

2. **Бруязкий Е. В.** Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов / Е. В. Бруязкий. – К. : Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2000. – 443 с.
3. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1982. – 320 с.
4. **Самарский А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
5. **Самарский А. А.** Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
6. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 368 с.
7. **Hanna S.** Air Quality Modelling over Short Distances / S. Hanna // College on Atmospheric Boundary Layer and Air Pollution Modelling: 16 May-3 June. – 1994. – № SMR/760-2. – P. 712-743.
8. **Biliaiev M. M.** Numerical simulation of indoor air pollution and atmosphere pollution for regions having complex topography / M. M. Biliaiev, M. M. Kharytonov // Conference Abstracts of 31st NATO / SPS International Technical Meeting on Air Pollution Modelling and its Application, 27 September – 01 October, Torino, Italy, 2010. № P 1.7.
9. **Murakami S.** Overview of turbulence models applied in CWE / S. Murakami // Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 1998. – № 74-76. – P.1-24.
10. **Ibrahim A. M.** Modeling of Air Pollution Dispersion in Street Canyons in Cross-Wind / Ibrahim A. M. Gad, Mofreh. M. Nasief, Salem S. Abdel Aaziz // 13th Intern. Conf. on Aerospace Sciences & Aviation Technology, ASAT-13, May 26-28, 2009.– P. 1-13.
11. **Chang Cheng-Hsin.** Numerical Simulation an Wind Tunnel Studies of Pollutant Dispersion in the Urban Street Canyons With Different Height Arrangements / Chang Cheng-Hsin, Lin Jin-Shian, Chii-Ming Cheng // J. of Marine Science and Technology. – 2013. – Vol. 21, No. 2. – P. 119-126.

Надійшла до редколегії 01.05.2014

УДК 539.3

Ю.А. Черняков, А.Е. Шевелёва

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПОЛОСА ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ИНТЕРФЕЙСЕ МЕЖДУ ДВУМЯ МАТЕРИАЛАМИ

Исследована полоса локализации пластической деформации в области раздела двух материалов при условии, что диаграмма деформирования межматериальной прослойки имеет пик-«зуб». Сформулирована краевая задача Дирихле для кусочно-аналитической функции и записано ее точное аналитическое решение. Найдены длины полос локализации пластической деформации, приведена графическая иллюстрация скачка перемещений в полосе локализации и касательного напряжения на ее продолжении для различных внешних нагрузок и различных механических свойств материалов.

Ключевые слова: полоса локализации пластической деформации, кусочно-аналитическая функция, скачки перемещений.

Досліджено полосу локалізації пластичної деформації в області поділу двох матеріалів за умови, що діаграма деформування міжматеріального прошарку має пік-«зуб». Сформульовано крайову задачу Діріхле для кусково-аналітичної функції. Виписано її точний аналітичний

© Черняков Ю.А., Шевелёва А.Е., 2014

розв'язок. Знайдено довжини полос локалізації пластичної деформації, наведено графічну ілюстрацію стрибка переміщень у полосі локалізації та дотичного напруження на її продовженні для різних зовнішніх навантажень і різних механічних властивостей матеріалів.

Ключові слова: полоса локалізації пластичної деформації, кусково-аналітична функція, стрибки переміщень.

A localization strip of plastic deformation between two materials assuming that the graph of intermaterial deformation has a peak-"tooth" is investigated. Dirichlet problem for a piecewise-analytic function is formulated and solved exactly. The numerical results of the length of localization strip of plastic deformation, shear displacement jumps and shear stress for various external loads and mechanical properties of materials are presented.

Keywords: localization strip of plastic deformation, piecewise-analytic function, shear displacement jumps

Введение. Известно, что в материалах, которые имеют четко выраженную площадку текучести, при наличии неоднородного поля напряжений могут появляться изолированные линии скольжения, занимающие незначительный объем тела по сравнению с упругой частью. Соответствующие разрывные задачи линейной теории упругости были рассмотрены в [2]. В работах [4;5] была предложена оригинальная концепция, рассматривающая трещины-разрезы в упругих телах (поверхности скачков нормальных перемещений) как нетривиальные состояния равновесия физически нелинейной упругой среды. В работе [8] такая концепция была применена для исследования полос локализации пластической деформации для однородного поля напряжений в однородном материале, диаграмма деформирования которого в условиях жесткого нагружения имеет пик-«зуб» (рис. 1).

