

УДК 539.3

Н. И. Ободан, д-р техн. наук, Н. А. Гук, д-р фіз.-мат. наук, Н. Л. Козакова

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗОНЫ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА ДВУХ СЛОЕВ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Разработан метод идентификации зоны повреждения межслоевых связей в двухслойных криволинейных конструкциях. Для решения прямой задачи использована вариационная постановка для соответствующей нелинейной краевой задачи с ограничениями. Задача идентификации решена методом обратных задач, реализованным с помощью метода вектора спада. Произведен численный анализ сходимости процесса обнаружения дефекта, установлены границы применимости линейной модели деформирования при решении задачи идентификации.

**Ключевые слова:** плоская контактная задача, двухслойная криволинейная конструкция, односторонние связи, обратная граничная задача, метод вектора спада.

**Введение.** Одним из распространенных методов косвенного определения дефектов в деформированных системах является наблюдение за ее деформированным состоянием и его идентификация в терминах параметров системы. При этом процедура идентификации эффективно реализуется методом обратных задач [8] в сочетании с аналитическими [2] или численными методами оптимизации [6].

Наиболее распространенными здесь являются коэффициентные задачи, когда определяются физические, геометрические свойства системы или внешние воздействия на нее [3; 11]. Между тем весьма важным является класс граничных задач для сложных систем, где определяются границы применимости тех или иных моделей деформирования [1; 9; 10]. Именно такой задачей является задача об определении зон односторонних связей в контактирующих телах.

**Постановка задачи.** Рассматривается плоская упругая система, состоящая из сцепленных криволинейных слоев: нижнего, имеющего толщину  $h^{(1)}$  и модуль упругости  $E_1$ , и слоя толщины  $h^{(2)}$ , модуль упругости которого  $E_2$  (рис. 1).

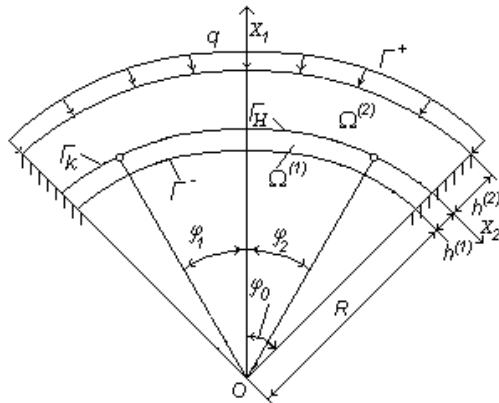


Рис. 1. - Схема нагружения двухслойной конструкции

Система занимает конечные области:

$$\Omega_k = \left\{ x^k, x^k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\} \in R^2, \quad R \leq x_1^{(1)} \leq R + h^{(1)}, \right. \\ \left. R + h^{(2)} \leq x_1^{(2)} \leq R + h^{(1)} + h^{(2)}, \quad -\varphi_0 \leq x_2^{(k)} \leq \varphi_0 \right\},$$

где  $k$  – номер подсистемы,  $R$  – радиус кривизны. Линия контакта слоев  $r_k$  описывается дугой окружности радиуса  $R + h^{(1)}$  и совпадает с направлением оси  $x_2^{(2)}$ . Используется полярная система координат  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ .

Предполагается, что на неизвестной части  $\Gamma_H$  ( $\varphi_1 \leq x_2^{(k)} \leq \varphi_2$ ) зоны контакта  $\Gamma_K$ , для которой отсутствует сцепление между слоями, имеет место односторонний контакт. Система находится под действием нормальной к поверхности  $x_1^{(1)} = R + h$ , где  $h = h^{(1)} + h^{(2)}$ , распределенной нагрузки  $q$ .

На внутренней поверхности  $\Gamma^-$  криволинейного слоя известны (измерены) значения функций деформаций (перемещений)

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \tilde{\varepsilon}^*(R, x_2^{(2)}) \quad \text{или} \quad u(R, x_2^{(2)}) = \tilde{u}^*(R, x_2^{(2)}), \quad (1)$$

где  $-\varphi_0 \leq x_2^{(2)} \leq \varphi_0$ ,  $u = \{u_1, u_2\}^T$  – вектор перемещений,  $\tilde{\varepsilon}(x) = \{\varepsilon_{11}(R, x_2^{(2)}), \varepsilon_{12}(R, x_2^{(2)}), \varepsilon_{22}(R, x_2^{(2)})\}^T$  – вектор деформаций.

