

При следующих заданных параметрах:  $E=10^6$ ,  $\frac{h}{b}=4$ ,  $\nu=0.02$ ,  $\xi=0$ ,  $\eta=0.5$ ,  $P_x=0$ , была получена зависимость параметра  $K$  от силы  $P_y$ . Эта зависимость представлена в табл. 1.

Таблица 1

$P_y$	$K$
1	0,036
2	0,072
3	0,108

При параметрах  $E=10^6$ ,  $\frac{h}{b}=4$ ,  $\nu=0.3$ ,  $P_x=0$ ,  $P_y=1$  в табл. 2 приведена зависимость параметра  $K$  от координат  $\xi$  и  $\eta$  точек приложения сил.

Таблица 2

$\xi$	$\eta$	$K$
0,5	0,5	0,042
0,5	0,75	0,048
0,5	1	0,052

### Библиографические ссылки

1. **Говоруха В. Б.** Про контакт берегів міжфазної тріщини в полі зосереджених масових сил / В. Б. Говоруха, В. В. Лобода // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1995. – №2. – С. 35 – 42.
2. **Лобода В. В.** О межфазной трещине с учетом контактов её берегов / В.В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Д., 1991. – С.78 – 86.
3. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1968. – 511 с.
4. **Трантер К. Дж.** Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М., 1956. – 204 с.

Надійшла до редколегії 03.05.2014

УДК 539.3

**А. Ю. Годес**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## МЕЖФАЗНАЯ ДУГОВАЯ ТРЕЩИНА С НАГРУЖЕННЫМИ БЕРЕГАМИ

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред под действием усилий, приложенных к берегам трещины и на бесконечности. Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое решено приближенно путем разложения в ряд по полиномам Якоби. Получены выражения, определяющие напряжения на

границе раздела сред, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений.

**Ключевые слова:** круговое включение, дуговая трещина, сингулярное интегральное уравнение.

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану пружної площини з круговим включенням та дуговою тріщиною на межі поділу середовищ під дією зусиль, прикладених до берегів тріщини і на нескінченності. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язано наближено шляхом розвинути в ряд за поліномами Якобі. Отримано вирази, що визначають напруження на межі поділу середовищ, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Ключові слова:** кругове включення, дугова тріщина, сингулярне інтегральне рівняння.

A problem concerning definition of stresses and displacements in the elastic plane with a circular inclusion and an arc crack at the material interface is considered under the loading applied at the crack and at infinity. The problem is reduced to the singular integral Fredholm equation of the second kind which is solved by series expansion in Jacobi polynomials. The expressions for stresses at the interface, crack opening and the stress intensity factors are found.

**Key words:** circular inclusion, arc crack, singular integral equation.

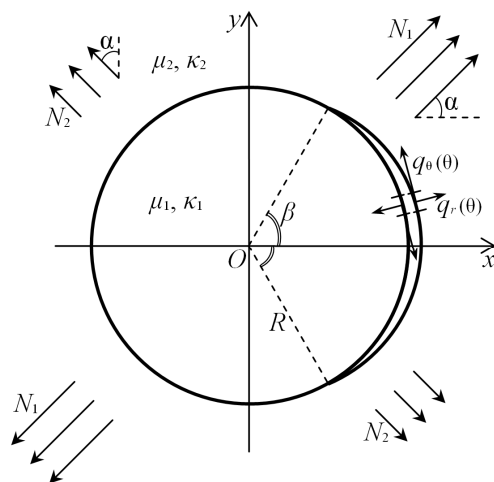
**Введение.** Задача об отделении круговой упругой заклепки от окружающей ее матрицы привлекала внимание исследователей с 40-х гг. XX века. Как отмечает А. Н. England [3], эта задача в случае нагрузки на бесконечности была сведена к единственному интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля, которое аналитически интегрировалось только для случая, когда матрица и заклепка состояли из одинакового материала.