Очевидно, что подобный характер деформирования может иметь место и в случае кусочно-однородных материалов, причем полосы локализации пластической деформации в таких случаях чаще всего будут первоначально возникать в прослойках, обеспечивающих адгезию материальных компонент. Это связано с тем обстоятельством, что указанные межматериальные прослойки, возникающие в результате сварки или склейки разнородных материалов, являются, как правило, наиболее слабым местом композитов. Данная работа как раз и посвящена исследованию полос локализации пластической деформации в области раздела двух материалов, при условии что диаграмма деформирования межматериальной прослойки имеет пик-«зуб».

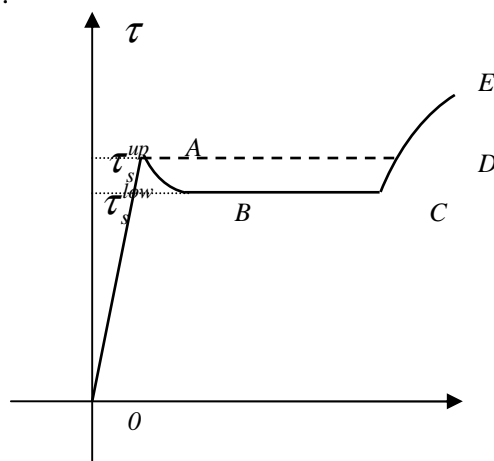


Рис. 1. Диаграмма чистого сдвига материала

Постановка задачі. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние бесконечной пластинки, состоящей из двух спаянных полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$ (рис. 2) с механическими характеристиками μ_1, κ_1 ($y > 0$) и μ_2, κ_2 ($y < 0$). На бесконечности на пластинку действует постоянная сдвиговая нагрузка τ_0 .

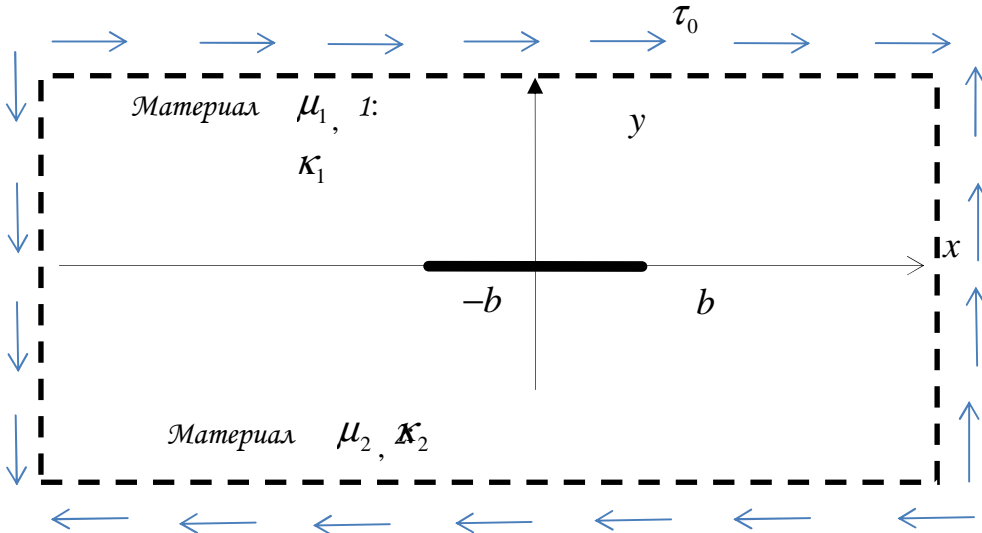


Рис. 2. Полоса локализации пластической деформации между двумя материалами

Учитывая, что межматериальная прослойка обычно является очень тонкой, будем устремлять ее толщину к нулю и называть границей раздела материалов, приписывая этой границе механические свойства прослойки. Пусть отрезок $(-b, b)$ границы раздела материалов является полосой локализации пластической деформации. Наличие такой полосы связано с появлением нетривиального решения поставленной задачи, которое имеет место наряду с однородным решением $\sigma_{11}(x, y) = 0, \sigma_{22}(x, y) = 0, \sigma_{12}(x, y) = \tau_0$.