По известным значениям  $\varepsilon^*(x)$  или  $u^*(x)$  необходимо идентифицировать местоположение и размер зоны  $\Gamma_H$ .

Сформулированная задача представляет собой обратную граничную задачу для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы. Квазирешение сформулированной задачи может быть записано как [9]

$$\Gamma_H = \arg \min_{\Gamma_H} J(\Gamma_H), \quad \Gamma_H \in \bar{\Gamma}_H, \quad (2)$$

где  $J(\Gamma_H) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\varepsilon(\Gamma_H) - \varepsilon^*(\Gamma_H))(\varepsilon(\Gamma_H) - \varepsilon^*(\Gamma_H))^T dx_2^{(2)}$ ,

или  $J(\Gamma_H) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u(\Gamma_H) - u^*(\Gamma_H))(u(\Gamma_H) - u^*(\Gamma_H))^T dx_2^{(2)}$ ,

где  $\bar{\Gamma}_H = \left\{ \bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)} \in C_\Gamma, \quad \varphi_1 \leq \bar{x}_2^{(2)} \leq \varphi_2, \quad a \leq \frac{d\Gamma_H}{du} \leq b \right\}$ ,  $C_\Gamma$  –пространство допустимых граничных значений,  $a > 0, b > 0$  –константы,  $\varepsilon(\Gamma_H), u(\Gamma_H)$  – вектор деформаций и перемещений соответственно.

**Математическая модель.** Разрешающая система нелинейных уравнений, в предположении о малости деформаций в сравнении с квадратами углов поворота, имеет приведенный ниже вид [4].

Геометрические соотношения (номера слоев опущены) –

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\Theta^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\Theta^2, \quad \varepsilon_{12} = e_{12}, \quad (3)$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{1}{x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_1 \right),$$

$$e_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_2}{x_1}, \quad 2\Theta = \left( \frac{u_2}{x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (4)$$

Уравнения равновесия деформированного элемента:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{(\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{\sigma}_{22})}{x_1} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{21}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{(\tilde{\sigma}_{21} + \tilde{\sigma}_{12})}{x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_1} = 0, \quad (5)$$

где  $\tilde{\sigma}_{11} = \sigma_{11} - \sigma_{12}\Theta$ ,  $\tilde{\sigma}_{12} = \sigma_{12} + \sigma_{22}\Theta$ ,  $\tilde{\sigma}_{21} = \sigma_{21} - \sigma_{11}\Theta$ ,  $\tilde{\sigma}_{22} = \sigma_{22} + \sigma_{21}\Theta$ ,  $\sigma_{ij}(u)$  - напряжения, выраженные через перемещения.

В качестве физического закона принят закон Гука (модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$  заданы для слоев 1 и 2 соответственно).

Граничные условия имеют вид

$$u_1(x_1^k, \pm \varphi_0) = 0, \quad u_2(x_1^k, \pm \varphi_0) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

На верхней границе  $\Gamma^+$ ,  $x_1^1 = R + h$  выполняются условия

$$\sigma_{11}^{(2)}(u) = q, \quad -\varphi_0 \leq x_2^{(2)} \leq \varphi_0. \quad (7)$$

На нижней границе  $x_1^{(1)} = R$ ,

$$\sigma_{11}^{(1)}(u) = 0. \quad (8)$$

На части границы  $\Gamma_K / \Gamma_H$  выполняются условия полного контакта

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}. \quad (9)$$

На линии  $\Gamma_H$ , где имеют место односторонние связи, выполняются условия

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)}, \quad u_1^{(k)} \leq 0, \quad \text{или} \quad (10)$$

$$\sigma_{11}^{(k)} \leq 0, \quad u_1^{(k)} \cdot \sigma_{11}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

Предполагается, что существуют границы  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_O$ , соответствующие зоне контакта и отрыва соответственно, такие что  $\Gamma_C \cup \Gamma_O = \Gamma_K$ ,  $\Gamma_C \cap \Gamma_O = \emptyset$ .

В зоне отрыва для всех  $x_2 \in \Gamma_O$ ,

$$\sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$ ,  $i, j = 1, 2$  - компоненты тензора напряжений и перемещений в верхнем слое ( $k = 2$ ) и нижнем ( $k = 1$ ).