Н. И. Мухелишвили [7] при рассмотрении случая, когда матрица и включение имеют одинаковые упругие свойства и нагрузка приложена на бесконечности, методом потенциалов Колосова–Мухелишвили свел задачу к решению задачи Гильберта на трещине для кусочно-аналитической функции. А. Н. England [3] воспользовался аналогичным методом для случая, когда включение и матрица состоят из разных материалов, а на берега трещины действует постоянное давление. В [5] и [6] этим же способом определено напряженно-деформированное состояние межфазной дуговой трещины для нагрузки, действующей на бесконечности.

В настоящей статье рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния плоскости с круговым упругим включением из другого материала и дугообразной трещиной на границе раздела сред в случае равных противоположно направленных усилий произвольного вида, приложенных к берегам трещины, и усилий, приложенных на бесконечности. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и дополнительному условию однозначности смещений. Полученное интегральное уравнение решено приближенно путем разложения неизвестной функции в ряд по полиномам Якоби. Найдены выражения, определяющие напряжения на границе раздела сред, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины.

**Постановка задачи.** Рассматривается изотропная упругая плоскость  $r > R$ , характеризующаяся постоянными  $\mu_2$  и  $\kappa_2$ , которая содержит изотропное упругое круговое включение  $0 \leq r < R$  с упругими свойствами, определяемыми постоянными  $\mu_1$  и  $\kappa_1$ . Включение скреплено с плоскостью по всей границе, кроме дуги  $r = R$ ,  $|\theta| < \beta$ , где возникла трещина. Предполагается, что берега трещины не взаимодействуют между собой. К берегам трещины приложены равные противоположно направленные нормальные и касательные усилия  $q_r(\theta)$  и  $q_\theta(\theta)$ ,

где  $q_r(\theta)$  и  $q_\theta(\theta)$  являются ограниченными и непрерывными функциями своего аргумента на отрезке  $|\theta| \leq \beta$ . Главные напряжения на бесконечности равны  $N_1$  и  $N_2$ , причем угол между направлением  $N_1$  и осью  $Ox$  составляет  $\alpha$  (рис. 1).



**Рис. 1. Схема к постановке задачи**

Необходимо найти нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{rr}(\theta)$  и  $\sigma_{r\theta}(\theta)$  на границе раздела сред, раскрытие трещины  $\Delta(\theta)$  и коэффициенты интенсивности напряжений  $K_1^\pm$  и  $K_2^\pm$  в вершинах трещины.

В математическом плане поставленная задача сводится к граничной задаче для замкнутой системы уравнений линейной теории упругости со следующими граничными условиями:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)} \quad \text{при } r = a, \quad \beta < |\theta| \leq \pi;$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -q_r(\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = -q_\theta(\theta), \quad \sigma_{rr}^{(2)} = -q_r(\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = -q_\theta(\theta) \quad \text{при } r = a, |\theta| < \beta;$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2(\alpha - \theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2(\alpha - \theta) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

**Сингулярное интегральное уравнение, определяющее решение задачи.** Данную краевую задачу с использованием методик, предложенных в [2] и [3], можно свести к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода совместно с условием однозначности смещений:

$$iC_1\phi(\zeta)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi-\zeta}-\frac{\eta^2}{\pi}\int_{-1}^1K_1(\xi)\phi(\xi)d\xi-\frac{i\eta}{\pi}\frac{C_1+C_2}{2}\int_{-1}^1K_2(\xi)\phi(\xi)d\xi-\\-\frac{i\eta}{\pi}\frac{C_1-C_2}{2}\int_{-1}^1\overline{K_2(\xi)\phi(\xi)}d\xi=-C_3(q_r(\theta)+iq_\theta(\theta))+C_4+C_5e^{2i(\alpha-\theta)}, \quad -1<\zeta<1,(1)$$

$$\int_{-1}^1 K_3(\xi) \phi(\xi) d\xi = 0, \quad (2)$$

где  $\phi(\zeta)$  – комплекснозначная функция действительной переменной, определенная на отрезке  $|\zeta| < 1$ ,  $\zeta = \frac{1}{\eta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ ,  $\eta = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

