

УДК 539.3

А. С. Мішарін, В. Г. Попов, д-р фіз.-мат. наук

Національний університет «Одеська морська академія»

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БЛЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРІЩИНАМИ НА ПРОДОВЖЕННІ ПРИ ДІЇ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності про взаємодію плоских пружних хвиль зі складним дефектом у вигляді включення з тріщинами на продовженні. Переміщення і напруження в матриці представлені у вигляді розривних розв'язків рівнянь Ламе. Після задовільнення граничним умовам початкова задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків на дефекті. Для числового розв'язання цієї системи використовується числовий метод і спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень, система сингулярних інтегральних рівнянь, плоскі пружні хвилі, включення, тріщини.

Вступ. Сучасні елементи будівельних конструкцій і деталі машин досить часто містять конструктивні елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Армуючі елементи композитних матеріалів теж розглядаються як жорсткі виключення. Але як показують дослідження [12], тонкі жорсткі включення спричиняють значну концентрацію напружень у оточуючому середовищі, яка може привести до утворення тріщин на його продовженні.

В останні роки для відновлення несучої здатності пошкоджених тріщинами будівельних конструкцій є поширеними ін'єкційні технології [4; 9 – 11]. Ці технології полягають у заповненні тріщин рідкими матеріалами, що утворюють з матрицями міцні зв'язки після кристалізації або полімеризації, і таким чином зміцнюють пошкоджену конструкцію. Але у випадку неповного заповнення тріщини ін'єкційним матеріалом у тілі утворюється дефект у вигляді тонкого включення з тріщинами на продовженні.

Отже визначення напруженого стану в пружних тілах, що містять складні дефекти у вигляді такого включення з тріщинами на продовженні, є актуальною проблемою механіки деформівного тіла і механіки руйнування. Але вважати її вирішеною можливо тільки у випадку статичного навантаження тіл з подібними дефектами. Так необмежені і напівобмежені тіла з включеннями, що мають тріщини на продовженні, в межах двовимірної теорії пружності розглянуто у [1; 2]. Міцність тіл з тріщинами залікованими і частково залікованими за ін'єкційними технологіями досліджені у [9; 13]. Але питання динамічної, зокрема хвильової, дії на складні дефекти у вигляді тонкого включення з тріщинами на продовженні не розглядалися. В поданій статті розв'язується задача визначення напруженого стану в тілі з подібним дефектом, що виникає в наслідок поширення плоских гармонічних хвиль.

Постановка задачі. Розглядається пружне ізотропне середовище, яке знаходиться у стані плоскої деформації, в якому міститься дефект у вигляді тонкого смугового включення зі смуговими тріщинами на продовженні. У площині Ox включення займає область $b^- \leq x \leq b^+$, $-h/2 \leq y \leq h/2$. Тріщини, що відходять від включення, займають відрізки $x \in [-a, b^-]$, $x \in [b^+, a]$ (рис. 1). В матриці

поширюються плоскі гармонічні поздовжні хвилі або хвилі поперечного зсуву, задані своїми потенціалами:

$$\varphi_0(x; y) = A/\kappa_1 \times e_1(x; y), \quad \psi_0(x; y) = B/\kappa_2 \times e_2(x; y), \quad (1)$$

де $\kappa_j^2 = \omega^2/c_j^2$, $e_j(x; y) = \exp(\kappa_j i(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0))$, ($j = 1, 2$), θ_0 – кут між додатнім напрямком осі Ox і напрямком поширення хвиль. Залежність від часу визначається множителем $e^{-i\omega t}$, який всюди опущений. Подамо переміщення у вигляді суперпозиції

$$u = u_1 + u_0, \quad v = v_1 + v_0, \quad (2)$$

де u_0, v_0 – переміщення, викликані хвилями що падають на дефект, а u_1, v_1 – переміщення, викликані хвилями відбитих від включення.

