

**Заключение.** Описанная в настоящей работе методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред в случае нагрузок, приложенных к берегам трещины и на бесконечности. Сингулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, особенность решения которого, как правило, является комплексной, решено путем разложения неизвестной функции в ряд по полиномам Якоби. Найдены напряжения на границе раздела сред, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в ее вершинах.

### Библиографические ссылки

1. **Andreev A. V.** Method for Determining Power-Type Complex Singularities in Solutions of Singular Integral Equations with Generalized Kernels and Complex Conjugate Unknowns / A. V. Andreev // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 691–704.
2. **Chao R.** The Fiber-Matrix Interface Crack / R. Chao , N. Laws // *Journal of Applied Mechanics*. – 1997. – Vol. 64, issue 4. – P. 992 – 999.
3. **England A. H.** An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion // *Journal of Applied Mechanics*. – 1996. – Vol. 33, issue 3. – P. 637 – 640.
4. **Андреев А. В.** Метод численного решения полных сингулярных интегральных уравнений с комплексными особенностями степенного типа / А. В. Андреев // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2006. – № 1. – С. 99–114.
5. **Годес А. Ю** Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с дуговой трещиной между круговым включением и матрицей / **А. Ю. Годес , В. В. Лобода** // *Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка*. – 2013. – Вип. 17, Т.1. – С. 3–10.
6. **Годес А. Ю.** Аналитический анализ дуговой трещины на границе раздела сред / А. Ю. Годес // *Тези доповідей Міжнародного форуму студентів, аспірантів і молодих учених*. – Д., ДНУ, 2013. – С. 278–280.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили . – М., Наука, 1949. – 635 с.
8. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения/ Н. И. Мусхелишвили . – М., Наука, 1962. – 600 с.
9. **Никифоров А. Ф.** Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров , В. Б. Уваров. – М., Наука, 1984. – 342 с.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М., Наука, 1979. – 832 с.

*Надійшла до редколегії 16.05.2014*

УДК 539.3

**Ю. Я. Годес,\* И. Б. Кочеткова,\*\* О. Д. Оноприенко\***

*\*Днепропетровский национальный университет имени О. Гончара*

*\*\*Национальная металлургическая академия Украины*

## О ДЕФОРМИРОВАНИИ МНОГОСЛОЙНОГО КОЛЬЦА С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ОДНОРОДНЫМИ И НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

Рассмотрена задача о плоской осесимметричной деформации многослойного кольца, содержащего слои, модуль сдвига которых непрерывно изменяется в радиальном направлении.

© Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Оноприенко О. Д., 2014

**Предложенный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния основан на применении коэффициентов податливости, для построения которых использованы рекуррентные соотношения.**

**Ключевые слова:** упругость, многослойное кольцо, напряженно-деформированное состояние, нормированные решения, коэффициенты податливости.

**Розглянуто задачу про плоске осесиметричне деформування багат шарового кільця, що містить шари, модуль зсуву яких неперервно змінюється у радіальному напрямі. Запропонований алгоритм ґрунтується на застосуванні коефіцієнтів податливості, для побудови яких використано рекурентні співвідношення.**

**Ключові слова:** пружність, багат шарове кільце, напружено-деформований стан, нормовані розв'язки, коефіцієнти податливості.

**Problem concerning axial symmetric plane deformation of the multilayered ring has been considered. For some layers shear modulus changes continuously at the radial direction. Algorithm for evaluation stresses and displacements based on the use of compliance coefficients is proposed. Recurrent relationships are applied to determine the compliance coefficients.**

**Key words:** elasticity, multilayered ring, stresses, strains, displacements, normalized solutions, compliance coefficients.

