

УДК 539.3

О. В. Литвин, канд. фіз.-мат. наук, В. Г. Попов, д-р фіз.-мат. наук

*Національний університет «Одеська морська академія»*

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З V-ПОДІБНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Представлено розв'язання задачі визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення, яке в перерізі представляє собою два відрізки, що виходять з однієї точки. На включення, розташоване у необмеженому пружному просторі, діє гармонічна зсувна сила, а саме включення вважається повністю зчепленим з зовнішнім середовищем. Задача зведена до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Запропонований числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

**Ключові слова:** жорстке включення, пружний простір, гармонічна зсувна сила, сингулярні інтегральні рівняння, нерухомі особливості.

**Вступ.** Проблему визначення двовимірного динамічного напруженого стану в тілах з тонкими дефектами у вигляді відрізка прямої або дуги гладкої кривої на сьогоднішній час можна вважати вирішеною. Але, як відомо, реальні дефекти можуть бути більш складної конфігурації: кусково-гладкі, такі, що перетинаються або розгалужуються. Задачі визначення напруженого стану в тілах з подібними дефектами розв'язано значно менше, що пов'язано з математичними труднощами при розв'язанні таких задач методом інтегральних рівнянь. Зокрема, вони полягають в зведенні останніх до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами, серед яких у першу чергу слід зазначити [1; 18]. У вказаних роботах вдалось здобути точні розв'язки і точно визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) методом Вінера – Хопфа. Авторами [6; 17; 19] вивчався напружений стан навколо розгалужених, ламаних і крайових тріщин числовими методами. Методом граничних інтегральних рівнянь проведено дослідження для тіл з включеннями у вигляді ламаної або розгалужених включень у [3; 7]. Об'єднує ці роботи те, що при побудові числових розв'язків не враховується справжня асимптотика розв'язків, яка внаслідок наявності нерухомих особливостей стає відмінною від кореневої. Практично відсутні розв'язання аналогічних динамічних задач навіть для випадку гармонічних коливань. Наприклад, у [8; 9] досліджувалась взаємодія плоских гармонічних хвиль з двома тріщинами, що виходять з однієї точки, і з тріщиною у вигляді триланкової ламаної. Для розв'язання отриманих при цьому систем сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з нерухомими особливостями був запропонований числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків і ґрунтується на застосуванні для сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул. Саме цей метод застосовується у поданій статті при розв'язанні задачі про взаємодію хвиль поздовжнього зсуву з V-подібним в перерізі включенням.

**Постановка задачі.** Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить абсолютно жорстке тунельне включення, яке в перерізі має V-подібну форму. Включення у площині  $xOy$  є відрізками довжиною

$2d_k$ , утворюють з віссю  $Ox$  кути  $\alpha_k, k = 1; 2$  (рис. 1). На включення діє гармонічна зсувна вздовж осі  $Oz$  сила  $Pe^{-i\omega t}$ . Множник  $e^{-i\omega t}$ , що визначає залежність від часу, надалі всюди відкинутий.

Оскільки тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації, то відмінною від 0 буде тільки  $W(x; y)$  – компонента  $z$  вектора переміщень. В системі координат  $xOy$  вона задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}, \quad (1)$$

де  $\rho, G$  – густина і модуль зсуву пружного тіла.

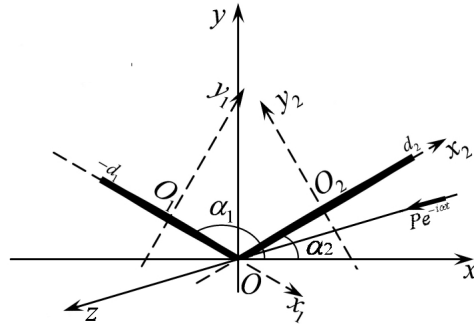


Рис. 1. – Розташування включення у координатній площині

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується система координат  $x_k O_k y_k, k = 1; 2$  так, що вісь  $O_k x_k$  спрямована вздовж ланки, а центр  $O_k$  співпадає з її серединою. Тоді центри мають координати  $x_{0k} = d_k \cos \alpha_k, y_{0k} = d_k \sin \alpha_k, k = 1; 2$ , а зв'язок між системами координат виражається формулами

$$\begin{cases} x = a_k + x_k \cos \beta_k - y_k \sin \beta_k, \\ y = b_k + x_k \cos \beta_k + y_k \sin \beta_k, \\ \begin{cases} x_1 = (a_1 - a_2) \cos \alpha_1 + (b_1 - b_2) \sin \alpha_1 - x_2 \cos \alpha_{12} - y_2 \sin \alpha_{12}, \\ y_1 = -(a_1 - a_2) \sin \alpha_1 + (b_1 - b_2) \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_{12} - y_2 \sin \alpha_{12}, \\ \begin{cases} x_2 = (a_1 - a_2) \cos \alpha_2 + (b_1 - b_2) \sin \alpha_2 - x_1 \cos \alpha_{12} + y_1 \sin \alpha_{12}, \\ y_2 = -(a_1 - a_2) \sin \alpha_2 + (b_1 - b_2) \cos \alpha_2 - x_1 \cos \alpha_{12} - y_1 \sin \alpha_{12}, \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

$$\beta_1 = \pi + \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Граничні умови з боку зовнішнього середовища на включенні з огляду на його малу товщину  $h$ , записуються відносно серединної площини. Позначимо через  $W_k(x_k, y_k)$  переміщення  $W(x, y)$  у системі  $x_k O_k y_k$ . Припускається, що між включенням і пружним середовищем здійснено повне зчеплення, тому

$$W_k^1(x_k, 0) = c, \quad k = 1; 2. \quad (3)$$

Також на включенні є розрив дотичних напружень, для стрибків яких введено позначення

$$\tau_{zy_k}(x_l, +0) - \tau_{zy_k}(x_l, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2 \quad (4)$$

де  $\chi_{1k}(x_k)$  – невідомий стрибок дотичних напружень на  $k$ -й ланці включення.