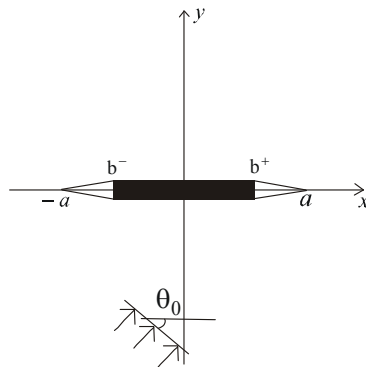


Рис. 1. – Включення з тріщинами на продовженні

Переміщення u_1, v_1 визначаються з рівнянь руху для випадку гармонічних коливань в умовах плоскої деформації

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \text{grad div} U = -\rho \omega^2 U; \quad U = (u_1(x, y), v_1(x, y))^T, \quad (3)$$

де λ, μ – сталі Ламе.

Граничні умови з боку матриці на дефект, внаслідок його малої товщини, сформульовано відносно його серединної площини. Тоді у області включення за умови ідеального зчеплення повинні виконуватися рівності:

$$u_1(x, 0) = d_1 - u_0(x, 0), \quad v_1(x, 0) = d_2 + \gamma x - v_0(x, 0), \quad (4)$$

де d_1, d_2 – амплітуди переміщень включення відносно осей Ox і Oy , γ – кут повороту включення відносно вісі Oz .

Окрім того на поверхні включення терплять розрив напруження, стрибки яких позначимо наступним чином

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \quad \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \quad x \in [b^-, b^+]. \quad (5)$$

Невідомі амплітуди переміщень та кут повороту включення визначаються з рівняння руху включення як твердого тіла:

$$-m\omega^2 d_1 = \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(x) dx; \quad -m\omega^2 d_2 = \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(x) dx; \quad -\omega^2 \gamma I_{in} = \int_{b^-}^{b^+} x \chi_1(x) dx, \quad (6)$$

де m – маса одиниці довжини включення, I_{in} – момент інерції включення.

Поверхні тріщин вважаються не завантаженими, внаслідок чого виконуються нерівності:

$$\sigma_y^1(x, 0) = -\sigma_y^0(x, 0); \quad \tau_{yx}^1(x, 0) = -\tau_{yx}^0(x, 0); \quad x \in [-a, b^-]; \quad x \in [b^+, a], \quad (7)$$

де σ_y^0, τ_{yx}^0 – напруження, викликані хвилею, що падає; σ_y^1, τ_{yx}^1 – напруження, викликані відбитою хвилею. На тріщинах терплять розрив переміщення, стрибки яких позначимо:

$$\langle u \rangle = \chi_4^\pm(x); \quad \langle v \rangle = \chi_3^\pm(x); \quad x \in [-a, b^-]; \quad x \in [b^+, a]. \quad (8)$$

Причому, з умов замкнутості тріщин, у вершинах виконуються рівності

$$\chi_{3,4}^\pm(\pm a) = 0.$$

Розв'язання задачі. Розв'язання сформульованої крайової задачі суттєво базується на використанні розривних розв'язків рівнянь (4). Спочатку будується розривний розв'язок цих рівнянь з стрибками (5) на поверхні включення. Ці розривні розв'язки і пов'язані з ними напруження визначаються формулами [8; 6]:

$$\begin{aligned} u_1^1(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{41}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{42}(\eta - x, y) d\eta; \\ v_1^1(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{31}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{32}(\eta - x, y) d\eta; \\ \sigma_y^1(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{11}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{12}(\eta - x, y) d\eta; \\ \tau_{yx}^1(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{21}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{22}(\eta - x, y) d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Також будуються розривні розв'язки рівнянь (7) з стрибками (8) на лініях розміщення тріщин, для яких мають місце аналогічні формули:

$$\begin{aligned} u_1^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^\pm(\eta) G_{43}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^\pm(\eta) G_{44}(\eta - x, y) d\eta; \\ v_1^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^\pm(\eta) G_{33}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^\pm(\eta) G_{34}(\eta - x, y) d\eta; \\ \sigma_y^{1\pm}(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^\pm(\eta) G_{13}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^\pm(\eta) G_{14}(\eta - x, y) d\eta; \\ \tau_{yx}^{1\pm}(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^\pm(\eta) G_{23}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^\pm(\eta) G_{24}(\eta - x, y) d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