**Введение.** Одним из наиболее эффективных методов определения напряженно-деформированного состояния многослойных тел является метод функций податливости, получивший широкое распространение при решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований [1 – 3]. Идея этого метода заключается в построении функций (коэффициентов, операторов) податливости, которые представляют собой механические характеристики рассматриваемого многослойного тела, не зависящие от внешних воздействий на его поверхности. Функции податливости строятся при помощи специальных рекуррентных соотношений до решения граничных задач. Напряжения и перемещения во всех слоях выражаются через параметры внешних воздействий на границе многослойного тела согласно рекуррентным формулам, которые содержат функции податливости. Важным достоинством метода является отсутствие чувствительности к росту числа слоев в теле.

До недавнего времени применение метода функций податливости ограничивалось кусочно-однородными телами. В частности, использование идей этого метода для определения напряженно-деформированного состояния многослойных колец описано в работах [4, 5]. Оказалось также возможным распространение указанных идей на многослойные основания, в которых однородные слои произвольным образом чередуются с непрерывно-неоднородными [6]. В настоящей статье аппарат коэффициентов податливости применяется для решения плоской задачи теории упругости об осесимметричной деформации многослойного кольца с чередующимися однородными слоями и слоями, модуль сдвига которых непрерывно изменяется в радиальном направлении.

**Постановка задачи.** Рассматривается многослойное кольцо, состоящее из  $N$  концентрических колец конечной толщины  $R_{n-1} < R < R_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и внешней ободки  $R > R_N$ , которая считается слоем с номером  $N+1$ . Здесь  $R_n$  – внешний радиус  $n$ -го слоя,  $R\varphi z$  – цилиндрическая система координат, ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии кольца. В процессе деформирования слои не отстают друг от друга, векторы напряжения на их общей границе совпадают. Слои являются упругими, изотропными. Модуль сдвига  $G(R)$  представляет собой кусочно непрерывно дифференцируемую функцию полярного радиуса  $R$ , которая может претерпевать конечные разрывы на границах слоев. Если  $n$ -й слой однородный, то в

области этого слоя модуль сдвига постоянен:  $G(R) = G_n$  при  $R_{n-1} < R < R_n$ . Коэффициент Пуассона представляет собой кусочно постоянную функцию полярного радиуса, которая может претерпевать конечные разрывы на границах слоев:  $\nu(R) = \nu_n$  при  $R_{n-1} < R < R_n$ . Внешняя обойма является или упругой однородной с модулем сдвига  $G_{N+1}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_{N+1}$ , или недеформируемой ( $G_{N+1} = \infty$ ). К внутренней границе  $R = R_0$  кольца приложены равномерно распределенные радиальные усилия интенсивности  $q$ . Объемные силы отсутствуют.

Деформация кольца предполагается плоской осесимметричной, поэтому отличны от нуля только радиальная составляющая  $u_R$  вектора перемещения и компоненты  $\varepsilon_{RR}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  тензоров деформации и напряжений, которые являются функциями только полярного радиуса  $R$ . Система уравнений линейной теории упругости в области  $n$ -го слоя ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) в случае плоской осесимметричной деформации имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{RR}}{dR} + \frac{1}{R}(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad \sigma_{RR} = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\varepsilon_{RR} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{RR}), \quad \varepsilon_{RR} = \frac{du_R}{dR}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_R}{R}, \quad R_{n-1} < R < R_n. \quad (24)$$

Уравнения в области упругой внешней обоймы  $R > R_N$  получаются из записанных выше при  $G = G_{N+1}$ ,  $\nu = \nu_{N+1}$ .