Кроме того, при записи уравнения были введены следующие обозначения:

$$\lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}, \quad \gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi}, \quad \frac{1}{k} = 2\lambda \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1 + \kappa_2}{1 + \kappa_1} + \lambda - 1,$$

$$C_1 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad C_2 = -(1 + 2k),$$

$$C_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2(1 + \lambda)}, \quad C_4 = -(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1) \frac{\mu_1 k}{\mu_2^2} \frac{1 + \kappa_2}{1 + \kappa_1} \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad C_5 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda(1 + \kappa_2)}{(1 + \lambda)} \frac{N_1 - N_2}{2},$$

$$K_1(\xi) = \frac{\xi}{1 + \eta^2 \xi^2}, \quad K_2(\xi) = \frac{1}{1 + \eta^2 \xi^2}, \quad K_3(\xi) = \frac{1 - \eta^2 \xi^2 + 2i\eta\xi}{(1 + \eta^2 \xi^2)^2}.$$

Напряжения на границе раздела сред можно найти из следующей формулы:

$$\sigma_{rr}(\zeta) + i\sigma_{r\theta}(\zeta) = \frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi) d\xi}{\xi - \zeta} - \frac{\eta^2}{\pi} \int_{-1}^1 K_1(\xi) \phi(\xi) d\xi - \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 + C_2}{2} \int_{-1}^1 K_2(\xi) \phi(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 - C_2}{2} \int_{-1}^1 K_2(\xi) \overline{\phi(\xi)} d\xi - C_4 - C_5 e^{2i(\alpha - \theta)} \right) \quad \text{при } |\zeta| > 1. \quad (3)$$

Раскрытие трещины определяется как

$$\Delta(\zeta) = \frac{2R\eta}{\mu_1} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\theta} \int_{-1}^{\zeta} K_3(\xi) \phi(\xi) d\xi \right] \quad \text{при } |\zeta| < 1. \quad (4)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений вводятся аналогично [6]:

$$K_1^{\pm} + iK_2^{\pm} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\beta \pm 0} \left( \sqrt{\pm 2\pi R(\theta \mp \beta)} \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\beta}}{e^{i\theta} - e^{-i\beta}} \right)^{i\gamma} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})|_{z=ae^{i\theta}} \right). \quad (5)$$

**Метод приближенного решения.** Для решения сингулярного интегрального уравнения (1) совместно с условием однозначности смещений (2) воспользуемся методикой, изложенной в [4].

Сначала исследуем характер решения сингулярного интегрального уравнения. Как следует из [1], функция  $\phi(\xi)$  представляется в виде

$$\phi(\xi) = w(\xi)u(\xi), \quad (6)$$

где  $u(\xi)$  – функция, ограниченная на отрезке  $|\xi| \leq 1$  и удовлетворяющая на этом отрезке условию Гельдера, а функция  $w(\xi)$  определяется следующим выражением:

$$w(\xi) = (1 - \xi)^a (1 + \xi)^b. \quad (7)$$

Константы  $a$  и  $b$ , входящие в выражение (7), можно найти из уравнений

$$iC_1 + ctg \pi a = 0, \quad iC_1 - ctg \pi b = 0.$$

С учетом того что  $C_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$  и  $\gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi}$ , из этих уравнений следует, что

$$a = -\frac{1}{2} - i\gamma, \quad b = -\frac{1}{2} + i\gamma.$$

Для решения уравнения (1) совместно с условием (2) удобно приближенно представить функцию  $u(\xi)$  в виде ряда по полиномам Якоби  $P_k^{(a,b)}(\xi)$ :

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^n s_k P_k^{(a,b)}(\xi). \quad (8)$$