До рівності (3) входить  $c$  – невідоме переміщення включення під дією зсувної сили. Воно визначаються з рівняння руху включень, які у випадку гармонічних коливань мають вигляд

$$-(m_1 + m_2)\omega^2 c = P + \sum_{k=1}^2 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad (5)$$

де  $m_k$  – маса кожної ланки включення ( $k = 1; 2$ ).

**Розв’язання задачі.** При розв’язання задачі для кожної ланки включення з номером  $l$  у системі координат  $x_l O_l y_l$ , пов’язаної з нею, будується розривний розв’язок рівняння (1) з стрибком (4) [10; 11]

$$W_{1l}^1(x_l, y_l) = \int_{-d_l}^{d_l} \frac{\chi_{1l}(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad l = 1; 2, \quad (6)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \kappa_0 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right).$$

Після цього переміщення у системі координат  $xOy$  подаються у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^2 W_l^g(x, y), \quad (7)$$

де  $W_l^g(x, y)$  отримуються з (6) внаслідок перетворення координат за першими формулами (2) при  $k = l$ .

Щоб скористатись формулами (7) необхідно визначити невідомі стрибки напружень на включенні. Для визначення вказаних стрибків слід скористатись умовами (3). Для цього вони попередньо замінені двома еквівалентними їм рівностями

$$\frac{\partial W_k^1(x_k, 0)}{\partial x_k} = 0, \quad W_k^1(-d_k, 0) = c, \quad k = 1; 2. \quad (8)$$

Перша рівність (8) є результатом диференціювання (3), а друга – умова еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей. Після здійснення у (7) перетворення координат за останніми формулами (2) і підстановки у (8) отримана наступна система сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left( \frac{1}{\tau - \xi} - R_{11}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) (q_{12}(\tau, \xi) - R_{12}(\tau, \xi)) d\tau = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left( \frac{1}{\tau - \xi} - R_{22}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) (q_{21}(\tau, \xi) - R_{21}(\tau, \xi)) d\tau = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^2 \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) (\ln|\tau| + D_l(\tau)) d\tau = c_0, \quad k=1;2. \quad (9)$$

В системі (9) введені позначення:

$$q_{kl}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_l (\gamma_l \tau_l \cos \alpha_{lk} + \gamma_k \xi_k)}{s_{kl}^2(\tau, \xi)}; \quad s_{kl}^2(\tau, \xi) = \gamma_l^2 \tau_l^2 + 2\gamma_l \gamma_2 \tau_l \xi_k \cos \alpha_{lk} + \gamma_k^2 \xi_k^2;$$

$$k, l = 1, 2; \quad l \neq k; \quad \tau_1 = \tau - 1; \quad \tau_2 = \tau + 1; \quad \xi_1 = \xi - 1; \quad \xi_2 = \xi + 1; \quad (10)$$

$$\varphi_k(\tau) = \frac{\chi_{1k}(d_k \tau)}{G}; \quad \eta = d_k \tau; \quad x_k = d_k \xi; \quad \gamma_k = \frac{d_k}{d}; \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{d}; \quad \delta_k = \frac{b_k}{d};$$

$$d = \max(d_1; d_2).$$

До системи (9) необхідно додати рівність (5) для визначення невідомої амплітуди коливання включення, які у позначеннях (10) приймають вигляд

$$c_0 = -\frac{1}{2\kappa_0^2 \bar{\rho} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \left( P_0 + \sum_{k=1}^2 \gamma_k \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) d\tau \right), \quad (11)$$

де  $\rho_k, h_k$  – густина і товщина матеріалу  $k$ -ої ланки включення,

$$c_0 = \frac{c}{d}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_k}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{h_k}{d}; \quad P_0 = \frac{P}{Gd}.$$

**Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь.** Наявність у сингулярній складовій інтегральних рівнянь (9) нерухомої особливості при  $\tau = -1, \xi = 1$  та  $\tau = 1, \xi = -1$  впливає на поведінку її розв'язків в околі точок  $\tau = \pm 1$ . Особливість розв'язків в околі вказаних точок може бути визначена шляхом дослідження асимптотичних властивостей сингулярних інтегралів [12] або шляхом дослідження символу сингулярного ядра [4]. В результаті знайдемо, що невідомі функції належить шукати у вигляді:

$$\varphi_1(\tau) = (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\delta} \psi_1(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = (1+\tau)^{-\delta} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_2(\tau), \quad (12)$$

де степеневий показник визначається рівністю

$$\delta = \begin{cases} \frac{\pi - 2\alpha}{2(\pi - \alpha)}, & 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\alpha - \pi}{2\alpha}, & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases}, \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Тепер, якщо розглянути функції

$$\psi_k(\tau) = \psi_{0k}(\tau) + \frac{\psi_k(1)}{2}(1+\tau) + \frac{\psi_k(-1)}{2}(1-\tau), \quad (13)$$

то можна бачити, що  $\psi_{0k}(\pm 1) = 0$  і має місце подання

$$\psi_{0k}(\tau) = (1-\tau)^2 g_k(\tau), \quad k = 1; 2, \quad (14)$$

де  $g_k(\tau)$  – нові невідомі функції, що задовольняють умови Гьольдера при  $\tau \in (-1; 1)$ . Підстановка (13), (14) у (12) приводить до наступного подання невідомих функцій

