

УДК 539.3

И. Ю. Гергель, Н. С. Безносков

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПЛАСТИНКЕ**

Рассмотрена плоская задача теории упругости для пластинки с абсолютно жестким включением. Пластинка находится под действием сосредоточенной нагрузки, которая приложена во внутренних точках области. Принято, что матрица в окрестности вершин включения отслоилась от него. При помощи интегральных преобразований Фурье задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, численное решение которой получено с использованием квадратурной формулы Гаусса-Чебышева. Исследована зависимость длины зоны контакта от механических свойств материала, величины и точек приложения нагрузки.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, интегральные преобразования Фурье, квадратурная формула, коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Розглянуто плоску задачу теорії пружності для пластинки з абсолютно жорстким включенням. Пластинка знаходиться під дією зосередженого навантаження, яке прикладене у внутрішніх точках області. Будемо вважати, що матриця в околі вершин включення відшарувалась від нього. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, чисельний розв'язок якої отримано з використанням квадратурної формули Гауса-Чебишева. Досліджено залежність довжини зони контакту від механічних властивостей матеріалу, величини та точок прикладення навантаження.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, інтегральне перетворення Фур'є, квадратурна формула, коефіцієнт інтенсивності напружень (КИН).

The plane problem of elasticity theory for a plate with a rigid inclusion is analyzed. The plate is under the action of load which is applied at interior points of the area. It is believed that the matrix in the vicinity of the inclusion vertices has detached from it. With the help of Fourier integral transforms the problem is reduced to a system of singular integral equations, numerical solution of which is obtained by using quadrature formula of Gauss-Chebyshev. The research covers the dependence of the length of the contact area on the mechanical properties of the material, the size and the load application points.

Key words: singular integral equations, integral Fourier transform, quadrature formula, stress intensity factor (SIF).

Введение. Возникновение и распространение трещин, приводящих к полной потере работоспособности деталей машин и конструкций, инициируют существующие в них пустоты, включения и другие дефекты технологического и конструктивного характера. Особенно небезопасными из них являются жесткие включения, которые вызывают большую концентрацию напряжений возле своих границ. Современные конструкции элементов машин и сооружений очень часто содержат тонкие включения – прослойки малой толщины. Наличие таких включений имеет существенное влияние на распределение перемещений, деформаций и напряжений.

В данной работе рассмотрена плоская задача для бесконечной пластинки с абсолютно жестким включением нулевой толщины. Во внутренних точках пластинки приложена сосредоточенная нагрузка. В окрестности вершин включения начинается отслоение матрицы.

С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши. Найдено численное решение полученной системы с использованием квадратурной формулы Гаусса-

Чебышева. Также была проанализирована зависимость длины зоны контакта от механических свойств материала, величины и точек приложения нагрузки. Вычислено значение параметра K , который является комбинацией коэффициентов интенсивности напряжений K_1 та K_2

Физическая постановка задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку с абсолютно жестким включением нулевой толщины (рис.1).

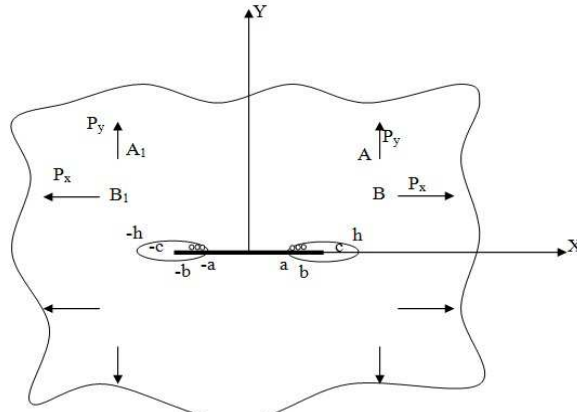


Рис.1

Рис.1. Бесконечная пластинка с жестким включением

Для пластинки заданы модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν и известна длина включения $2c$.

Введем прямоугольную декартовую систему координат XOY , как показано на рис.1. В некоторых точках пластинки действуют сосредоточенные силы P_x, P_y , которые расположены симметрично относительно координатных осей X та Y .

Допустим, что в окрестности точек $\pm c$ матрица отслаивается от включения. Тогда на $[-a, a]$ сохраняется сцепление, на $|x| > h$ – целостность матрицы, на $c \leq |x| \leq h$ – разрыв, на $b \leq |x| \leq c$ – происходит отслоение.

Введем зону проскальзывания $a \leq |x| \leq b$.