Функции  $K_1(\xi)$ ,  $K_2(\xi)$ ,  $K_3(\xi)$  на промежутке интегрирования также можно представить в виде рядов по полиномам Якоби:

$$K_1(\xi) = \sum_{k=0}^n g_k^{(1)} P_k^{(a,b)}(\xi), \quad K_2(\xi) = \sum_{k=0}^n g_k^{(2)} P_k^{(a,b)}(\xi), \quad K_3(\xi) = \sum_{k=0}^n g_k^{(3)} P_k^{(a,b)}(\xi). \quad (9)$$

Из выражений (6) – (9) и свойства ортогональности полиномов Якоби на отрезке  $|\xi| \leq 1$  следует, что

$$\int_{-1}^1 K_j(\xi) \phi(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^n g_k^{(j)} h_k s_k, \quad (10)$$

где  $h_k = \int_{-1}^1 w(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) d\xi$ .

Для вычисления сингулярного интеграла типа Коши в (1) воспользуемся интегральным представлением функции Якоби второго рода

$$Q_k^{(a,b)}(\zeta) = \frac{1}{w(\zeta)} \int_{-1}^1 \frac{w(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi, \quad (11)$$

Из выражений (6) – (8) и (11) следует, что

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi) d\xi}{\xi - \zeta} = w(\zeta) \sum_{k=0}^n s_k Q_k^{(a,b)}(\zeta). \quad (12)$$

Таким образом, с учетом формул (6), (8) и (12) сингулярное интегральное уравнение (1) и условие однозначности смещений (2) записываются следующим образом:

$$\sum_{k=0}^n \left( w(\zeta) \left( iC_1 P_k^{(a,b)}(\zeta) + \frac{1}{\pi} Q_k^{(a,b)}(\zeta) \right) - \left( \frac{\eta^2}{\pi} g_k^{(1)} + \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 + C_2}{2} g_k^{(2)} \right) h_k \right) s_k -$$

$$- \sum_{k=0}^n \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 - C_2}{2} \bar{g}_k^{(2)} \bar{h}_k \bar{s}_k = -C_3 (q_r(\theta) + iq_\theta(\theta)) + C_4 + C_5 e^{2i(\alpha-\theta)}, \quad -1 < \zeta < 1, \quad (13)$$

$$\sum_{k=0}^n g_k^{(3)} h_k s_k = 0, \quad (14)$$

где  $\theta = 2 \arctg(\eta \zeta)$ .

Для того чтобы свести уравнения (13) – (14) к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $s_k$ , необходимо выбрать  $n$  точек коллокации  $-1 < \zeta_j < 1$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Окончательно получим

$$\sum_{k=0}^n \left( w(\zeta_j) \left( iC_1 P_k^{(a,b)}(\zeta_j) + \frac{1}{\pi} Q_k^{(a,b)}(\zeta_j) \right) - \left( \frac{\eta^2}{\pi} g_k^{(1)} + \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 + C_2}{2} g_k^{(2)} \right) h_k \right) s_k -$$

$$- \sum_{k=0}^n \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 - C_2}{2} \bar{g}_k^{(2)} \bar{h}_k \bar{s}_k = -C_3 (q_r(\theta_j) + iq_\theta(\theta_j)) + C_4 + C_5 e^{2i(\alpha-\theta_j)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$\sum_{k=0}^n g_k^{(3)} h_k s_k = 0. \quad (16)$$

Фактически (15) – (16) представляют собой систему  $2n+2$  линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами относительно  $2n+2$  неизвестных действительных переменных. После разрешения этой системы неизвестная функция  $\phi(\xi)$  становится полностью определенной.