В математическом плане задача определения напряженно-деформированного состояния многослойного кольца сводится к построению в областях всех слоев решений уравнений теории упругости, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

- 1) условия сопряжения слоев

$$\sigma_{RR}|_{R=R_n+0} = \sigma_{RR}|_{R=R_n-0}, \quad u_R|_{R=R_n+0} = u_R|_{R=R_n-0}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (25)$$

- 2) условие отсутствия перемещений на внешней границе кольца

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_R = 0, \text{ если } G_{N+1} < \infty, \quad \text{или} \quad u_R|_{R=R_N} = 0, \text{ если } G_{N+1} = \infty; \quad (26)$$

- 3) статическое граничное условие на внутренней границе кольца

$$\sigma_{RR}|_{R=R_0} = -q. \quad (27)$$

**Нормированные решения дифференциальных уравнений.** Задача решения системы уравнений (24) в области  $n$ -го слоя сводится в соответствии с известной методикой [7] к определению радиального напряжения  $\sigma_{RR}$  и связанной с радиальным перемещением функции  $s = 2G \frac{u_R}{R}$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{ds}{dR} = \left( \frac{d}{dR} \ln G - \frac{1}{(1-\nu_n)R} \right) s + \frac{1-2\nu_n}{(1-\nu_n)R} \sigma_{RR}, \quad \frac{d\sigma_{RR}}{dR} = \frac{1}{(1-\nu_n)R} s - \frac{1-2\nu_n}{(1-\nu_n)R} \sigma_{RR}. \quad (28)$$

Общее решение этой системы уравнений выражается через начальные параметры напряженно-деформированного состояния  $n$ -го слоя

$$\tau_n = \sigma_{RR} \Big|_{R=R_{n-1}+0}, \quad s_n = 2G \frac{u_R}{R} \Big|_{R=R_{n-1}+0} \quad (29)$$

следующим образом:

$$\sigma_{RR} = S_{\tau\tau}(R)\tau_n + S_{\tau s}(R)s_n, \quad s = S_{s\tau}(R)\tau_n + S_{ss}(R)s_n, \quad R_{n-1} < R < R_n, \quad (30)$$

где  $S_{\tau\tau}(R)$ ,  $S_{s\tau}(R)$  и  $S_{\tau s}(R)$ ,  $S_{ss}(R)$  – нормированные решения системы дифференциальных уравнений (28), построение которых сводится к двум задачам Коши.

При произвольной неоднородности эти задачи Коши можно решить только численно. Они допускают аналитическое решение, если модуль сдвига  $n$ -го слоя изменяется вдоль радиуса по степенному закону:

$$G(R) = G(R_{n-1}) \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\gamma_n}, \quad R_{n-1} < R < R_n, \quad (31)$$

В случае степенной неоднородности нормированные решения системы дифференциальных уравнений (28) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{\tau\tau}(R) &= \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left( \mu_n \left( 1 - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right) - (\mu_n + \alpha_n) \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} \right), \\ S_{s\tau}(R) &= \frac{\mu_n}{\beta_n} \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left( \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - 1 \right), \quad S_{\tau s}(R) = \frac{1}{\beta_n(1-\nu_n)} \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left( \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - 1 \right), \\ S_{ss}(R) &= \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left( -(\mu_n + \alpha_n) + \mu_n \left( 1 - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right) \left( \frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $\gamma_n$  – показатель неоднородности,

$$\mu_n = \frac{1-2\nu_n}{1-\nu_n}, \quad \beta_n = \sqrt{\gamma_n^2 - \frac{4\nu_n}{1-\nu_n} \gamma_n + 4}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}(\gamma_n - \beta_n) - 1. \quad (33)$$

При  $\gamma_n = 0$  формулы (32), (33) задают нормированные решения в случае однородного слоя (задача Ламе).

Для приближенного определения нормированных решений системы дифференциальных уравнений (28) в областях неоднородных слоев использовался метод Рунге-Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования. Многочисленные расчеты показали, что получаемые результаты с

высокой степенью точности совпадают с аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных колец и для слоя со степенной неоднородностью.