У формулах (9), (10) позначено:

$$\begin{aligned}
G_{11} = G_{33} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right]; \\
G_{12} = G_{43} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right]; \\
G_{13} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[- \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_1 + \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right]; \\
G_{14} = G_{23} &= \frac{2\mu}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (r_1 - r_2); \\
G_{21} = G_{34} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right]; \quad (11) \\
G_{22} = G_{44} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[-2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right]; \\
G_{24} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_2 \right]; \\
G_{31} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right]; \\
G_{32} = G_{41} &= - \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_1 - r_2); \\
G_{42} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[- \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right]; \\
r_k = r_k(\eta - x, y) &= - \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[\kappa_k \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right], \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Після цього переміщення і напруження в матриці, викликані хвилями відбитими від дефекту, подамо у вигляді суми розривних розв'язків рівнянь (4), (7)

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^+ + u_1^- + u_1^+; \quad v_1 = v_1^+ + v_1^- + v_1^+; \\
\tau_{yx}^1 &= \tau_{yx}^+ + \tau_{yx}^- + \tau_{yx}^+; \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^+ + \sigma_y^- + \sigma_y^+.
\end{aligned} \quad (12)$$

Щоб остаточно визначити поля переміщень і напружень за формулами (12) необхідно знайти невідомі стрибки напружень і переміщень на дефекті. Для цього слід використати незадовільнені умови (4), (7). Після підстановки (12) в ці рівності приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків. Ця система після переходу до проміжку $[-1, 1]$, вилучення сингулярних складових ядер і введення нових невідомих функцій

$$\begin{aligned} \mu\varphi_i(\tau) &= \chi_i/2 \times \left((b^+ - b^-)\tau + b^+ + b^- \right), \\ \varphi_j^\pm(\tau) &= \left(\chi_j^\pm/2 \left((a \mp b^\pm)\tau \pm a \pm b^\pm \right) \right)', \quad i=1,2, \quad j=3,4, \end{aligned} \quad (13)$$

має наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \left[\frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + R_l(\tau, t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}(\tau) R_{15-l}(\tau, t) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}(\tau, t) d\tau = f_l(t); \\ &\frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^-(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{15-l}^-(\tau, t) \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}^-(\tau, t) d\tau = f_l^-(t); \\ &\frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^+(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}(\tau) R_{15-l}^+(\tau, t) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{25-l}^+(\tau, t) \right] d\tau = f_l^+(t), \quad l=1,2. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$f_l(t) = (-1)^{l+1} (-iA_1 \cos(\frac{\pi l}{2} - \theta_0) + iB_1 \kappa_0 \sin(\frac{\pi l}{2} - \theta_0)) e^{i\kappa_0 \xi \cos \theta_0 \Delta_1};$$

$$f_1^\pm(t) = A_1 \kappa_0 \frac{1 - 2\xi^2 \cos^2 \theta_0}{\xi} e^{i\kappa_0 \xi \cos \theta_0 \Delta^\pm} - B_1 \kappa_0 \sin 2\theta_0 e^{i\kappa_0 \cos \theta_0 \Delta^\pm};$$

$$f_2^\pm(t) = A_1 \kappa_0 \xi \sin 2\theta_0 e^{i\kappa_0 \xi \cos \theta_0 \Delta^\pm} - B_1 \kappa_0 \cos 2\theta_0 e^{i\kappa_0 \cos \theta_0 \Delta^\pm};$$

$$\Delta_1 = \Delta t + 0,5\varepsilon^+ + 0,5\varepsilon^-; \quad \Delta^\pm = \Delta t^\pm + 0,5\varepsilon^\pm \pm 0,5; \quad A_1 = A/a; \quad B_1 = B/a.$$