Для описания неизвестных участков границ введем характеристическую функцию для точек границы  $\Gamma_O$  в виде

$$\gamma(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } u_1^{(1)} - u_1^{(2)} > 0, \quad x_2 \in \Gamma_O, \\ 1 & \text{при } u_1^{(1)} - u_1^{(2)} \leq 0, \quad x_2 \notin \Gamma_O. \end{cases} \quad (13)$$

С учетом соотношений (13) вариационная постановка краевой задачи (3) – (12) будет иметь вид

$$U = \arg \min_{u \in \bar{U}} \mathcal{E}(u, \tilde{u}, \tilde{\sigma}), \quad (14)$$

где функционал имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, \tilde{u}, \tilde{\sigma}) = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_k} \frac{1}{2} C_{(k)}^{ijlm} \varepsilon_{ij}^{(k)}(u) \varepsilon_{lm}^{(k)}(u) d\Omega_k + \right. \\ & + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left[ \left( q(x_2) u_1^{(1)}(R+h, x_2) + \gamma(x_2) \left( \tilde{\sigma}_{11} (u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) + \tilde{\sigma}_{12} (u_2^{(1)} - u_2^{(2)}) \right) \right) \Big|_{x_1=0} + \right. \\ & \left. \left. + (1 - \gamma(x_2)) \left( \sigma_{11}^{(k)}(u) (u_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{(k)}) + \sigma_{12}^{(k)}(u) (u_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{(k)}) \right) \Big|_{x_1=0} \right] dx_2 \Big\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $U = \{u, \tilde{u}, \tilde{\sigma}\}^T$ ,  $u = \{u^{(k)}\}$ ,  $u^{(k)} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\}^T$ ,  $\tilde{u} = \{\tilde{u}^{(k)}\}$ ,  $\tilde{u}^{(k)} = \{\tilde{u}_1^{(k)}, \tilde{u}_2^{(k)}\}^T$ ,  $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}^{(k)}\}$ ,  $\tilde{\sigma}^{(k)} = \{\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}, \tilde{\sigma}_{12}^{(k)}\}^T$ ,  $C_{(k)}^{ijlm}$  – коэффициенты жесткости,  $i, j, l, m = 1, 2$ ,  $\tilde{u}^{(k)}$ ,  $\tilde{\sigma}^{(k)}$  – варьируемые значения перемещений и напряжений на линии контакта,  $\varepsilon_{ij}$  – деформации, вычисляемые через перемещения  $u_i$  с учетом геометрической нелинейности. Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Характеристическая функция  $\gamma(x_2)$ , определенная соотношением (13), удовлетворяет соотношениям (14) – (15).

**Метод решения прямой и обратной задачи.** Для построения решения задачи (14) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации [10]. Для этого на области  $\Omega_k = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$  вводится сетка с узлами в точках с координатами  $X_s$ ,  $s = \overline{1, N}$ , где  $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$ , тогда неизвестные функции  $u(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $u^*(x)$  представляются в виде векторов, компонентами которых являются значения функций задачи в узлах сетки.

$$\begin{aligned} u &= \{u_i\}^T, \quad u_i = \{u_{ik}\}^T, \quad u_{ik} = \{u_{iks}\}^T, \\ \tilde{u} &= \{\tilde{u}_i\}^T, \quad \tilde{u}_i = \{\tilde{u}_{ik}\}^T, \quad \tilde{u}_{ik} = \{\tilde{u}_{iks}\}^T, \quad \sigma_{ij} = \{\sigma_{ijs}\}^T, \\ \gamma_s &= 0 \vee 1, \quad i, j = 1, 2, \quad s = \overline{1, N}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Узлы, лежащие на границе  $\Gamma_H$ , нумеруются как  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ . Из элементов вектора  $P$  могут быть сформированы вектора

$$P^C = \{p_1^C, p_2^C, \dots, p_{c_1}^C\}, \quad P^O = \{p_1^O, p_2^O, \dots, p_{c_2}^O\}, \quad (17)$$

$$c_1 + c_2 = M,$$

которые определяют узлы сетки, соответствующие зонам контакта и отрыва путем вычисления значения  $\gamma$  в соответствии с условиями (13).