**Коэффициенты податливости.** Удовлетворяя условиям сопряжения слоев (25), в силу равенств (29), (30) приходим к рекуррентным соотношениям, связывающим начальные параметры напряженно-деформированного состояния соседних слоев:

$$\tau_{n+1} = S_{\tau\tau}(R_n - 0)\tau_n + S_{\tau s}(R_n - 0)s_n, \quad s_{n+1} = S_{s\tau}(R_n - 0)\tau_n + S_{ss}(R_n - 0)s_n, \quad (34)$$

Для удовлетворения условию отсутствия перемещений на внешней границе кольца (26) начальные параметры  $N+1$ -го слоя следует связать равенством

$$s_{N+1} = -A_{N+1}\tau_{N+1}, \quad A_{N+1} = \begin{cases} 1, & G_{N+1} < \infty, \\ 0, & G_{N+1} = \infty. \end{cases}$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями (34), приходим к выводу, что аналогичными равенствами связаны начальные параметры всех слоев:

$$s_n = -A_n\tau_n, \quad n = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (35)$$

Величины  $A_n$  представляют собой коэффициенты податливости многослойного кольца. Зная эти величины, можно связать между собой напряжения и перемещения на внутренних границах слоев. Коэффициенты податливости являются механическими характеристиками многослойного тела, так как определяются исключительно его геометрией и механическими свойствами материалов слоев и не зависят от внешней нагрузки.

Для построения коэффициентов податливости воспользуемся известными приемами метода функций податливости [1 – 3]. Подставив рекуррентные соотношения (34) в равенство (35) для слоя с номером  $n+1$ , приходим к уравнению относительно  $s_n$ . Сравнив решение этого уравнения с равенством (35), получим рекуррентные соотношения для коэффициентов податливости:

$$A_n = \frac{S_{s\tau}(R_n - 0) + \lambda_n A_{n+1} S_{\tau\tau}(R_n - 0)}{S_{ss}(R_n - 0) + \lambda_n A_{n+1} S_{\tau s}(R_n - 0)}, \quad \lambda_n = \frac{G(R_n - 0)}{G(R_n + 0)}. \quad (36)$$

Исходными для рекуррентного процесса (36) являются коэффициенты податливости внешней обоймы  $A_{N+1}$ .

**Определение напряжений и перемещений.** Статическое граничное условие (27) задает начальный параметр  $\tau_1 = -q$ . Начальные параметры для последующих слоев вычисляются при помощи рекуррентных соотношений (34) с учетом равенств (35):

$$\tau_{n+1} = (S_{\tau\tau}(R_n - 0) - A_n S_{\tau s}(R_n - 0))\tau_n. \quad (37)$$

Радиальные напряжения и перемещения можно найти согласно формулам (30) с учетом равенств (35), после чего кольцевые напряжения легко определяются из последних трех уравнений (24). Окончательные выражения компонент напряженно-деформированного состояния принимают следующий вид:

$$\sigma_{RR} = (S_{\tau\tau}(R) - A_n S_{\tau s}(R)) \tau_n, \quad 2G \frac{u_R}{R} = (S_{s\tau}(R) - A_n S_{ss}(R)) \tau_n,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{1-\nu_n} \left( \nu_n \sigma_{RR} + 2G \frac{u_R}{R} \right), \quad R_{n-1} < R < R_n. \quad (38)$$

Коеффициенты податливости  $A_n$ , которые входят в формулы (37), (38) однозначно определены рекуррентным процессом (36).

Коеффициент податливости  $A_1$  определяет эффективный модуль сдвига многослойного кольца, который представляет собой интегральную характеристику неоднородности. Эффективный модуль сдвига находится из условия совпадения перемещений на внутренних границах одинаково нагруженных неоднородного и эффективно однородного тел с идентичными геометрическими характеристиками, при этом коеффициент Пуассона эффективно однородного кольца принимается равным коеффициенту Пуассона первого слоя.