С учетом симметрии рассмотрим верхнюю полуплоскость $Y > 0$. Тогда в точках $A(\xi_1, \eta_1)$ и $A_1(-\xi_1, \eta_1)$ верхней полуплоскости в направлении оси Y действуют равные по величине сосредоточенные силы P_y , а в точках $B(\xi_2, \eta_2)$ и $B_1(-\xi_2, \eta_2)$ – равные по величине, но противоположно направленные сосредоточенные силы P_x .

Математическая постановка задачи. НДС полуплоскости в условиях плоской деформации опишется системой дифференциальных уравнений Ламе:

$$\begin{cases} (\lambda^* + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u = -\delta(x - \xi_2) \delta(y - \eta_2) P_x \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 v = -\delta(x - \xi_1) \delta(y - \eta_1) P_y, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа;}$$

$\delta(x - \xi)$, $\delta(y - \eta)$ – дельта-функции;

$$\lambda = \frac{2\nu E}{1 + \nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ – коэффициенты Ламе;}$$

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Применяя к уравнениям (1) интегральные преобразования Фурье по координатам x и y и учитывая симметрию относительно оси Y , находим сначала решение неоднородной системы (1) при следующих граничных условиях:

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (|x| < \infty).$$

Решение имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, y) = & \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[P_y \left(\frac{(x + \xi_1)(y - \eta_1)}{(x + \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} + \frac{(x - \xi_1)(y - \eta_1)}{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(x + \xi_1)(y + \eta_1)}{(x + \xi_1)^2 + (y + \eta_1)^2} - \frac{(x - \xi_1)(y + \eta_1)}{(x - \xi_1)^2 + (y + \eta_1)^2} \right) - \frac{\lambda + 3\mu}{2} P_x \times \right. \\ & \left. \times \ln \left[\frac{(y - \eta_2)^2 + (x - \xi_2)^2}{(y - \eta_2)^2 + (x + \xi_2)^2} \cdot \frac{(y + \eta_2)^2 + (x - \xi_2)^2}{(y + \eta_2)^2 + (x + \xi_2)^2} \right] + (\lambda + \mu) P_x \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{(x - \xi_2)^2}{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} + \frac{(x - \xi_2)^2}{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(x + \xi_2)^2}{(x + \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} - \frac{(x + \xi_2)^2}{(x + \xi_2)^2 + (y + \eta_2)^2} \right) \right], \\ v^{(0)}(x, y) = & \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[(\lambda + \nu) P_x \left(\frac{(x - \xi_2)(y - \eta_2)}{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} + \frac{(x - \xi_2)(y + \eta_2)}{(x - \xi_2)^2 + (y + \eta_2)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(x + \xi_2)(y - \eta_2)}{(x + \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} - \frac{(x + \xi_2)(y + \eta_2)}{(x + \xi_2)^2 + (y + \eta_2)^2} \right) - \frac{\lambda + 3\mu}{2} P_y \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \ln \left[\frac{(y-\eta_1)^2 + (x+\xi_1)^2}{(y+\eta_1)^2 + (x+\xi_1)^2} \cdot \frac{(y-\eta_1)^2 + (x-\xi_1)^2}{(y+\eta_1)^2 + (x-\xi_1)^2} \right] + (\lambda + \mu) P_y \times$$

$$\times \left(\frac{(x+\xi_1)^2}{(x+\xi_1)^2 + (y+\eta_1)^2} + \frac{(x-\xi_1)^2}{(x-\xi_1)^2 + (y+\eta_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(x+\xi_1)^2}{(x+\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} - \frac{(x-\xi_1)^2}{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} \right). \quad (2)$$

Решение однородной системы уравнений (1), когда

$$\tau_{xy}(x,0) = g_1(x), \quad v(x,0) = G(x), \quad (|x| < \infty), \quad (3)$$

найдем в виде [1]

$$u^{(1)}(x, y) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \left[(3-4\nu)M(x, y, t) + 2y^2 F(x, y, t) \right] dt -$$

$$- \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \left[(1-2\nu)M(x, y, t) + 2y^2 F(x, y, t) \right] dt,$$

$$v^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) y Q(x, y, t) dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \left[(2-2\nu)L(x, y, t) + y Q(x, y, t) \right] dt, \quad (4)$$

где

$$g_2(t) = G'(t), \quad M(x, y, t) = \ln[y^2 + (x-t)^2],$$

$$F(x, y, t) = \frac{1}{y^2 + (x-t)^2},$$

$$Q(x, y, t) = \arctg \frac{x+t}{y}, \quad L(x, y, t) = \frac{1}{y^2 + (x+t)^2}.$$

Функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ пока неизвестны.

