(\lambda'_k, t) = \begin{cases} \dot{\partial}_k \lambda'_k, & \lambda'_k \lambda_k = 1; \\ B_2 \dot{\partial}_k^p \lambda'_k + \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda_k = \pm 1; \\ \eta \dot{\partial}_k \lambda'_k + B_2 \dot{\partial}_k^p \lambda'_k + (1 + \eta) \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda_k = -1; \end{cases}$$

где $\dot{\chi} = \frac{\mu}{1 + \mu\Omega} F_k \dot{\lambda}'_k$; η – универсальная функция материала; ϵ_o – начальный предел текучести материала по деформациям.

С учетом того, что определяющие соотношения используемого варианта теории пластичности записываются в скоростях, рассматриваемая граничная задача формулируется также в скоростях. Она сводится к построению полей скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{13}$, $\dot{\sigma}_{23}$, деформаций $\dot{\epsilon}_{13}$, $\dot{\epsilon}_{23}$ и перемещений v_3 из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad \dot{\epsilon}_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}.$$

к которой необходимо добавить определяющие соотношения теории пластичности, учитывающей микродеформации, и граничные условия

$$\dot{\sigma}_{k3} = \tau_k \text{ на } S_p; \quad v_3 = v_{30} \text{ на } S_v.$$

Для решения этой задачи на каждом шаге по времени можно воспользоваться принципом максимума для скоростей деформации [4], который имеет вид

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{13} \delta \dot{\epsilon}_{13} + \dot{\sigma}_{23} \delta \dot{\epsilon}_{23}) dV + \int_{S_{p1}} \tau_1 \delta v_3 dS + \int_{S_{p2}} \tau_2 \delta v_3 dS = 0.$$

Метод решения. К полученной вариационной задаче применяется метод конечных элементов, и граничная задача теории пластичности приводится к задаче Коши. Она решается методом Эйлера с промежуточными итерациями. На каждом шаге метода Эйлера область направлений активного микропластического деформирования определяется методом простой итерации. Для вычисления матриц жесткости конечных элементов применяется алгоритм [5], позволяющий снизить число подлежащих вычислению кратных интегралов в определяющих соотношениях теории пластичности, учитывающей микродеформации, до размерности траектории нагружения, т.е. до двух.

Результаты расчетов. При проведении расчетов в качестве материала бруса выбрана сталь Ст45. В [3] показано, что для описания упругопластического деформирования данного материала в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, в качестве универсальных функций материала B_1 , B_2 , B_3 и η

можно использовать константы. При расчетах приняты следующие постоянные: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\varepsilon_o = 1,31 \cdot 10^{-3}$; $B_1 = 2,74$; $B_2 = B_3 = 0$; $\eta = 1$.

При проведении серии из четырех расчетов нагружение в пространстве внешней нагрузки задавалось по следующим траекториям: 1-OA, 2-OBA, 3-OCA, 4-ODA (рис.2).

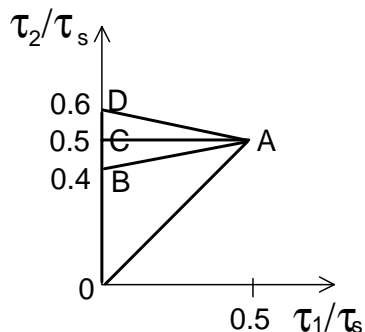


Рис.2. Схемы нагружения

На рис.3 представлены зоны пластичности в сечении бруса квадратного сечения, ослабленного краевой трещиной, полученные при указанных схемах нагружения при решении задачи в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации. Результаты свидетельствуют о том, что история нагружения оказывает влияние на конфигурацию зоны пластичности в окрестности вершины трещины.

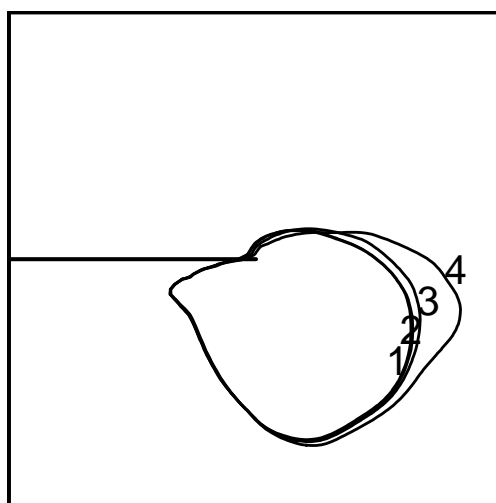


Рис.3. Зоны пластичности в сечении бруса при разных схемах нагружения

Величина раскрытия трещины в каждом из случаев находится на основании конечноэлементного решения и центра поворота [6]. При расчетах из рассмотрения исключаются несколько узлов в окрестности вершины трещины. При этом

перемещения других узлов, расположенных на трещине укладываются почти на одну прямую. Для такой линии выполняется экстраполяция до вершины трещины, что дает возможность получить соответствующую оценку величины раскрытия трещины δ . В табл. 1 приведены значения величины раскрытия трещины δ , полученные в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, отнесенные к его значению, полученному при решении упругой задачи. Полученные результаты свидетельствуют о том, что история нагружения оказывает влияние на величину раскрытия трещины δ .

Таблиця 1

Результаты расчетов величины раскрытия трещины

Схема нагружения	Величина раскрытия трещины, δ / δ_y
1	1,35
2	1,36
3	1,4
4	1,67

Выводы. В рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, решены задачи сложного сдвига об определении напряженно-деформированного состояния упругопластического бруса квадратного сечения, ослабленного краевой трещиной. При различных схемах нагружения построены зоны пластичности в сечении бруса. Исследовано влияние истории нагружения как на конфигурацию зон пластичности в окрестности вершины трещины, так и на величину раскрытия трещины δ . Результаты расчетов свидетельствуют о том, что в некоторых случаях такое влияние может быть существенным.

Бibliографические ссылки

1. **Морозов Е.М.** Метод конечных элементов в механике разрушения / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М., 1980. – 256с.
2. **Кадашевич Ю.И.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 821 – 823.
3. **Kadashevich Yu.I.** Theory of plasticity taking into account micro stresses / Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // Advanced in Mechanics. – 1992. – Vol.15. №3 – 4. – P. 3 – 39.
4. **Черняков Ю.А.** Вариационные принципы решения граничных задач теории микродеформации / Ю.А. Черняков // Вопросы прочности и пластичности. – 1997. – С. 5 – 13.
5. **Панин К.В.** Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины продольного сдвига при сложном нагружении / К.В. Панин, Ю.А. Черняков // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. – 1992. – С. 39 – 45.
6. **Сиратори М.** Вычислительная механика разрушения / М.Сиратри, Т.Миеси, Х.Мацусита. – М., 1986. – 336с.

Надійшла до редколегії 20.06.2014