**Результаты численного моделирования.** Для иллюстрации возможностей изложенной выше методики рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния четырехслойного кольца с неоднородностью смешанного типа, помещенного во внешнюю упругую обойму. Внешние радиусы слоев

$$R_1 = 2R_0, \quad R_2 = 3R_0, \quad R_3 = 5R_0, \quad R_4 = 6R_0.$$

Коеффициенты Пуассона всех слоев и внешней обоймы одинаковы:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_5 = 0,3$ . Первый слой и внешняя обойма являются однородными с одинаковыми модулями сдвига  $G_1$ . Модули сдвига второго и четвертого слоев изменяются по линейному закону:

$$G(R) = G_1 \left( 1 - \frac{R - R_2}{2R_2} \right), \quad R_1 < R < R_2, \quad G(R) = G_1 \left( 1 + 2 \frac{R - R_3}{R_3} \right), \quad R_3 < R < R_4.$$

Модуль сдвига третьего слоя изменяется по квадратичному закону:

$$G(R) = G_3 \left( \frac{R}{R_2} \right)^2, \quad R_2 < R < R_3.$$

Изменение модуля сдвига вдоль радиуса кольца показано на рис. 6.

Рис. 7 – 9 иллюстрируют изменение напряжений и перемещений вдоль радиуса кольца при различных значениях отношения модулей сдвига  $G_3/G_1$ , значения эффективного модуля сдвига указаны на рис. 9. Как и следовало ожидать, радиальные напряжения и перемещения сохраняют непрерывность на границах слоев. Кольцевые напряжения остаются непрерывными на границе первого и второго слоев, на которой непрерывен модуль сдвига, и претерпевают разрывы на границах других слоев.