Враховуючи поведінку напружень біля кінців включення і вершин тріщин, розв'язок системи (14) слід розшукувати у вигляді:

$$\varphi_l(\tau) = \psi_l(\tau) / \sqrt{1-\tau^2}; \quad \varphi_l^\pm(\tau) = (1 \mp \tau)^{-1/2} \psi_l^\pm(\tau); \quad l=1,2. \quad (15)$$

Функції $\psi_l(\tau)$, $\psi_l^\pm(\tau)$ вважаються такими, що задовільняють умовам Гельдера і наближуються наступними інтерполяційними поліномами:

$$\begin{aligned} \psi_l(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau - \tau_m)}; \quad \tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}; \\ \psi_l^\pm(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\tau)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]' (\tau - \tau_m^\pm)}; \quad l=1,2. \end{aligned} \quad (16)$$

В формулах (16) $T_n(\tau)$ – многочлен Чебишева першого роду, $q_n^+(\tau) = P_n^{-1/2,0}(\tau)$, $q_n^-(\tau) = P_n^{0,-1/2}(\tau)$ – многочлени Якобі, τ_m, τ_m^\pm – корені вказаних многочленів. Наближення невідомих функцій згідно формул (15), (16) дає можливість використовувати для сингулярних інтегралів наступні квадратурні формули [3; 5]:

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln|\tau - \tau_k| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m B_{km} \Psi_{lm};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_l^\pm(\tau)}{\tau - \zeta_k^\pm} d\tau = \sum_{m=1}^n \Psi_{lm}^\pm \frac{A_m^\pm}{\tau_{lm}^\pm - \zeta_k^\pm}; \quad l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

де ζ_k^\pm – корні функцій Якобі $J_n^{-1/2,0}(\zeta)$, $J_n^{0,-1/2}(\zeta)$;

$$B_{km} = -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \cos \frac{j\pi(2k-1)}{2n} / j; \quad a_m = \frac{\pi}{n};$$

$$A_m^\pm = \sqrt{2} / \left[\left(1 - (\tau_m^\pm)^2 \right) \left([q_n^\pm(\tau_m^\pm)]' \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Квадратурні формули (17), а також формули Гаусса – Чебишева і Гаусса – Якобі для регулярних інтегралів дають можливість знайти наближений розв’язок системи (14) методом колокації. При цьому, у якості точок колокації в рівняннях, отриманих з умов на включенні, використовуються корені многочленів Чебишева τ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, а в рівняннях, знайдених з умов на тріщинах, корені функцій Якобі другого роду ζ_k^\pm , $k = 1, 2, \dots, n$. В результаті приходимо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій $\varphi_l(\tau)$, $\varphi_l^\pm(\tau)$ у вузлах інтерполяції:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lm} \left[\frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} B_{km} + R_l(\tau_m, \tau_k) \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \Psi_{5-l, m}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \tau_k) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \Psi_{5-l, m}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \tau_k) = f_l(\tau_k); \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lm} R_l^-(\tau_m, \zeta_k^-) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \Psi_{lm}^- \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^- - \zeta_k^-} + R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^-) \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \Psi_{lm}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^-) = f_l^-(\zeta_k^-); \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lm} R_l^+(\tau_m, \zeta_k^+) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \Psi_{lm}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^+) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \Psi_{lm}^+ \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^+ - \zeta_k^+} + R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^+) \right] = f_l^+(\zeta_k^+); \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Після розв'язку системи (19) наближене значення цих функцій знаходяться за формулами (16).