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k} g_k(\tau) + (1+\tau)^{\lambda_k} (1-\tau)^{\sigma_k-1} \frac{\psi_k(1)}{2} + \\ &+ (1+\tau)^{\lambda_k-1} (1-\tau)^{\sigma_k} \frac{\psi_k(-1)}{2}; \\ \sigma_1 &= \lambda_2 = 1-\delta; \quad \sigma_2 = \lambda_1 = 1/2. \end{aligned} \quad (15)$$

Далі наближений метод розв'язання ґрунтується на апроксимації функцій  $g_k(\tau)$  інтерполяційним многочленом  $n-1$  степеня

$$g_k(\tau) \approx g_{k,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{Q_{nk}(\tau)}{(\tau - \tau_{mk})(Q_{nk}'(\tau_{mk}))}, \quad (16)$$

де  $g_{mk} = g_k(\tau_{mk})$ ;  $Q_{n1}(\tau) = P_n^{1-\delta, 1/2}(\tau)$ ;  $Q_{n2}(\tau) = P_n^{1/2, 1-\delta}(\tau)$  – многочлени Якобі;  $\tau_{m1}, \tau_{m2}$  – корені цих многочленів.

Тоді для інтегралів з ядром Коші справедливі наступні квадратурні формули [5]

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k} g_k(\tau)}{\tau - \xi_{jk}} d\tau = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}}, \quad (17)$$

де  $\xi_{j1}, \xi_{j2}$  – корені функцій Якобі другого роду  $J_n^{1/2, 1-\delta}(\xi)$ ,  $J_n^{1-\delta, 1/2}(\xi)$ ,  $j = 1; \dots; n+1$  відповідно, а

$$A_{mk} = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) \Gamma(2+n-\delta)}{n! \Gamma\left(\frac{5}{2} + n - \delta\right) (1-\tau_{mk}^2) \left[ (Q_{nk}'(\tau_{mk})) \right]^2}$$

є коефіцієнтами відповідної квадратурної формули Гаусса – Якобі [6]. Формула (16) дає можливість застосувати для розв'язання (9) метод колокації з використанням у якості вузлів  $n+1$  кореня функції Якобі другого роду. Але для цього слід вивести квадратурні формули для інших сингулярних інтегралів.

Використання подання (15) робить необхідним обчислення наступних інтегралів з ядром Коші

$$b_{kj}^+ = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k-1}}{\tau - \xi_{kj}} d\tau, \quad b_{jk}^- = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k-1} (1+\tau)^{\lambda_k}}{\tau - \xi_{jk}} d\tau.$$

Їх значення знаходяться методом, викладеним в [9], що ґрунтується на їх перетворенні до згортки Мелліна. Далі застосування теореми про згортку дає можливість подати ці інтеграли у вигляді суми лишків у полюсах. Наслідком цих дій є на-

ступні формули:

$$b_{jk}^- = \begin{cases} B_k^+ \left( \frac{1-\xi_{jk}}{2} \right), & 0 \leq \xi_{jk} < 1, \\ B_k^- \left( \frac{1+\xi_{jk}}{2} \right), & -1 < \xi_{jk} < 0, \end{cases} \quad b_{jk}^+ = \begin{cases} C_k^+ \left( \frac{1-\xi_{jk}}{2} \right), & 0 \leq \xi_{jk} < 1, \\ C_k^- \left( \frac{1+\xi_{jk}}{2} \right), & -1 < \xi_{jk} < 0, \end{cases} \quad (18)$$

де

$$B_1^+(y) = -2^{\frac{1}{2}-\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg}(\pi\delta) \left( y^{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{k!} y^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+\delta\right)}{\Gamma(k+\delta)} y^k \right);$$

$$B_1^+(y) = C_2^-(y); \quad C_1^+(y) = B_2^-(y);$$

$$B_1^-(y) = 2^{\frac{1}{2}-\delta} \Gamma(2-\delta) \cos(\pi\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+\delta\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} y^k = C_2^+(y);$$

$$C_1^+(y) = 2^{\frac{1}{2}-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \operatorname{ctg}(\pi\delta) \left( y^{-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k\right)}{k!} y^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+\delta\right)}{\Gamma(1+k+\delta)} y^k \right);$$

$$C_1^-(y) = -2^{\frac{1}{2}-\delta} \Gamma(1-\delta) \cos(\pi\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+\delta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} y^k = B_2^+(y).$$

З (17), (18) випливають остаточні формули для інтегралів з ядром Коші

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - \xi_{jk}} d\tau = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}} + \frac{\psi_k(-1)}{2} b_{jk}^- + \frac{\psi_k(1)}{2} b_{jk}^+. \quad (19)$$

Наступним є обчислення інтегралів з нерухомою особливістю

$$E_{kl}^j = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} g_l(\tau) d\tau, \quad l \neq k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (20)$$

Нехай  $0 < r_1 < 1$  деяке додатне число. У випадку  $\xi_k \pm 1 > r_1$  інтеграли (20) не є сингулярними і можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул Гауса – Якобі з відповідною ваговою функцією [6]. Якщо ж  $\xi_k \pm 1 \rightarrow 0$ , то  $g_k(\tau)$  слід замінити інтерполяційними многочленами (15) і скористатися рівностями

$$q_{kl}(\tau_{ml}, \xi_{jk}) = \frac{q_{kl}(\tau_{ml}, \xi_{jk})}{\tau - \tau_{ml}} - \frac{\gamma_l^2 (\tau_{ml} + (-1)^l)}{s_{kl}(\tau_{ml}, \xi_{jk})} q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\xi_{jk} + (-1)^k)}{s_{kl}(\tau_{ml}, \xi_{jk})} q_{kl}(\xi_{jk}, \tau), \quad m = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n+1; \quad l \neq k = 1, 2.$$