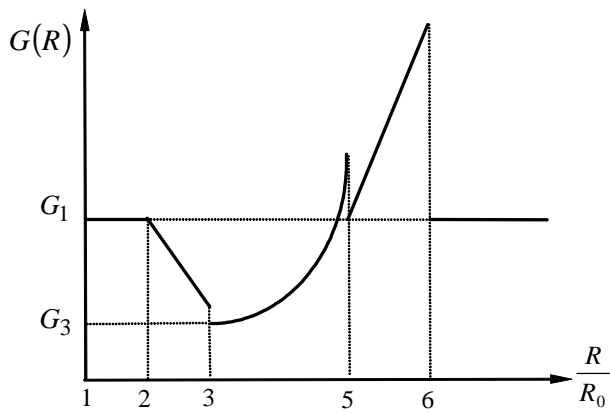


Рис. 6 Зависимость модуля сдвига  $G(R)$  от полярного радиуса  $R$

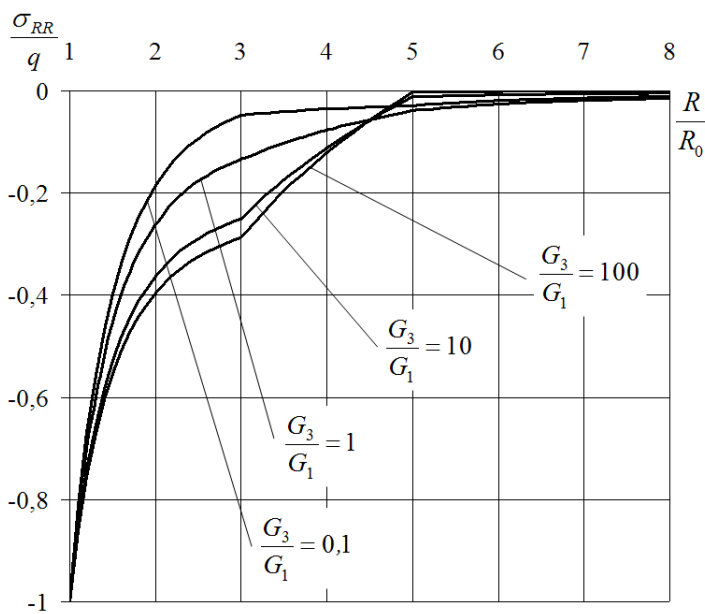
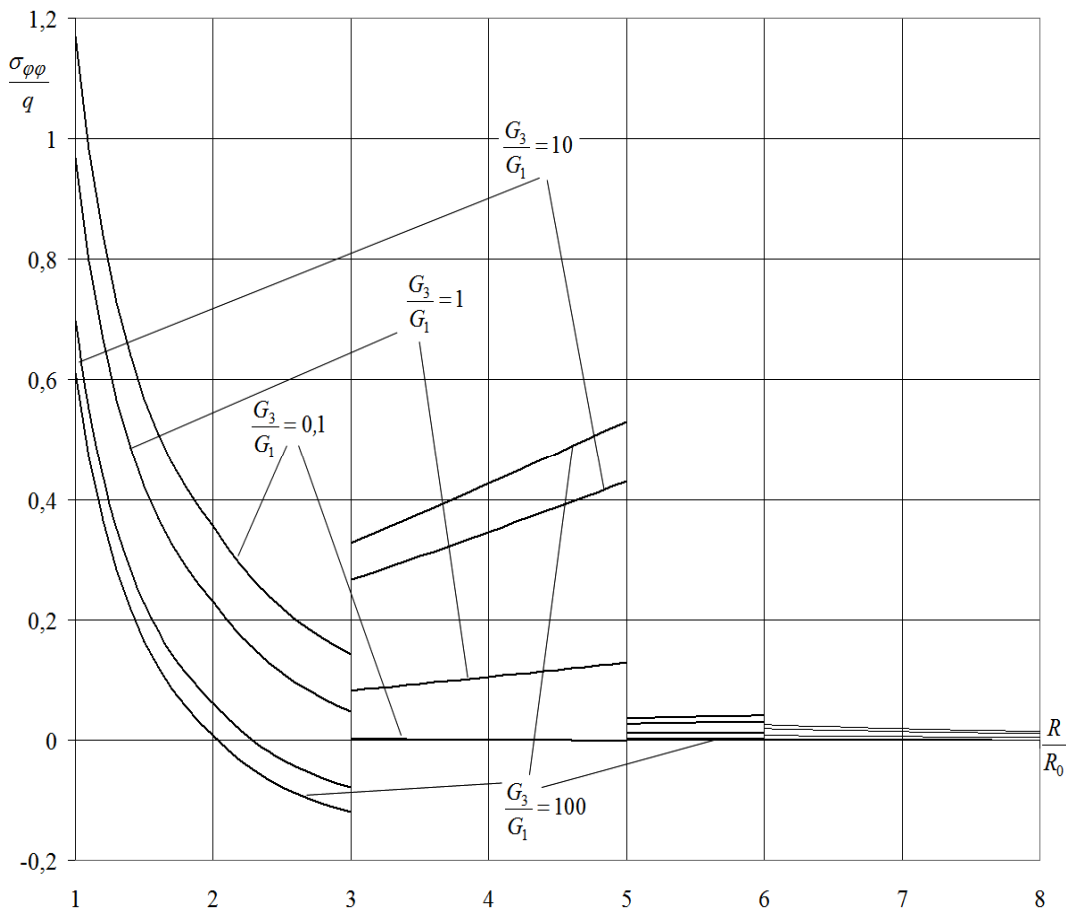


Рис. 7 Зависимость радиальных напряжений  $\sigma_{RR}$  от полярного радиуса  $R$