Будем считать, что на участках $l < |x| < b$ этой полосы возникают касательные напряжения τ_s^{up} , а на участке $|x| < l$ – касательные напряжения τ_s^{low} . Тогда, мысленно разрезая полосу локализации пластической деформации по оси x и заменяя действие пластических связей между берегами касательными напряжениями τ_s^{up} и τ_s^{low} на соответствующих участках берегов, приходим к задаче линейной механики разрушения с неизвестными положениями точек b и l . Учитывая докритическое однородное напряженное состояние $\sigma_{12}(x, y) = \tau_0$, получаем, что на границе полученной полосы локализации имеют место такие граничные условия (рис. 3):

$$\sigma_{12}^{(i)}(x, 0) = \tau(x), \quad -b < x < b, \quad (1)$$

$$\text{где } \tau(x) = \begin{cases} \tau_0 - \tau_s^{low}, & 0 < |x| < l, \\ \tau_0 - \tau_s^{up}, & l < |x| < b, \end{cases}$$

$$[u_2(x,0)] = 0, \quad -b < x < b. \quad (2)$$

Здесь τ_s^{low} , τ_s^{up} – нижний и верхний пределы текучести соответственно.

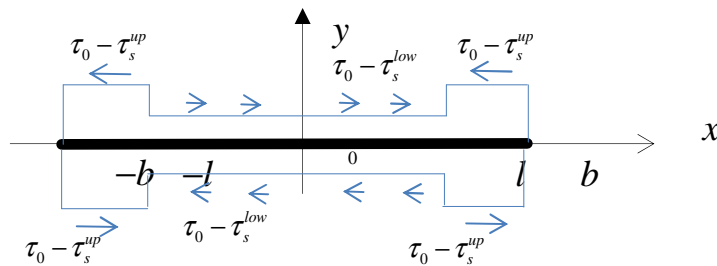


Рис. 3. Кусочно-постоянные касательные напряжения на берегах полосы локализации

Аналитическое исследование. В работе [9] для двух скрепленных упругих изотропных полупространств с дефектами в области раздела материалов при условии, что напряженно-деформированное состояние не зависит от координаты z , были приведены следующие выражения для скачков перемещений и напряжений в области раздела материалов:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x,0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x,0) = g [F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x)], \quad (3)$$

$$[u_1'(x)] + i [u_2'(x)] = F_1^+(x) - F_1^-(x), \quad (4)$$

где $[u_i'(x)] = \frac{\partial u_i^{(1)}(x,0)}{\partial x} - \frac{\partial u_i^{(2)}(x,0)}{\partial x}$, $g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}$, $\gamma = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}$.

Функция $F_1(z)$ является аналитической на всей плоскости за исключением полосы локализации $(-b, b)$.

Удовлетворяя с помощью (3), (4) граничным условиям (1)-(2), получаем

$$Im(F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x)) = -\frac{1}{g} \tau(x), \quad Im(F_1^+(x) - F_1^-(x)) = 0 \quad \text{для } -b < x < b.$$

Последние два соотношения эквивалентны следующей задаче Дирихле для кусочно-аналитической функции $F_1(z)$:

$$Re(i F_1^\pm(x)) = -\frac{\tau(x)}{g(1+\gamma)} \quad \text{для } -b < x < b \quad (5)$$

при условии на бесконечности

$$F_1(x) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (6)$$

На основании формул Келдыша-Седова [1], ограниченная на обоих концах функция $i F_1(z)$ имеет вид

$$i F_1(z) = -\frac{\sqrt{(z-b)(z+b)}}{2\pi i g(1+\gamma)} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) dt}{(t-z)\sqrt{(t-b)(t+b)}} \quad (7)$$

при дополнительном условии

$$-\frac{2}{g(1+\gamma)} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) dt}{\sqrt{(t-b)(t+b)}} = 0. \quad (8)$$

Для функции $\tau(x)$, заданной в граничном условии (1), из (8) следует

$$\int_{-b}^b \frac{\tau(t) dt}{\sqrt{(t-b)(t+b)}} = \left(\int_{-b}^{-l} + \int_l^b \right) \frac{(\tau_0 - \tau_s^{up}) dt}{\sqrt{(t-b)(t+b)}} + \int_{-l}^l \frac{(\tau_0 - \tau_s^{low}) dt}{\sqrt{(t-b)(t+b)}} = 0.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\frac{2}{i} \left\{ (\tau_0 - \tau_s^{up}) \arccos \frac{l}{b} + (\tau_0 - \tau_s^{low}) \arcsin \frac{l}{b} \right\} = 0. \quad (9)$$

Введем обозначения $\eta = \frac{l}{b}$, $\alpha = \frac{\tau_s^{low}}{\tau_s^{up}}$, $\beta = \frac{\tau_0}{\tau_s^{up}}$. Заметим, что должно быть

$\alpha < \beta$. Тогда уравнение (9) перепишем в виде

$$\pi(\beta - \alpha) + 2(1 - \alpha) \arccos \eta = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения имеет вид $\eta = \cos \frac{\pi(\beta - \alpha)}{2(1 - \alpha)}$.