Внаслідок цього інтеграл (20) набувають вигляду

$$E_{k2} = \sum_{m=1}^n \frac{g_{ml} \gamma_l}{(Q_{nl}(\tau_{ml}))' s_{kl}^2(\tau_{ml}, \xi_{jk})} \left[ \left( \gamma_l (\tau_{ml} + (-1)^l) \cos \alpha_{kl} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k) \right) h_{ml}^1 - \gamma_l^2 (\tau_{ml} + (-1)^l) h_{jl}^2 - \gamma_l \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k) h_{jl}^3 \right]; \quad (21)$$

$$h_{ml}^1 = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l}}{\tau - \tau_{ml}} Q_{nl}(\tau) d\tau, \quad h_{jl}^2 = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) Q_{nl}(\tau) d\tau;$$

$$h_{jl}^3 = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} q_{kl}(\xi_{jk}, \tau) Q_{nl}(\tau) d\tau.$$

Інтеграл  $h_{ml}^1$  подається через функцію Якобі другого роду і дорівнюють [8]

$$h_{ml}^1 = J_n^{\sigma_l, \lambda_l}(\tau_{ml}) = A_{ml} Q_{nl}^l(\tau_{ml}). \quad (22)$$

Інші інтеграл з (21) за допомогою метода, який ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна [7], подано збіжними при  $0 \leq 1 \pm \xi_k < r_1 < 1$  степеневими рядами

$$h_{jl}^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) (-1)^n}{\gamma_l} a_{kl} \left( \frac{1 + (-1)^k \xi_{jk}}{2\beta_{kl}} \right); \quad h_{jl}^3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) (-1)^n}{\gamma_l} b_{kl} \left( \frac{1 + (-1)^k \xi_{jk}}{2\beta_{kl}} \right); \\ \beta_{kl} = \frac{\gamma_l}{\gamma_k}, \quad (23)$$

де позначено

$$a_{kl}(y) = \frac{2^{3/2-\delta}}{n!} \left( \frac{y^{1-\delta}}{\sin(\pi\delta)} \sum_{p=0}^{\infty} z_{1p} y^p \cos((\pi - \alpha_{kl})(\delta - p - 2)) - \right. \\ \left. - \operatorname{ctg}(\pi\delta) \sum_{p=0}^{\infty} z_{2p} y^p \cos(\alpha_{kl}(p+1)) \right);$$

$$b_{kl}(y) = \frac{2^{3/2-\delta}}{n!} \left( \frac{y^{1-\delta}}{\sin(\pi\delta)} \sum_{p=0}^{\infty} z_{1p} y^p \cos((\pi - \alpha_{kl})(\delta - p - 1)) + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg}(\pi\delta) \sum_{p=0}^{\infty} z_{2p} \cos(\alpha_{kl} p) \right);$$

$$z_{1p} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} - n + p\right) \Gamma(2 + n + p - \delta) (-1)^p}{p! \Gamma(2 + p - \delta)}; \quad z_{2p} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} - n + \delta + p\right) \Gamma(1 + n + p)}{p! \Gamma(\delta + p)}.$$

В результаті врахування (21) – (23) отримані наступні формули для обчислення інтегралів (20)

$$E_{kl}^j = \sum_{m=1}^n g_{ml} \frac{H_m^{kl}}{s_{kl}^2(\tau_{ml}, \xi_{jk})}; \quad (24)$$

$$H_m^{kl} = A_{ml} \left( \gamma_l (\tau_{ml} + (-1)^l) \cos \alpha_{kl} + \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k) \right), \quad 1 + (-1)^k \xi_{jk} > r_1 > 0;$$

$$H_m^{kl} = A_{ml} \left( \gamma_l (\tau_{ml} + (-1)^l) \cos \alpha_{kl} + \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k) \right) - \frac{\gamma_l^2 (\tau_{ml} + (-1)^l)}{(Q_n(\tau_{ml}))'} h_{jl}^2 - \frac{\gamma_l \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k)}{(Q_n(\tau_{ml}))'} h_{jl}^3, \quad (-1)^k + \xi_{jk} < r_1.$$

Аналогічно обчислюються інтеграли

$$s_{jkl}^+ = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) (1-\tau)^{\sigma_l-1} (1+\tau)^{\lambda_l} d\tau;$$

$$s_{jkl}^- = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l-1} d\tau.$$

Для них мають місце формули, аналогічні (24)

$$s_{jkl}^\pm = \begin{cases} \sum_{m=1}^n A_{ml}^\pm q_{kl}(\tau_{ml}^\pm, \xi_{jk}), & 1 - (-1)^k \xi_{jk} \geq r_1 > 0, \\ (-1)^k c_{kl}^\pm \left( \frac{1 - (-1)^k \xi_{jk}}{2} \right), & 0 < 1 - (-1)^k \xi_{jk} < r_1, \end{cases} \quad (25)$$

$$A_{ml}^+ = A_m^{\sigma_l-1, \lambda_l}; \quad A_{ml}^- = A_m^{\sigma_l, \lambda_l-1}; \quad P_n^{\sigma_l-1, \lambda_l}(\tau_{ml}^+) = 0; \quad P_n^{\sigma_l, \lambda_l-1}(\tau_{ml}^-) = 0.$$