Формулу (3), определяющую напряжения на границе раздела сред, с учетом выражений (9) и (12) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{rr}(\zeta) + i\sigma_{r\theta}(\zeta) = \frac{1}{C_3} \left( \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{\pi} w(\zeta) Q_k^{(a,b)}(\zeta) - \frac{\eta^2}{\pi} g_k^{(1)} h_k - \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 + C_2}{2} g_k^{(2)} h_k \right) s_k - \right.$$

$$\left. - \frac{i\eta}{\pi} \frac{C_1 - C_2}{2} \sum_{k=0}^n \bar{g}_k^{(2)} \bar{h}_k \bar{s}_k - C_4 - C_5 e^{2i(\alpha-\theta)} \right) \quad \text{при } |\zeta| > 1. \quad (17)$$

Раскрытие трещины (4) с учетом (6) – (9) представляется как

$$\Delta(\zeta) = \frac{2R\eta}{\mu_1} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\theta} \sum_{k=0}^n s_k \int_{-1}^{\zeta} w(\xi) \sum_{j=0}^n g_j^{(3)} P_j^{(a,b)}(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) d\xi \right] \quad \text{при } |\zeta| < 1. \quad (18)$$

Для вычисления интегралов в (18) воспользуемся тем, что выражение  $\sum_{j=0}^n g_j^{(3)} P_j^{(a,b)}(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi)$  является полиномом порядка  $n+k$  и, следовательно, может быть представлено как

$$\sum_{j=0}^n g_j^{(3)} P_j^{(a,b)}(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) = \sum_{j=0}^{n+k} G_{kj} P_j^{(a,b)}(\xi). \quad (19)$$

С учетом выражения (19) формула для раскрытия (18) приобретает следующий вид:

$$\Delta(\zeta) = \frac{2R\eta}{\mu_1} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\theta} \sum_{k=0}^n s_k \sum_{j=0}^{n+k} G_{kj} \int_{-1}^{\zeta} w(\xi) P_j^{(a,b)}(\xi) d\xi \right] \quad \text{при } |\zeta| < 1. \quad (20)$$

Из выражений (2), (4) и (18) легко убедиться, что условие однозначности смещений может быть выражено в следующей форме:

$$\sum_{k=0}^n s_k \sum_{j=0}^{n+k} G_{kj} \int_{-1}^1 w(\xi) P_j^{(a,b)}(\xi) d\xi = 0. \quad (21)$$

Из формулы (21) и свойства ортогональности полиномов Якоби на отрезке  $|\xi| \leq 1$  следует, что

$$\sum_{k=0}^n s_k G_{k0} = 0$$

и выражение (20) принимает вид

$$\Delta(\zeta) = \frac{2R\eta}{\mu_1} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\theta} \sum_{k=0}^n s_k \sum_{j=1}^{n+k} G_{kj} \int_{-1}^{\zeta} w(\xi) P_j^{(a,b)}(\xi) d\xi \right] \quad \text{при } |\zeta| < 1.$$

Из формул для интегралов, содержащих ортогональные многочлены, приведенных в [10], следует, что

$$\int_{-1}^{\zeta} w(\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) d\xi = -\frac{1}{2k} (1 - \zeta^2) w(\zeta) P_{k-1}^{(a+1,b+1)}(\zeta).$$

Окончательно выражение для раскрытия трещины принимает вид

$$\Delta(\zeta) = -\frac{R\eta}{\mu_1} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\theta} (1 - \zeta^2) w(\zeta) \sum_{k=0}^n s_k \sum_{j=1}^{n+k} \frac{G_{kj}}{j} P_{j-1}^{(a+1,b+1)}(\zeta) \right] \quad \text{при } |\zeta| < 1. \quad (22)$$

Из формул (3) и (5) следует, что коэффициенты интенсивности напряжений можно выразить как

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \lim_{\theta \rightarrow \pm\beta \pm 0} \left( \frac{1}{\pi C_3} \sqrt{\pm 2\pi R(\theta \mp \beta)} \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\beta}}{e^{i\theta} - e^{-i\beta}} \right)^{i\gamma} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi) d\xi}{\xi - \zeta} \right).$$

В [8] приведены формулы, определяющие поведение интеграла типа Коши в окрестности концов линии интегрирования. После применения этих формул и вычисления соответствующих пределов окончательно получим следующее выражение для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \mp \frac{\sqrt{\pi R \sin \beta}}{C_3 e^{\mathcal{N} \beta} \operatorname{ch} \gamma \pi} \sum_{k=0}^n s_k P_k^{(a,b)}(\pm 1). \quad (23)$$