Общее решение задачи (1), (3) по принципу суперпозиции является сумой решений (2) и (4), т.е.

$$u(x, y) = u^{(0)}(x, y) + u^{(1)}(x, y),$$

$$v(x, y) = v^{(0)}(x, y) + v^{(1)}(x, y). \quad (5)$$

На основании уравнений (2), (4) и (5), учитывая, что

$$\varepsilon_x(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial x},$$

$$\sigma_y(x,0) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} \right],$$

получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,0) &= \gamma_{11} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(t)}{x-t} dt + \gamma_{12} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2(t)}{x-t} dt + \varepsilon_x^{(0)}(x,0), \\ \sigma_y(x,0) &= \gamma_{21} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(t)}{x-t} dt + \gamma_{22} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2(t)}{x-t} dt + \sigma_y^{(0)}(x,0), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{3-4\nu}{4\pi\mu(1-\nu)}, \quad \gamma_{12} = -\frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}, \\ \gamma_{21} &= -\frac{E(1-2\nu)}{4\pi\mu(1-\nu^2)}, \quad \gamma_{22} = -\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)}. \end{aligned}$$

На линии $y=0$ для рассматриваемой модели имеем такие граничные условия:

$$u(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad |x| \leq a; \quad (7)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad a \leq |x| \leq b; \quad (8)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0, \quad \sigma_y(x,0)=0, \quad b \leq |x| \leq h; \quad (9)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad |x| > h. \quad (10)$$

Построение системы сингулярных интегральных уравнений. Согласно граничным условиям (7) – (10) $g_1(x)=0$ для $|x| > a$, $g_2(x)=G'(x)=0$ для $|x| < b$ и $|x| > h$.

Удовлетворяя условию $\varepsilon_x(x,0)=0$, когда $|x| \leq a$, и второму из условий (9) и учитывая четность функции $g_2(t)$, приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\gamma_{11} \int_{-a}^a \frac{g_1(t)}{x-t} dt + \gamma_{12} \int_b^h \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right) g_2(t) dt + \varepsilon_x^{(0)}(x,0) = 0, \quad |x| \leq a, \quad (11)$$

$$\gamma_{21} \int_{-a}^a \frac{g_1(t)}{x-t} dt + \gamma_{22} \int_b^h \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right) g_2(t) dt + \sigma_x^{(0)}(x,0) = 0, \quad b \leq |x| \leq h.$$

На основании общего решения задачи (5), из условий однозначности перемещений при обходе контура, получим дополнительные условия для системы (11):

$$\begin{cases} \gamma_{11} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{b-t}{b+t} \right| g_1(t) dt + 2\gamma_{12} \int_b^h \left| \frac{b-t}{b+t} \right| g_2(t) dt + 2u^{(0)}(b,0) = 0 \\ \int_{-a}^a g_1(t) dt = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Учитывая поведение неизвестных функций, представим $g_1(t)$ и $g_2(t)$ в виде

$$g_1(t) = \frac{g_1^*(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad g_2(t) = \frac{g_2^*(t)}{\sqrt{(t-b)(h-t)}}. \quad (13)$$

Введем такие коэффициенты интенсивности напряжений (КИН):

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{x \rightarrow b+0} \sqrt{2(b-x)} \sigma_y(x,0), \\ K_2 &= \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{2(a-x)} \tau_{xy}(x,0). \end{aligned} \quad (14)$$

После некоторых преобразований запишем выражения (14) относительно неизвестных функций:

$$K_1 = \sqrt{\frac{2}{h-b}} \gamma_{22} g_2^*(b), \quad K_2 = \frac{g_1^*(a)}{\sqrt{a}}. \quad (15)$$

Приведенный алгоритм справедлив для любого значения a или величины $\lambda = \frac{b-a}{b}$. Но для того чтобы получить физически вероятную картину деформации трещины, необходимо выполнить такие условия:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x,0) &\leq 0, \quad x \in (a,b), \\ \nu(x,0) &\geq 0, \quad x \in [-a,a]. \end{aligned}$$

Эти неравенства выполняются только в случае $K_1 = 0$, что служит условием для определения соответствующей величины $\lambda = \lambda_0$. Приближенное значение λ_0 с заданной относительной точностью находим итерационным методом половинного деления, на каждом i -му шаге которого решая систему (11), (12) и анализируя полученное значение $K_1^{(j)}$.