Величинами, що визначають можливість розвитку тріщини, є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які в умовах плоскої деформації визначаються формулами:

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \sigma_y^{1\pm}(x, 0); \\ k_2^\pm &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \tau_{yx}^{1\pm}(x, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Після розв'язку системи (19) безрозмірні значення цих коефіцієнтів можуть бути знайдені за наступними наближеними формулами

$$k_{0l}^\pm = \frac{k_l^\pm}{\mu\sqrt{a}} = -(1 - \xi^2) \sqrt{2\pi} \Delta^\pm \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\pm 1)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]' (1 \mp \tau_m^\pm)}, \quad l=1, 2. \quad (21)$$

Результати числових досліджень. За допомогою формул (21) проведене числове дослідження залежності КІН від безрозмірного хвильового числа в припущенні, що тріщини мають однакову довжину, а фронт хвилі паралельний площини дефекта. У цьому випадку в силу симетрії $b^+ = -b^- = b$, $k_{01}^+ = k_{01}^- = k_{01}$, $k_{02}^+ = k_{02}^- = k_{02}$. Відмітимо, що при дії поперечної хвилі, КІН, пов'язаний із дотичними напруженнями, дорівнює нулю, а при дії поздовжньої хвилі, – пов'язаний із нормальним напруженням. Результати розрахунків КІН при дії поздовжніх і поперечних хвиль приведені у виді графіків на рис. 2, рис. 3 відповідно. Кожна крива побудована для вказаного значення щодо відносної довжини включення $\varepsilon = b/a$.

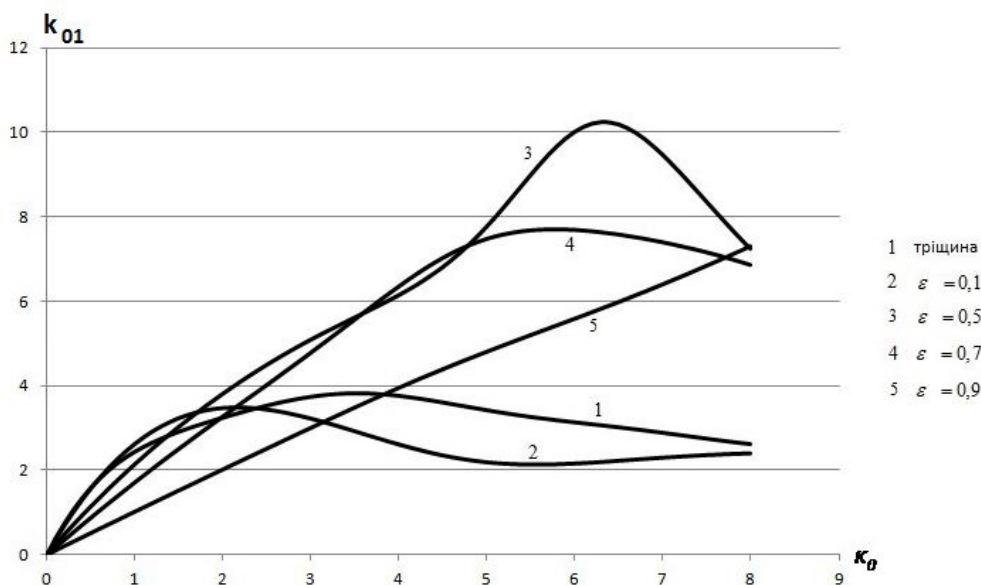


Рис. 2. - Залежність безрозмірних значень КІН від безрозмірного хвильового числа при дії поздовжніх хвиль

Висновки. Встановлено що, при зменшенні значення ε значення КІН наближуються до значень КІН для тріщини [6]. Поведінка КІН при зростанні ε подібна поведінці КІН для жорсткого включення [7]. В усіх випадках виявлене існування частоти, при якій спостерігається максимум КІН.