**Особенности численной реализации.** Для вычисления полиномов Якоби удобно использовать рекуррентное соотношение, приведенное в [10]:

$$P_0^{(a,b)}(\xi) = 1, \quad P_1^{(a,b)}(\xi) = \frac{1}{2}(a - b + (a + b + 2)\xi),$$

$$c_{1k} P_{k+1}^{(a,b)}(\xi) = (c_{2k} + c_{3k}\xi) P_k^{(a,b)}(\xi) - c_{4k} P_{k-1}^{(a,b)}(\xi), \quad k \geq 1,$$

$$c_{1k} = 2(k+1)(k+a+b+1)(2k+a+b), \quad c_{2k} = (2k+a+b+1)(a^2 - b^2),$$

$$c_{3k} = (2k+a+b)(2k+a+b+1)(2k+a+b+2), \quad c_{4k} = 2(k+a)(k+b)(2k+a+b+2).$$

Поскольку в данной задаче  $a+b+1=0$ , вычисление  $h_k$  нельзя осуществлять напрямую по стандартным формулам, приведенным в [10]. После раскрытия неопределенности получаем следующие выражения:

$$h_0 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \gamma \pi}, \quad h_1 = \frac{1}{2} h_0 (a+1)(b+1), \quad h_k = h_{k-1} \frac{(k+a)(k+b)}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

Для вычисления функции Якоби второго рода можно использовать ее выражения через гипергеометрическую функцию  $F(p_1, p_2, p_3, t)$  из [4] и [9]:

$$Q_k^{(a,b)}(\zeta) = -\frac{\pi P_k^{(a,b)}(\zeta)}{\operatorname{tg} \pi b} + \frac{(-1)^k 2^{a+b}}{w(\zeta)} \frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(k+a+b+1)} F\left(k+1, -k-a-b, 1-b, \frac{1+\zeta}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\pi P_k^{(a,b)}(\zeta)}{\operatorname{tg} \pi a} - \frac{2^{a+b}}{w(\zeta)} \frac{\Gamma(k+b+1)\Gamma(a)}{\Gamma(k+a+b+1)} F\left(k+1, -k-a-b, 1-a, \frac{1-\zeta}{2}\right), \quad |\zeta| < 1;$$

$$Q_k^{(a,b)}(\zeta) = -\frac{2^{k+a+b+1}}{w(\zeta)(1+\zeta)^{k+1}} \frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(2k+a+b+2)} \times$$

$$\times F\left(k+1, k+b+1, 2k+a+b+2, \frac{2}{1+\zeta}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{k+a+b+1}}{w(\zeta)(1-\zeta)^{k+1}} \frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(2k+a+b+2)} F\left(k+1, k+a+1, 2k+a+b+2, \frac{2}{1-\zeta}\right), \quad |\zeta| > 1.$$

Гипергеометрическая функция  $F(p_1, p_2, p_3, t)$  в своем круге сходимости  $|t| < 1$  вычисляется следующим образом [10]:

$$F(p_1, p_2, p_3, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p_1)_k (p_2)_k}{(p_3)_k} \frac{t^k}{k!}.$$

В случае, когда необходимо вычислить гипергеометрическую функцию вне ее круга сходимости, следует воспользоваться приведенными в [10] формулами линейного преобразования, позволяющими свести вычисление гипергеометрической функции в любой точке к ее вычислению в пределах круга сходимости.

Разложение регулярного ядра  $K_1(\xi) = \sum_{k=0}^n g_k^{(1)} P_k^{(a,b)}(\xi)$  можно получить из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^n g_k^{(1)} P_k^{(a,b)}(\xi_j) = K_1(\xi_j), \quad -1 < \xi_j < 1, \quad j = \overline{0, n}.$$

Аналогичные формулы справедливы для ядер  $K_2(\xi)$  и  $K_3(\xi)$ .