Отметим, что при $\lambda = \lambda_0$, особенно для реальных значений ν , основные неизвестные функции в окрестности вершины трещины изменяются очень быстро. Поэтому достоверное определение соответствующих КИН требует решения системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка.

Как раньше было показано [2], значение $K = \sqrt{\varpi K_1^2 + K_2^2}$, где $\varpi = \frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu}$, инвариантно по отношению к зоне проскальзывания, если его брать в границах $\frac{b-a}{h-a} = 10^{-2}$.

Эта величина является важной для исследования трещины, потому что квадрату этой величины пропорциональна величина освобождаемой энергии

$$G = (1-\nu^2) \frac{K^2}{E}.$$

Численное решение задачи. Для численного решения системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши используем квадратурную формулу Гаусса-Чебышева, которая справедлива в точках, совпадающих с нулями многочлена Чебышева 2-го рода:

$$\int_{-1}^1 \frac{g^*(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{z-\tau} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{g(\tau_k)}{z_m - \tau_k}, \quad (16)$$

где

$$\tau_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

$$z_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad m=1, 2, \dots, n-1.$$

Для использования формулы (17) сделаем следующие замены переменных:
в первом интеграле первого уравнения $x = az, t = a\tau,$

во втором интеграле первого уравнения $x = az, t = \frac{h+b}{2} + \frac{h-b}{2} \tau,$

в первом интеграле второго уравнения $x = \frac{h+b}{2} + \frac{h-b}{2} z, t = a\tau,$

во втором интеграле второго уравнения $x = \frac{h+b}{2} + \frac{h-b}{2} z, t = \frac{h+b}{2} + \frac{h-b}{2} \tau.$

Тогда систему сингулярных интегральных уравнений (11) с дополнительными условиями (12) после замены переменных и применения квадратурной формулы (16) можно преобразовать в систему $2n$ линейных уравнений относительно $2n$ значений неизвестных функций $g_1^*(a\tau)$ и $g_2^*\left(\frac{h+b}{2} + \frac{h-b}{2} \tau\right).$

Результаты получены при следующих исходных данных: $n = 20, \nu = 0.02, E = 10^6, b = 1, h = 4.$

При разных значениях ξ и η были получены такие результаты:

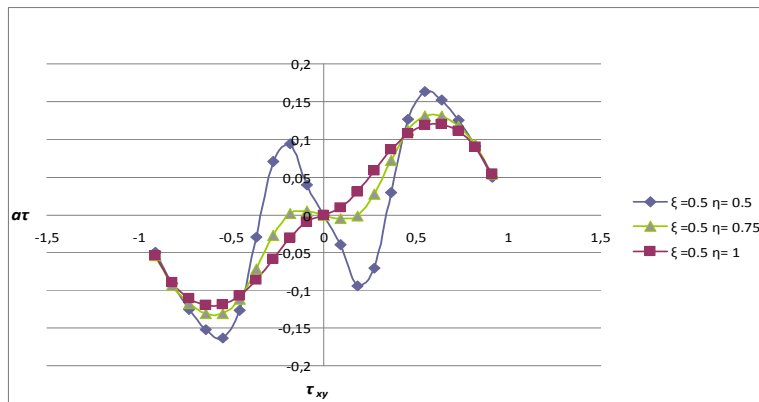


Рис. 2. График зависимости касательных напряжений от точек приложения сил

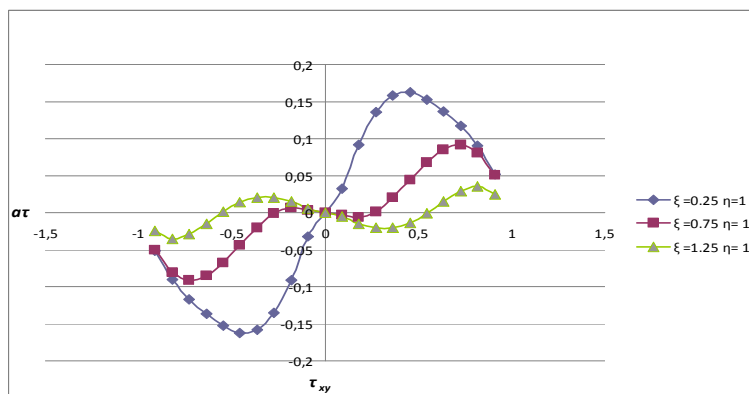


Рис. 3. График зависимости касательных напряжений от точек приложения сил