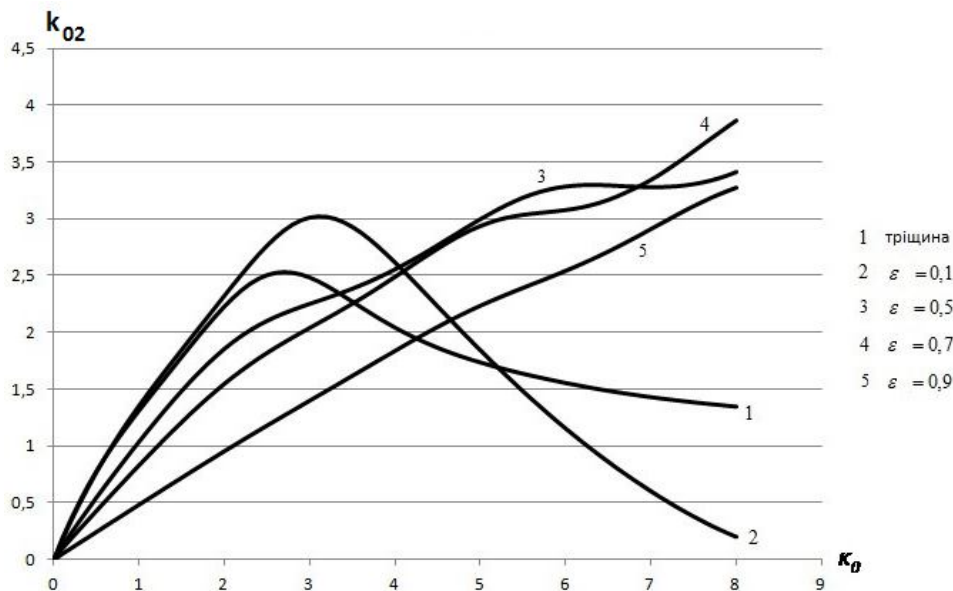


Рис. 3. - Залежність безрозмірних значень КІН від безрозмірного хвильового числа при дії поперечних хвиль.

Також аналіз графіків на рис. 2 і рис. 3 показує, що у випадку неповного заповнення тріщин ін'єкційним матеріалом великої жорсткості при деяких частотах спостерігаються значення КІН, які перевищують їх значення для незалікованих тріщин.

Бібліографічні посилання

1. **Акопян В. Н.** Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов / В. Н. Акопян // Ереван: Гитуцон, 2014. – 323с.
2. **Акопян В. Н.** Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной / В. Н. Акопян, А. А. Амирджян // Изв. нац. академии наук Армении. Механика. – 2015. – Т. 68 – № 1. – С.25–36.
3. **Андреев А. В.** Развитие методов прямого численного решения одномерных интегродифференциальных уравнений механики / А. В. Андреев // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2007. - № 2. - С.50–65.
4. **Маруха В. І** Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. / В. І. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк // Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідниковий посібник під. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом. – 2009. – Т. 12. – 260 с.
5. **Назарчук З. Т.** Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З. Т. Назарчук // К.: Наукова Думка, 1989. – 535 с.
6. **Попов В. Г.** Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы / В. Г. Попов, А. Э. Улановский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995.–№ 4. – С. 99–109.
7. **Попов В. Г.** Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение / В. Г. Попов // Динамические системы. – 1993. – Вып 12. - С. 14–23.
8. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982.– 344 с.

9. **Силованюк В. П.** Зміцнення бетону в результаті заповнення пор та порожнин / В. П. Силованюк, В. І. Маруха, Р. Я. Юхим, Н. В. Онишак // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – Т. 46. – № 1. – С. 62–66.
10. **Силованюк В. П.** Ресурс міцності відновлених за ін'єкційними технологіями пошкоджених елементів споруд тривалої експлуатації. Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. / В. П. Силованюк, В. І. Маруха, Н. В. Онишак // Праці VI Міжнарод. наук. конф. – Львів, ФМІ НАНУ - 2009. – С. 115–124.
11. **Силованюк В. П.** Вплив повзучості ін'єкційних матеріалів на ефективність заліковування тріщин в бетоні / В. П. Силованюк, А. В. Ревенко, Н. В. Онишак // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – Луцьк - 2013. – Вип. 41. – Ч. 2. – С. 164–169.
12. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим – Львів: Дослід.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
13. **Шацький І. П.** Задачі згину пластин із частково залікованою тріщиною. / І. П. Шацький // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2014. – № 1 – С. 91–93.