Поле напряжений и скачок перемещения. На основании формулы (3), с учетом $F_1^+(x) = F_1^-(x) = F_1(x)$ для $|x| > b$ напряжения на продолжении трещины определим по формуле

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = g(1 + \gamma) F_1(x). \quad (11)$$

С учетом формулы (7), после вычисления интегралов, имеем

$$\begin{aligned} & \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \\ & = \tau_s^{up} + \frac{\tau_s^{up} - \tau_s^{low}}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{b^2 - lx}{b(x-l)} \right) - \arcsin \left(\frac{b^2 + lx}{b(x+l)} \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

Производную от сдвига (скачка касательных перемещений) берегов на основании формулы (4), определим как

$$[u_1'(x)] = \operatorname{Re}(F_1^+(x) - F_1^-(x)). \quad (13)$$

На основании (4) с использованием формул Сохоцкого-Племеля [3]

$$[u_1'(x)] + i [u_2'(x)] = F_1^+(x) - F_1^-(x) = -\frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{\pi g(1 + \gamma)} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) dt}{(t-x)\sqrt{t^2 - b^2}}.$$

Тогда вычисляя интеграл, получаем

$$[u_1'(x)] = \frac{(1-\alpha)\tau_s^{up}}{4\pi(1+\gamma)g} (\Gamma(x,l,b) - \Gamma(x,-l,b)),$$

где $\Gamma(x,l,b) = \ln \frac{b^2 - lx - \sqrt{(b^2 - l^2)(b^2 - x^2)}}{b^2 - lx + \sqrt{(b^2 - l^2)(b^2 - x^2)}}$.

Выполняя интегрирование, скачок перемещения $u_1(x,0)$, с использованием [6], определим по формуле

$$[u_1(x)] = \frac{-(1-\alpha)\tau_s^{up}}{2\pi(1+\gamma)g} ((x-l)\Gamma(x,l,b) - (x+l)\Gamma(x,-l,b)). \quad (14)$$

При $x=0$ имеем

$$\delta = [u_1(0)] = \frac{2l(1-\alpha)\tau_s^{up}}{\pi(1+\gamma)g} \ln \frac{b - \sqrt{b^2 - l^2}}{l}. \quad (15)$$

Результаты численного анализа. Рассматривались сталь 1045 с $E_1 = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu_1 = 0.28$, $\mu_1 = 6.64063 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\gamma_s = 0.0025$, $\gamma_c = 0.015$ (верхний материал) и иридий с $E_2 = 5.28 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu_2 = 0.26$, $\mu_2 = 2.09524 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (нижний). Считалось, что для межматериальной прослойки $\gamma = 1.4456$, $g = 5.43881 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\gamma_s = 0.0025$, деформация сдвига на площадке текучести (деформация Людерса) $\gamma_c = 0.015$ [7; 10].

В табл. 1 для различных значений нижнего предела текучести τ_s^{low} и касательного напряжения на бесконечности τ_0 (параметров α и β) при значении верхнего предела текучести $\tau_s^{up} = 1.66016 \cdot 10^8 \text{ Па}$ приведены решение трансцендентного уравнения (9) $\eta = \frac{l}{b}$, величины b и l , значение безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta} = \frac{\delta}{b}$.

Таблица 1

α, β	$\frac{\tau_s^{low} \cdot 10^7}{\tau_0 \cdot 10^7}$	η	b, l	$\bar{\delta}$
0.1	1.66016	0.766044	0.000212151	0.00707042
0.5	8.30079		0.000162517	
0.2	3.32031	0.707107	0.000223811	0.00067021
0.6	9.96095		0.000158258	
0.3	4.98047	0.900969	0.000644167	0.000232859
0.5	8.30079		0.000580375	
0.8	13.2813	0.707107	0.000895242	0.000167552
0.9	14.9414		0.000633032	

На рис. 4, 5 показаны графики скачка касательного перемещения $u_1(x,0) \cdot 10^8 \text{ м}$ на промежутке $[-b,b]$ и касательного напряжения $(\sigma_{xy}(x,0) - \tau_0) \cdot 10^{-7} \text{ Па}$ на промежутке $[b,b+d]$ при $\tau_s^{low} / \tau_s^{up} = 0.2, 0.8$, $\tau_0 / \tau_s^{up} = 0.6, 0.9$ (кривые I и II соответственно). Кривая III построена для однородного материала (сталь 1045) при $\tau_s^{low} / \tau_s^{up} = 0.2$, $\tau_0 / \tau_s^{up} = 0.6$. Результаты получены в предположении, что $\delta = h \gamma_C$, где h – условная толщина полосы локализации. Величина h при численных расчетах выбиралась равной среднему размеру зерна стали 1045 ($h = 10^{-5} \text{ м}$).