Следует отметить, что для получения устойчивых результатов функции  $q_r(\theta)$  и  $q_\theta(\theta)$  должны быть в достаточной степени гладкими.

**Результаты численного моделирования.** Тестирование алгоритма проводилось на случаях нагружения, рассмотренных в [3; 5–7], для которых существует замкнутое аналитическое решение. Сравнение результатов расчетов по формулам (17), (22), (23) с точными аналитическими решениями показало, что изложенный в работе алгоритм дает достаточную степень точности расчетов для указанного класса задач.

Далее приведены результаты расчетов для одного из случаев приложения нагрузки, когда найти точное аналитическое решение не представляется возможным. Напряжения на бесконечности и касательная нагрузка на трещине отсутствуют, а нормальная нагрузка, приложенная к берегам трещины, задана кусочной функцией, которая является в достаточной степени гладкой (см. рис. 2):

$$N_1 = N_2 = 0, \quad q_\theta(\theta) \equiv 0, \quad q_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{5} q_0, & \theta \leq 0, \\ \frac{1}{5} q_0 + \frac{4}{5} q_0 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^8, & \theta > 0. \end{cases}.$$

Все расчеты проведены для упругих постоянных  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,8$  (соответствующих коэффициенту Пуассона  $\nu = 0,3$  в случае плоского деформированного состояния) и угла полураствора трещины  $\beta = 60^\circ$ .

На рис. 3 представленны графики раскрытия трещины для соотношений модулей упругости материалов  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$  и  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ . Как легко заметить, изменение соотношения модулей упругости материалов существенно влияет на величину раскрытия трещины, но практически не меняет результат качественно.

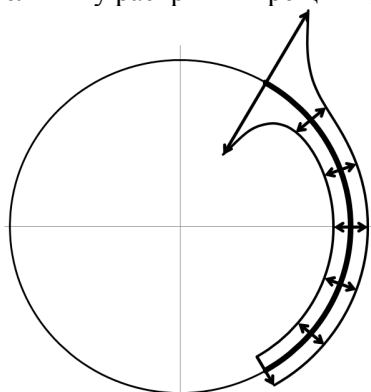


Рис. 2. Нагрузка на трещине

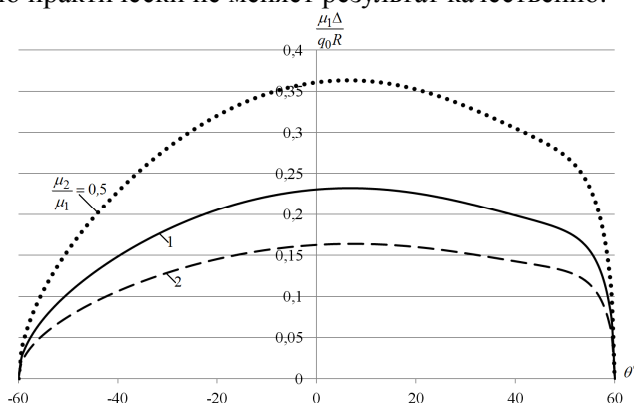


Рис. 3. Раскрытие трещины

На рис. 4, 5 представлены нормальные и касательные напряжения на границе раздела сред (при  $r = a$ ,  $\beta < |\theta| \leq \pi$ ) для соотношений модуля сдвига материалов  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{10}$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$  и  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$ . Коэффициенты интенсивности напряжений для этих случаев представлены в табл. 1. Очевидно, что соотношение модулей упругости материалов оказывает достаточно существенное влияние на величину нормальных напряжений и коэффициенты интенсивности  $K_1^+$ ,  $K_1^-$  и  $K_2^+$  и в меньшей степени влияет на величину касательных напряжений и значение  $K_2^-$ .