Надійшла до редакції 1.02.2017

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ С ТРЕЩИНАМИ НА ПРОДОЛЖЕННИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

А. С. Мишарин, В. Г. Попов, д-р физ.-мат. наук

*Национальный университет «Одесская морская академия»,
Одесса, Украина*

Решена плоская динамическая задача теории упругости о взаимодействии плоских упругих волн со сложным дефектом в виде включения с трещинами на продолжении. Перемещение и напряжения в матрице представлены в виде разрывных решений уравнений Ламе. После удовлетворения граничным условиям исходная задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков на дефекте. Для численного решения полученной системы используется численный метод и специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, система сингулярных интегральных уравнений, плоские упругие волны, включение, трещины.

UCD 539.3

THE STRESS CONCENTRATION NEAR THE THIN RIGID INCLUSION WITH CRACKS ON THE CONTINUATION UNDER THE ACTION OF PLANE WAVES

A. S. Misharin, V. G. Popov Dr. Sci. (Phys.-Math.)

*National University «Odessa Maritime Academy»,
Odessa, Ukraine*

The plane dynamic problem of elasticity about the interaction of plane elastic waves with a complex defect in the form of inclusion with cracks on the continuation of the inclusion is solved. Displacements and stresses in the matrix are presented in the form of discontinuous solutions of Lamé equations. After satisfaction of boundary conditions the initial problem is reduced to a system of singular integral equations for the unknown jumps on the defect. For numerical solution of the system we used the numerical method and special quadrature formulas for singular integrals.

Keywords: stress intensity factor, system of singular integral equations, plane elastic waves, inclusion, cracks.

The isotropic elastic medium which in the condition of the plane strain is considered. There is a defect in a form of a thin strip inclusion with two cracks on the continuation of it. This defect occupied the segment $y = 0, |x| \leq a$ in the plane Oxy .

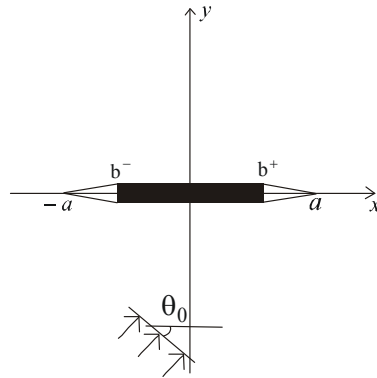


Fig. 1. – The inclusion with the cracks on the continuation of it

It is required to determine the stress state near the defect under the action on it plane harmonic waves.

Displacements are determined from the equations of the motion of an elastic medium in terms of plane deformation. Boundary conditions are formed in the assumption that the inclusion is fully coupled with the medium (matrix), and the surface of cracks are not loaded.

The method of the solution is based on the presentation of displacements in the body as a superposition of three discontinuous solutions which are built according to the cracks and the inclusion. Then, in the case of satisfaction of the boundary conditions we obtain the system of singular integral equations concerning the jumps of stresses and displacements to defect.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^-(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_l^-(\tau-t) - R_l^{*-}(t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_{5-l}(\tau) F_l(\tau-t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^+(\tau) \left[R_l^{*+}(\tau-t) - R_l^{*+}(t) \right] d\tau = f_l(t); \\ & \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^-(\tau) \left[R_{l+2}^{*-}(\tau-t) - R_{l+2}^{*-}(t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_{5-l}(\tau) F_{l+2}(\tau-t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^+(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{l+2}^+(\tau-t) - R_{l+2}^{*+}(t) \right] d\tau = f_{l+2}(t); \\ & \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^-(\tau) \left[R_{5-l}^{*-}(\tau-t) - R_{5-l}^{*-}(t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_{5-l}(\tau) \left[\frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + \right. \\ & \quad \left. + F_{5-l}(\tau-t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi_{-1}} \int \varphi_l^+(\tau) \left[R_{5-l}^{*+}(\tau-t) - R_{5-l}^{*+}(t) \right] d\tau = f_{5-l}(t), \quad l = 3, 4. \end{aligned} \right.$$

For the numerical solution of this system we propose the collocation method based

on the use of the special quadratic formulas for singular integrals and the quadratic formulas for the integrals with regular kernels.