Функції  $c_{kl}^\pm(y)$  подаються рядами

$$c_{kl}^\pm(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{2 \mp 1}{2}\right) \left[ \frac{y^{-\delta}}{\sin \pi \delta} \sum_{p=0}^{\infty} B_{1p}^\pm y^p \cos((\pi - \alpha_{kl})(1+p-\delta)) + \operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}^\pm y^p \cos(\alpha_{kl}(p+1)) \right];$$

$$B_{1p}^\pm = \frac{(-1)^p \Gamma\left(\mp \frac{1}{2} + p\right)}{p!}; \quad B_{2p}^+ = B_{2p}^- = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \delta + p\right)}{\Gamma(1 + \delta + p)}.$$

Згідно (24), (25) формула для обчислення інтеграла з нерухомою особливістю має вигляд

$$\int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) \rho_l(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n g_{m1} \frac{H_m^{kl}}{s_{kl}^2(\tau_{ml}, \xi_{jk})} + \frac{\psi_l(1)}{2} s_{jkl}^+ + \frac{\psi_l(-1)}{2} s_{jkl}^-. \quad (26)$$



Для інтегралів з логарифмічною функцією невідомі функції  $g_1(\tau)$ ,  $g_2(\tau)$  наближаються інтерполяційними многочленами (16), які попередньо перетворюються за тотожністю Дарбу – Кристофеля [8]. Після цього отримані формули

$$\int_{-1}^1 \ln|\tau + (-1)^l| (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} g_l(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n A_{ml} g_{ml} \theta_{ml}, \quad (27)$$

де

$$\theta_{ml} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s1}}{\sigma_s^2} Q_{sl}(\tau_{ml}); \quad u_{sl} = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} Q_{sl}(\tau) \ln|\tau + (-1)^l| d\tau.$$

Останні інтеграли обчислюються методами для обчислення інтегралів з ортогональними многочленами [7] і дорівнюють

$$u_0 = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(2-\delta)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}-\delta\right)} \left[ \ln 2 + \Psi(2-\delta) - \Psi\left(\frac{7}{2}-\delta\right) \right];$$

$$u_{s1} = -a_s; \quad u_{s2} = (-1)^{s+1} a_s; \quad a_s = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right) \Gamma(2-\delta)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}-\delta+s\right) s!}.$$

В цих формулах  $\Psi(x)$  – логарифмічна похідна  $\Gamma$ -функції. Аналогічно знаходяться наступні інтеграли

$$E_l^+ = \int_{-1}^1 \ln|\tau + (-1)^l| (1-\tau)^{\sigma_l-1} (1+\tau)^{\lambda_l} d\tau;$$

$$E_l^- = \int_{-1}^1 \ln|\tau + (-1)^l| (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l-1} d\tau; \quad E_2^\mp = E_1^\pm;$$

$$E_1^\pm = \frac{2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{2\pm 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\mp 1}{2}-\delta\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-\delta\right)} \left[ \ln 2 + \Psi\left(\frac{3\mp 1}{2}-\delta\right) - \Psi\left(\frac{5}{2}-\delta\right) \right]. \quad (28)$$

Згідно (27), (28) остаточної формули для інтегралів з логарифмічною функцією мають вигляд

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln|\tau + (-1)^l| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{ml} g_{ml} \theta_{ml} + \frac{\psi_l(1)}{2} E_l^- + \frac{\psi_l(-1)}{2} E_l^+. \quad (29)$$

Знайдені формули для сингулярних інтегралів (19), (26), (29), а також квадратурні формули Гаусса – Якобі, що застосовуються до інтегралів з регулярними ядрами, дають можливість замінити (9) наступною системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n A_{m1} g_{m1} \left[ \frac{1}{\tau_{m1} - \xi_{k1}} - R_{11}(\tau_{m1} - \xi_{k1}) \right] + \frac{\psi_1(-1)}{2} (b_{k1}^- - r_{11}^1) + \\
& + \frac{\psi_1(1)}{2} (b_{k1}^+ - s_{j12}^+ + r_{12}^1 - r_{11}^2) - \\
& - \sum_{m=1}^n g_{m2} \left[ \frac{H_m^{12}}{s_{k2}^2(\tau_{m2}, \xi_{k1})} - A_{m2} R_{12}(\tau_{m2}, \xi_{k1}) \right] - \frac{\psi_2(1)}{2} (s_{j12}^+ - r_{12}^2) = 0; \\
& \sum_{m=1}^n g_{m1} \left[ \frac{H_m^{21}}{s_{k1}^2(\tau_{m1}, \xi_{k2})} - A_{m1} R_{21}(\tau_{m1}, \xi_{k2}) \right] + \frac{\psi_1(-1)}{2} (s_{j22}^- - r_{21}^1) + \frac{\psi_1(1)}{2} (s_{j22}^+ - b_{k2}^- - r_{22}^1 - r_{21}^2) - \\
& - \frac{\psi_2(1)}{2} (b_{k2}^+ + r_{22}^2) - \sum_{m=1}^n A_{m2} g_{m2} \left[ \frac{1}{\tau_{m2} - \xi_{k2}} - R_{22}(\tau_{m2} - \xi_{k2}) \right] = 0; \\
& \sum_{m=1}^n A_{m1} g_{m1} \left[ \theta_{m1} + D_1(\tau_{m1} - 1) + \frac{\pi}{\kappa_0^2 \rho \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \right] + \frac{\psi_1(-1)}{2} (E_1^+ + d_1^1) + \frac{\psi_1(1)}{2} (E_1^- + E_2^+ + d_2^1 + d_1^2) + \\
& + \frac{\psi_2(1)}{2} (E_2^- + d_2^2) + \sum_{m=1}^n A_{m2} g_{m2} \left[ \theta_{m2} + D_2(\tau_{m2} + 1) + \frac{\pi}{\kappa_0^2 \rho \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \right] = - \frac{\pi P_0}{\kappa_0^2 \rho \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)}; \\
& c_0 = - \frac{1}{2 \kappa_0^2 \rho \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \left( P_0 + \sum_{m=1}^n A_{m1} g_{m1} + \sum_{m=1}^n A_{m2} g_{m2} \right). \quad (30)
\end{aligned}$$

В результаті розв'язання системи (30) будуть знайдені  $g_{m1} = g(\tau_{m1})$ ,  $g_{m2} = g(\tau_{m2})$ ,  $\psi_1(\pm 1)$ ,  $\psi_2(\pm 1)$ ,  $c_0$ . Після цього наближений розв'язок системи визначається формулами (11), (15).