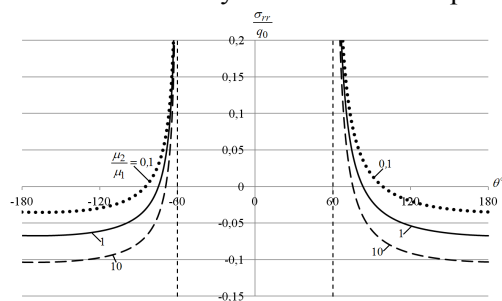


Рис. 4. Нормальные напряжения на границе раздела сред

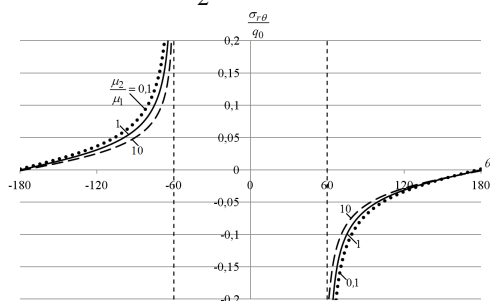


Рис. 5. Касательные напряжения на границе раздела сред

Таблица 1

Коэффициенты интенсивности напряжений

$\mu_2 / \mu_1$	$K_1^+$	$K_2^+$	$K_1^-$	$K_2^-$
1/10	0,7046	0,0158	0,2872	0,1370
1	0,6120	-0,1451	0,2156	0,1451
10	0,4888	-0,2639	0,1481	0,1350

**Заключение.** Описанная в настоящей работе методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред в случае нагрузок, приложенных к берегам трещины и на бесконечности. Сингулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, особенность решения которого, как правило, является комплексной, решено путем разложения неизвестной функции в ряд по полиномам Якоби. Найдены напряжения на границе раздела сред, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в ее вершинах.

### Библиографические ссылки

1. **Andreev A. V.** Method for Determining Power-Type Complex Singularities in Solutions of Singular Integral Equations with Generalized Kernels and Complex Conjugate Unknowns / A. V. Andreev // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 691–704.
2. **Chao R.** The Fiber-Matrix Interface Crack / R. Chao , N. Laws // *Journal of Applied Mechanics*. – 1997. – Vol. 64, issue 4. – P. 992 – 999.
3. **England A. H.** An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion // *Journal of Applied Mechanics*. – 1996. – Vol. 33, issue 3. – P. 637 – 640.
4. **Андреев А. В.** Метод численного решения полных сингулярных интегральных уравнений с комплексными особенностями степенного типа / А. В. Андреев // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2006. – № 1. – С. 99–114.
5. **Годес А. Ю.** Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с дуговой трещиной между круговым включением и матрицей / **А. Ю. Годес , В. В. Лобода** // *Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка*. – 2013. – Вип. 17, Т.1. – С. 3–10.
6. **Годес А. Ю.** Аналитический анализ дуговой трещины на границе раздела сред / А. Ю. Годес // *Тези доповідей Міжнародного форуму студентів, аспірантів і молодих учених*. – Д., ДНУ, 2013. – С. 278–280.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили . – М., Наука, 1949. – 635 с.
8. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили . – М., Наука, 1962. – 600 с.
9. **Никифоров А. Ф.** Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров , В. Б. Уваров. – М., Наука, 1984. – 342 с.
10. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М., Наука, 1979. – 832 с.

*Надійшла до редколегії 16.05.2014*

УДК 539.3

**Ю. Я. Годес,\* И. Б. Кочеткова,\*\* О. Д. Оноприенко\***

*\*Днепропетровский национальный университет имени О. Гончара*

*\*\*Национальная металлургическая академия Украины*

## О ДЕФОРМИРОВАНИИ МНОГОСЛОЙНОГО КОЛЬЦА С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ОДНОРОДНЫМИ И НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

Рассмотрена задача о плоской осесимметричной деформации многослойного кольца, содержащего слои, модуль сдвига которых непрерывно изменяется в радиальном направлении.

© Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Оноприенко О. Д., 2014