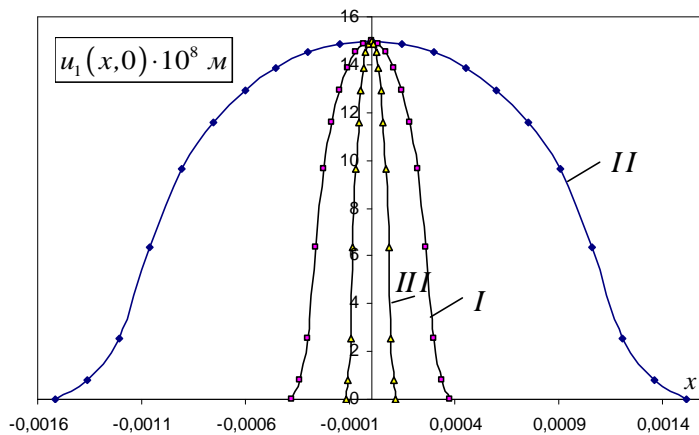


Рис. 4. Раскрытие трещины на промежутке $[-b,b]$

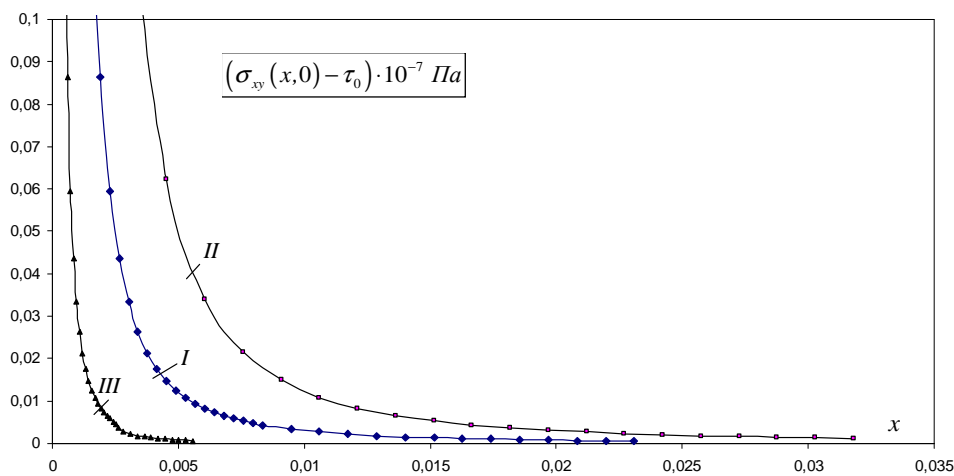


Рис. 5. Касательное напряжение $(\sigma_{xy}(x,0) - \tau_0) \cdot 10^{-7} \text{ Па}$ на $[b,b+d]$

Рис. 6 ілюструє залежність безрозмірного скачка перемещень $\bar{\delta} = (\bar{\delta}(1+\gamma)g) / \tau_s^{up}$ від параметра $\beta = \tau_0 / \tau_s^{up}$ при різних значеннях $\alpha = \tau_s^{low} / \tau_s^{up}$.

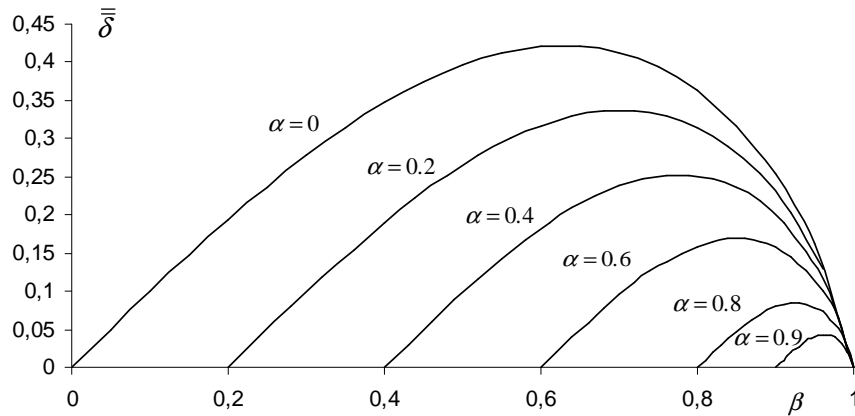


Рис. 6. Залежність безрозмірного скачка перемещень $\bar{\delta}$ від параметра β