The formulas for calculating of the stress intensity factor (SIF) for cracks, amplitude of translational motion and the rotation angle of the inclusion are obtained. The numerical research of SIF depending the dimensionless wave number is done. The frequencies with a maximum value of SIF are found.

References

1. **Akopyan V. N.** Mixed boundary problems on the interaction of continuous deformed bodies with stress concentrators of various types / V. N. Akopyan // Yerevan: Gitutsun, 2014. - 323 p. (in Russian).
2. **Hakobyan V. N.** Stress state in the half-medium with absolutely rigid inclusions and cracks reaching the border / V. N. Hakobyan, A. A. Amirjanyan // Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics - Vol. 68 – No 1. - 2015. - P. 25 - 36. (in Russian).
3. **Andreev A. V.** Development of methods for direct numerical solution of one-dimensional integro-differential equations of mechanics / A. V. Andreev // Izv. RAS. MTT. - 2007. - No 2. - P. 50-65. (in Russian).
4. **Maruha V. I.** Injection technology restoring damaged buildings operability long operation / V. I. Maruha, V. V. Panasyuk, V. P. Sylovanyuk // Fracture mechanics and strength of materials: reference manual Sub. Ed. V. V. Panasyuk. – Lviv: Spolom. - 2009 – Vol. 12 – 260 p. (in Ukrainian).
5. **Nazarchuk Z. T.** The numerical investigation of wave diffraction on cylindrical structures / Z. T. Nazarchuk.– Kyiv: Naukova Dumka, 1989. - 535 p. (in Russian).
6. **Popov V. G.** Comparative analysis of diffraction fields during the passage of elastic waves through defects of various nature / V. G. Popov, A. E. Ulanovskii // Izv. RAS. Mechanics of a solid. - 1995.- No 4. - P. 99-109. (in Russian).
7. **Popov V. G.** The Comparison of the displacement and stress fields in the diffraction of elastic shear waves on various defects: a crack and a thin rigid inclusion / V. G. Popov // Dynamical systems. - 1993. - No12. - P. 14-23. (in Russian).
8. **Popov G. Ya.** The concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements / G. Ya. Popov. – Moscow: Nauka, 1982. - 344 p. (in Russian).
9. **Sylovanyuk V. P.** Strengthening of concrete as a result of filling the pores and cavities / V. P. Sylovanyuk, V. I. Maruha, R. Ya. Ukhyim, N. V. Onyschak // Physico-chemical mechanics of materials. - 2010. - Vol. 46. – No 1. - P. 62-66. (in Ukrainian).
10. **Sylovanyuk V. P.** Resource strength by the injection technology of damaged buildings long operation fracture mechanics and strength of materials structures / V. P. Sylovanyuk, V. I. Maruha, N. V. Onyschak // Proceedings of the VI Intern. Science. Konf. - Lviv, PhMI - 2009. - P. 115-124. (in Ukrainian).
11. **Sylovanyuk V. P.** Effect of creep injection material efficiency healing of cracks in concrete / V. P. Sylovanyuk, A. V. Revenko, N. V. Onyschak // Interuniversity collection «Science notes». – Lutsk – 2013 - No 41. – Part 2 - P. 164-169. (in Ukrainian).
12. **Sulim G. T.** The base of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions / G. T. Sulim. – Lviv: Doslid.-issued. NTSh center, 2007. - 716 p. (in Ukrainian).
13. **Shatsky I. P.** The problems of bending the plates from partially healed crack / I. P. Shatsky // Journal of Donetsk National University. Ser. A: Natural sciences. - 2014. – No 1. – P. 91-93. (in Ukrainian).