Однією з важливих характеристик напруженого стану навколо включення є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Він визначається з відомого асимптотичного подання [9] напружень в околі кінців включення. З урахуванням (10), (14), після обчислення границь знаходимо прості формули для безпосереднього визначення КІН:

$$K_1 = G \sqrt{d_1} \frac{\psi_1(-1)}{2\delta}; \quad K_2 = G \sqrt{d_2} \frac{\psi_2(1)}{2\delta}. \quad (31)$$

**Результати числового аналізу.** При числовій реалізації розглядалось V-подібне включення з вершиною у початку координат з однаковими сторонами довжиною  $d$  і кутом  $2\beta$  між ними, розташоване симетрично відносно осі  $Oy$ . Тоді внаслідок симетрії  $K_1 = K_2 = K$ . Спочатку було здійснено дослідження практичної збіжності запропонованого методу числового розв'язання інтегральних рівнянь. Результати наведені на рис. 2 у вигляді графіків залежності КІН від хвильового числа ( $\beta = 60^\circ$ ), де кожна крива відповідає вказаному числу вузлів інтерполяції у формулі (16). Можна бачити, що для отримання значень КІН з похибкою менше 1% вистачає 20 вузлів інтерполяції, а для частоти  $\kappa_0 < 2$  достатньо і 10 вузлів.

Далі з'ясовано вплив на значення КІН і амплітуду коливання включення його форми, а саме значення кута між його сторонами. На рис. 3 та рис. 4 наведені графіки, що відповідають  $1 - \beta = 5^\circ$ ,  $2 - \beta = 45^\circ$ ,  $3 - \beta = 60^\circ$ ,  $4 - \beta = 87^\circ$ . Як видно зна-

чення КІН спадають з ростом  $\kappa_0$ , досягнувши незначного максимуму при досить малих частотах (рис. 3). Причому, чим менше кут між включеннями, тим більша абсолютна величина КІН. Значення частоти, за якої спостерігається максимум КІН, залежить від кута, утвореного сторонами включення. Що стосується амплітуди коливань включення, то вона спадає з зростанням хвильового числа при всіх значеннях кута між ланками включення. При зменшенні кута між ланками включення спостерігається зростання амплітуди.

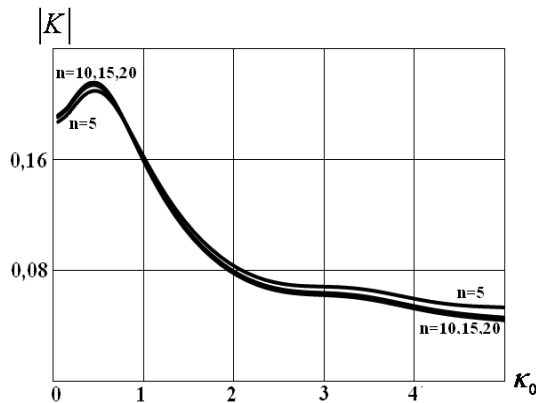


Рис. 2. - Дослідження збіжності метода розв'язання

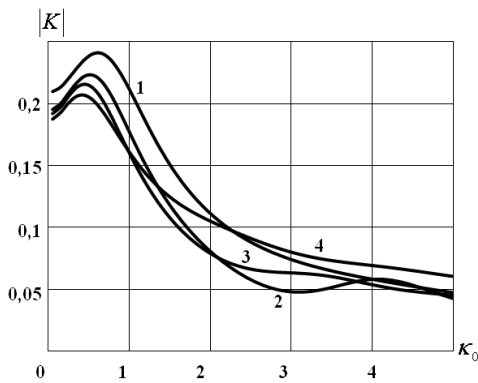


Рис. 3. - Залежність КІН від безрозмірної частоти за різних кутів між ланками включення

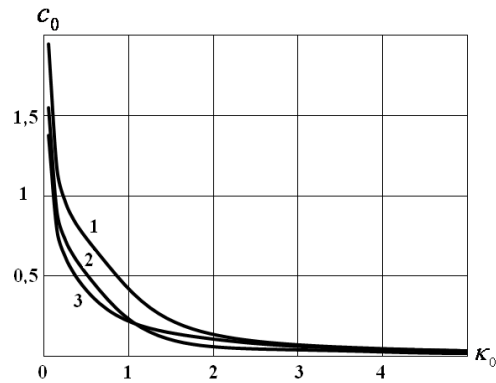


Рис. 4. - Залежність амплітуди коливання включення від безрозмірної частоти за різних кутів між ланками включення

**Висновки.** Здійснено числове розв'язання задачі з визначення напружено-деформівного стану в околі V-подібного тонкого жорсткого включення при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву. Це розв'язання ґрунтується на наближеному методі побудови розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Врахування реальної особливості розв'язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечують швидку збіжність і стабільні числові результати в досить широкому частотному діапазоні. Отримані в результаті наближені формули для обчислення КІН і амплітуди коливань включення дали можливість дослідити вплив на їх значення частоти коливань і форми включення і встановити ряд якісних ефектів, зокрема наявність частот, за яких значення КІН сягають максимуму.