Для кожного значення α можна знайти максимальне значення $\bar{\delta}(\beta)$, причому воно буде єдиним по β (табл. 2).

Таблиця 2

α	β	$\bar{\delta}$
0	0.627398	0.421916
0.1	0.664658	0.379724
0.2	0.701919	0.337533
0.3	0.739179	0.295341
0.4	0.776439	0.253150
0.5	0.813699	0.210958
0.6	0.850959	0.168766
0.7	0.888219	0.126575
0.8	0.92548	0.084383
0.9	0.96274	0.0421916

Висновки. Розглянуто кусочно-однорідний матеріал з адгезійною прослойкою, діаграма деформування якої має пік-«зуб». Показано можливість існування нетривіальних рівноважних станів, пов'язаних з появою в такій прослойці смуги локалізації пластических деформацій. Для різних зовнішніх навантажень і різних механічних властивостей прослойки знайдено довжини смуг локалізації пластических деформацій, графіки скачків касательного перемещення в цих смугах, а також касательного напруження на їх продовженні.

Библиографические ссылки

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов – М.: Наука. – 1977. – 640 с.
2. Леонов М. Я. О разрывных деформациях твердого тела / М. Я. Леонов, Н. Ю. Швайко // ПМТФ. – 1961.– №2. – С. 96 – 103.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука. – 1966. –707с.
4. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В.В. Новожилов // Прикл. матем. и механика. – 1969. – Т. 33, Вып. 2. – С. 212 – 222.
5. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах / В. В. Новожилов // Прикл. матем. и механика. – 1969. – Т. 33, Вып. 5. – С. 797 – 812.
6. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк – К.: Наук. думка. – 1968. – 248 с.
7. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов / Р. Хоникомб – М.: Мир. – 1972. – 408 с.
8. Черняков Ю. А. Локализация пластической деформации в форме ограниченной полосы разрыва перемещений / Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко // Доповіди НАН України. – 2013. – №11. – С. 61 – 66.
9. Herrmann K.P. Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, I. V. Kharun // TAFM. – 2004. – Vol. 42, Issue 3. – P. 335 – 348.
10. Zhang J. Luders Bands Propagation of 1045 Steel under Multiaxial Stress State / J. Zhang, Y. Jiang // International Journal of Plasticity. – 2005. –Vol. 21. – P. 651 – 670.

Надійшла до редколегії 03.05.2014

UDC 622.5: 628.35

Biliaiev M.M., Kozachyna V.A.

Dnepropetrovsk National University of Railway Engineering

CFD MODELLING OF THE WATER TREATMENT IN THE HORIZONTAL SETTLER

Метою даної роботи є розробка ефективної CFD моделі, яка може бути використана для розрахунку ефективності роботи горизонтального відстійника з урахуванням його геометричної форми, конструктивних аспектів та особливостей процесу осідання домішок. Для моделювання процесу очистки води в горизонтальному відстійнику використовувалось рівняння переносу завислих частинок та рівняння потенційного потоку рідини. Для розв'язку цих рівнянь використовувались неявні різницеві схеми Самарського А.А. На основі побудованої чисельної моделі було розроблено код на мові FORTRAN.

Ключові слова: чисельна модель, горизонтальний відстійник, очистка води.

Целью данной работы является разработка эффективной CFD модели, которая может быть использована для расчета эффективности работы горизонтального отстойника с учетом его геометрической формы, конструктивных аспектов и особенностей процесса осаждения примесей. Для моделирования процесса очистки воды в горизонтальном отстойнике использовалось уравнение переноса взвешенных частиц и уравнение потенциального течения жидкости. Для решения этих уравнений использовались неявные разностные схемы Самарского А.А. На основе построенной численной модели был разработан код на языке FORTRAN.

Ключевые слова: численная модель, горизонтальный отстойник, очистка воды.

© Biliaiev M.M., Kozachyna V.A., 2014