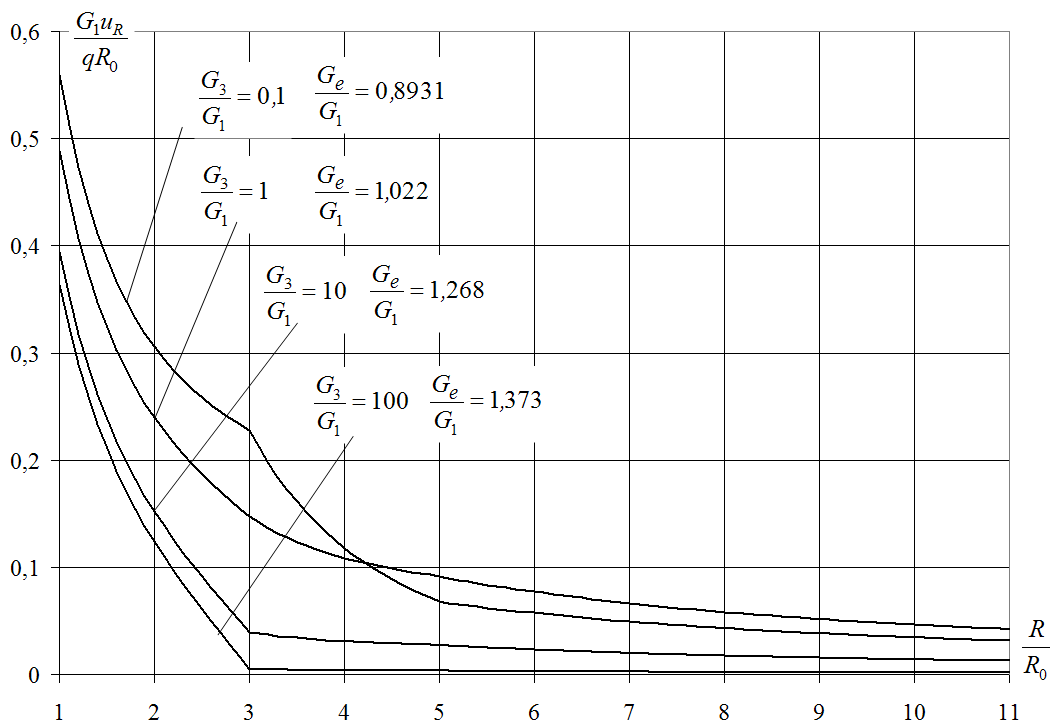
Рис. 8 Зависимость кольцевых напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  от полярного радиуса  $R$ 

**Заключение.** Предложенная в настоящей статье методика позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние многослойных колец с произвольным чередованием однородных и непрерывно-неоднородных слоев в условиях плоской осесимметричной деформации. Для ее переноса на осесимметричные задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии достаточно заменить во всех формулах  $\nu_n$  на  $\frac{\nu_n}{1 + \nu_n}$ . Эффективность и

достоверность численного определения напряжений и перемещений подтверждена сравнением с аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных колец и колец со степенной неоднородностью.

Практически без изменений описанную методику можно распространить на задачу о центрально симметричной деформации многослойного полого шара со смешанной неоднородностью. Еще одним направлением дальнейших исследований может быть решение динамических задач о колебаниях многослойных колец и шаров.



Рис. 9 Зависимость перемещения  $u_R$  от полярного радиуса  $R$ 

### Библиографические ссылки

1. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания / А. К. Приварников // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Д.: ДГУ, 1973. – С. 27 – 45.
2. Ламзюк В. Д. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Выпуск. 1, 2/ В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников. – Д.: ДГУ, 1978.
3. Приварников А. К. Упругие многослойные основания. / А. К. Приварников, В. Д. Ламзюк. – Д., 1985. – Ч.1. – 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, №8789-В.
4. Годес Ю. Я. О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца со сцепленными слоями / Ю. Я. Годес, Е. А. Климова, И. Б. Кочеткова // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. – Д.: ДГУ, 1995. – С. 18 – 25.
5. Кочеткова И. Б. О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца с упругими связями между слоями/ И. Б. Кочеткова // Там же. – С. 135 – 140.
6. Вильданова С. И. Резонансные явления в многослойных основаниях с чередующимися однородными и неоднородными слоями / С. И. Вильданова, Ю. Я. Годес // Вісник Дніпропетровського національного університету. Сер. Механіка. – 2008. – Т. 16, № 5. — Вип. 11, т. 1. – С. 102 – 116.
7. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел/ В. А. Ломакин. – М.: МГУ, 1976. – 368 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2014