### Бібліографічні посилання

1. **Андреев А. В.** Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами / А. В. Андреев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
2. **Афян Б. А.** Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин / Б. А. Афян // Докл. АН Арм. ССР. – 1984. – Т. 79. – № 4. – С. 60–65.
3. **Васильев К. В.** Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанцюговим пружним включенням / К. В. Васильев, Я. Н. Пастернак, Г. Т. Сулим, Р. М. Пастернак // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. наук. – 2010. – № 2. – С. 55–63.
4. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р. В. Дудучава // Труды Тбилисского математического ин-та АН СССР. – 1979. – Т. 60. – С. 31–35.
5. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
6. **Осив П. Н.** Определение напряжений в бесконечной пластине с ломанной или ветвящейся трещиной / П. Н. Осив, М. П. Саврук // Ж. прикл. мех. и техн. физ. – 1983. – Т. 2. – С. 142–147.
7. **Пастернак Я. Н.** Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гілястими пружними включеннями / Я. Н. Пастернак, Г. Т. Сулим // Вісник ТНТУ. – 2011. – Т. 16. – № 4. – С. 23–31.
8. **Попов В. Г.** Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву / В. Г. Попов // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. наук. – 2013. – Вип. 3. – С. 205–208.
9. **Попов В. Г.** Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву / В. Г. Попов // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – Т. 50 – № 1. – С. 112–120.
10. **Попов В. Г.** Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении / В. Г. Попов // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
11. **Попов В. Г.** Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение / В. Г. Попов // Динамические системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 14–23.
12. **Попов В. Г.** Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде / В. Г. Попов // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Д.: ДГУ. – 1986. – С. 121–127.
13. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
14. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук // К.: Наукова думка, 1981. – 323 с.
15. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
16. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. **Isida M.** Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings / M. Isida, H. Noguchi // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 54 – No 4. – P. 293–316.
18. **Vitek V.** Plain stress intensity factors for branched cracks / V. Vitek // International Journal of Fracture. – 1977. – Vol. 13. – No 4. – P. 481–501.
19. **Xiangqiao Yan.** Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements / Yan. Xiangqiao // Mechanics Research Communication. – 2006. – Vol. 32. – Is. 4. – P. 375–384.

Надійшла до редакції 1.03.2017

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С V-ОБРАЗНЫМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

О. В. Литвин, канд. физ.-мат. наук, В. Г. Попов, д-р физ.-мат. наук

*Национальный университет «Одесская морская академия»  
Одесса, Украина*

Представлено решение задачи по определению напряженного состояния в окрестности туннельного жесткого включения, которое в сечении представляет два отрезка, выходящие из одной точки. На включение, расположенное в неограниченном упругом пространстве, действует гармоническая сдвиговая сила, а само включение предполагается полностью сцепленным с внешней средой. Задача сведена к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями. Для приближенного решения указанной системы предложен численный метод, учитывающий реальную асимптотику неизвестных функций и использующий специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

Ключевые слова: жесткое включение, упругое пространство, гармоническая сдвиговая сила, сингулярные интегральные уравнения, неподвижные особенности.

UDC 539.3

## THE STRESS STATE IN THE ELASTIC BODY WITH V- SHAPED RIGID INCLUSION UNDER THE ACTION OF THE HARMONIC OSCILLATIONS OF THE LONGITUDINAL SHIFT

O. V. Litvin PhD (Phys.-Math.), V. G. Popov Dr. Sci. (Phys.-Math.)

*National university «Odessa Maritime Academy»  
Odessa, Ukraine*

The problem of the determination of stress state in the vicinity of the tunnel rigid inclusion that in a cross-section represents two line segments emanating from one point is considered. The harmonic shear force impacts on inclusion in the unlimited elastic medium (matrix). It is supposed the inclusion is both fully coupled with the matrix. The problem is reduced to solving a system of two singular integral equations with fixed singularities. For the approximate solution of this system a numerical method is applied. It takes into account the true asymptotic of unknown functions and uses special quadratic formulas for singular integrals.

Keywords: rigid inclusion, elastic medium, harmonic shear force, singular integral equations, fixed singularities.

There is a V-shaped in a cross section thin absolutely rigid inclusion in an infinite elastic medium (matrix) that is in the conditions of antiplane strain. The inclusion is under the action of harmonic shear force  $P e^{-i\omega t}$  along the axis  $Oz$ . The only one different from 0  $z$  – component of displacement vector  $W(x; y)$  satisfies equation

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}.$$

The inclusion is fully couple with the matrix and the tangential stresses are discontinuous on the inclusion with jumps

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2.$$

The method of the solution is based on the use of the discontinuous solution of the Helmholtz equation. After the satisfaction of the conditions on the inclusion the system of integral equations relatively unknown jumps is obtained:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left( \frac{1}{\tau - \xi} - R_{11}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) (q_{12}(\tau, \xi) - R_{12}(\tau, \xi)) d\tau = 0;$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left( \frac{1}{\tau - \xi} - R_{22}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) (q_{21}(\tau, \xi) - R_{21}(\tau, \xi)) d\tau = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^2 \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) (\ln|\tau| + D_l(\tau)) d\tau = c_0;$$

$$c_0 = -\frac{1}{2\kappa_0^2 \rho \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \left( P_0 + \sum_{k=1}^2 \gamma_k \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) d\tau \right); \quad \varphi_k(\tau) = \frac{\chi_k(\eta)}{G}, \quad k = 1; 2;$$

$$q_{kl}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_l (\gamma_l \tau_l \cos \alpha_{lk} + \gamma_k \xi_k)}{s_{kl}^2(\tau, \xi)}; \quad s_{kl}^2(\tau, \xi) = \gamma_l^2 \tau_l^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \tau_l \xi_k \cos \alpha_{lk} + \gamma_k^2 \xi_k^2.$$

The unknown functions are searched as:

$$\varphi_1(\tau) = (1 + \tau)^{-1/2} (1 + \tau)^{-\delta} \psi_1(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = (1 + \tau)^{-\delta} (1 + \tau)^{-1/2} \psi_2(\tau).$$

Approximate method of solution is based on the interpolation of functions  $g_k(\tau)$  by approximation polynomial of degree  $n - 1$

$$g_k(\tau) \approx g_{k,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{Q_{nk}(\tau)}{(\tau - \tau_{mk})(Q'_{nk}(\tau_{mk}))},$$

$g_{mk} = g_k(\tau_{mk})$ ,  $Q_{n1}(\tau) = P_n^{1-\delta, 1/2}(\tau)$ ,  $Q_{n2}(\tau) = P_n^{1/2, 1-\delta}(\tau)$  – Jacobi polynomials,  $\tau_{m1}, \tau_{m2}$  – roots of these polynomials.

One of the main results is a numerical method for solving the obtained system, which takes into account the singularity of the solution and is based on the use of the special quadratic formulas for singular integrals. The resulting calculation formulas of generalized stress intensity factor (SIF), which values are expressed in approximate solution of the system of integral equations are obtained. The influence on the value of SIF from the angle formed by the sides of the inclusion and the frequency of the incident wave is researched.

### References

1. **Andreev A. V.** A direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels / A. V. Andreev // Izv. RAS. Mechanics of a solid. – 2005. – No 1. – P. 126–146. (in Russian).

2. **Afyan B. A.** On integral equations with fixed singularities in the theory of branching cracks / B. A. Afyan / Dokl. AN Arm. SSR. – 1984. – Vol. 79. – No 4. – P. 60–65. (in Russian).
3. **Vasilyev K. V.** The longitudinal shear of the infinite double circuit body with thin elastic inclusion / K. V. Vasiliev, N. J. Pasternak, G. T. Sulim, R. M. Pasternak // Visn. Don. nat. Univ. Ser.: A: Naturally. Science. – 2010. – No 2. – P. 55–63. (in Ukrainian).
4. **Duduchava R. V.** The integral convolution equations with discontinuous pre-symbols, singular integral equations with fixed singularities, and their applications to problems of mechanics / R. V. Duduchava // Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences. – 1979. – Vol. 60. – P. 31–35. (in Russian).
5. **Krylov V. I.** The approximate calculation of integrals / V. I. Krylov. – Moscow: Nauka, 1967. – 500 p. (in Russian).
6. **Osiv P. N.** The determination of stresses in an infinite plate with a broken or branched crack / P. N. Osiv, M. P. Savruk // J. Prikl. Mekh. And techn. Fiz. – 1983. – Vol. 2. – P. 142–147. (in Russian).
7. **Pasternak Y. N.** Plane problems of elasticity of anisotropic bodies with thin elastic branching inclusions / Y. N. Pasternak, G. T. Sulim // Bulletin TNTU. – 2011. – Vol. 16 – No 4. – P. 23–31. (in Ukrainian).
8. **Popov V. G.** Stress state near two cracks emanating from one point during harmonic oscillation of the longitudinal shear / V. G. Popov // Bulletin of Kiev Shevchenko nat. Univ. Ser: Phys.- Math. Sciences. – 2013 – Vol. 3. – P. 205–208. (in Ukrainian).
9. **Popov V. G.** The crack in the form of a three-unit broken under the action of wave of longitudinal shear / V. G. Popov // Mat. methods and physical and fur. field. – 2015. – Vol.50.– No 1. – P. 112–120. (in Ukrainian).
- 10 **Popov V. G.** Investigation of the fields of stresses and displacements in the case of diffraction of elastic shear waves on a thin rigid exfoliated inclusion / V. G Popov. – Moscow: Izv. RAS, Mechanics of Solid State, – 1992. – No 3. – P. 139–146. (in Russian).
- 11 **Popov V. G.** The comparison of the displacement and stress fields at the diffraction of elastic shear waves on various defects: a crack and a thin rigid inclusion / V. G. Popov // Dynamic systems. – 1993. – No 12. – P. 14–23. (in Russian).
- 12 **Popov V. G.** Diffraction of elastic shear waves on the inclusion of a complex shape located in an unlimited elastic medium / V. G. Popov // Hydroaeromechanics and the theory of elasticity. Dnepropetrovsk: DGU. – 1986. – P. 121–127. (in Russian).
- 13 **Popov G. Ya.** Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements / G. Ya. Popov. – Moscow: Nauka, 1982. – 342 p. (in Russian).
- 14 **Savruk M. P.** Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks / M. P. Savruk. – Kyiv: Naukova Dumka, 1981. – 323 p. (in Russian).
- 15 **Sere G.** Orthogonal polynomials / G. Sere. – Moscow: Fizmatgiz, 1962. – 500 p. (in Russian).
- 16 **Sulim H. T.** Fundamentals of the mathematical theory of equilibrium thermostatic deformable solids with thin inclusion / H. T. Sulim.– Lviv, 2007. – 716 p. (in Ukrainian).
17. **Isida M.** Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings / M. Isida, H. Noguchi // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 54 – No 4. – P. 293–316.
18. **Vitek V.** Plain stress intensity factors for branched cracks / V. Vitek // International Journal of Fracture. – 1977. – Vol. 13. – No 4. – P. 481–501.
19. **Xiangqiao Yan.** Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements / Yan. Xiangqiao // Mechanics Research Communication. – 2006. – Vol. 32. – Iss. 4. – P. 375–384.