После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал (15), интегрирования и выполнения процедуры (17) получим разрешающую систему нелинейных уравнений  $N$ -го порядка

$$Q(u) = G, \quad (18)$$

эквивалентную условию  $\partial \tilde{\mathcal{E}}^* / \partial u_{iks} = 0$ ,  $i, k = \overline{1, 2}$ ,  $s = \overline{1, N}$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}^*$  – значения функционала  $\tilde{\mathcal{E}}$  после подстановки конечно элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования,  $Q$  – нелинейная вектор - функция, зависящая от значений векторов  $\gamma_s$ ,  $G$  – вектор правой части.

Для решения системы нелинейных уравнений (14) используется метод продолжения по параметру  $q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta q$ . Тогда разрешающая система уравнений (18) приобретает вид

$$A(u^{(n-1)}) \Delta u^{(n)} = \Delta G(u^{(n-1)}, \tilde{u}^{(n-1)}), \quad u^{(n)} = u^{(n-1)} + \Delta u^{(n)}, \quad (19)$$

где  $A(u^{(n-1)}) = \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial u_{iks}} \right\}_{u^{(n-1)}}$ ,  $\Delta G$  – приращение правой части при изменении номера шага  $n$ .

Для выполнения условия минимума  $\tilde{\mathcal{E}}$  по  $\tilde{u}_{is}$ ,  $s = \overline{1, N}$  используется метод Ньютона

$$\tilde{u}^{(l)} = \tilde{u}^{(l-1)} - (C^{(l-1)})^{-1} \sigma^{(l-1)} \Big|_{\Gamma_o}. \quad (20)$$

Здесь

$$\sigma^{(l-1)} \Big|_{\Gamma_o} = \left\{ \sigma_s^{(l-1)} \right\}^T \Big|_{\Gamma_o}, \quad \sigma_s^{(l-1)} = \left\{ \sigma_{12s}^{(l-1)}, \sigma_{11s}^{(l-1)} \right\}^T \Big|_{\Gamma_o}, \quad x_s \in \Gamma_o, \quad C^{(l-1)} = \left\{ \frac{\partial \sigma(u^{(l-1)}, \tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \right\} \Big|_{\Gamma_o},$$

где  $l$  – номер итерации.

Процедура решения прямой задачи при фиксированных значениях  $\varphi_1, \varphi_2$  описывается алгоритмом 1 [5].

#### Алгоритм 1.

0. Задать  $l=1$ ,  $n=1$ ,  $\sigma_{11s} = q_s^*$ ,  $\sigma_{12s} = 0$  для  $\forall x_s \in \Gamma_+$ ,  $\tilde{u}_{is} = 0$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $\gamma_s^{(1,1)} = 1$ ,  $\varepsilon$  – малое число,  $\Delta q$ ,  $q^*$ ,  $q^{(1)} = \Delta q$ ,  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ .
1. Построить сетку с узлами  $X_s$ ,  $s = \overline{1, N}$ .
2. Сформировать вектор неизвестных  $u$  с учетом условий  $u_{1s}^{(1)} = u_{1s}^{(2)}$ ,  $u_{2s}^{(1)} = u_{2s}^{(2)}$ , для узлов с координатами  $X_s$ , таких что  $X_s \in \Gamma_K$ .
3. Сформировать систему уравнений (19).
4. Определить вектор  $u^{(n,l)}$ ,  $\sigma^{(n,l)}$  по уравнениям (19).
5. Определить вектор  $\gamma_s^{(n,l)}$ ,  $X_s \in \Gamma_K$ , в соответствии с условиями (13).

6. Если  $\exists \gamma_s^{(n,l)} \neq 0$ , то дальше, иначе перейти на пункт 11.
7. Определить номера узлов  $P^{O(n,l)}$ ,  $P^{C(n,l)}$  на основании значений вектора  $\gamma_s^{(n,l)}$ .
8. Создать узлы  $P_i^{O(n,l)}$ ,  $i = \overline{1,2}$ , с соответствующими перемещениями  $u_2^{(1)(n,l)} \neq u_2^{(2)(n,l)}$ , сформировать вектор неизвестных  $u$ .
9. Определить  $\tilde{u}_{is}^{(n,l)}$  по формуле (20),  $l = l + 1$ .
10. Если  $\|\tilde{u}_{is}^{(l)} - \tilde{u}_{is}^{(l-1)}\| \leq \varepsilon$ , где норма вводится как  $\|y\|^2 = \sum_k \sum_s (y_s^{(k)})^2$ , то дальше, иначе перейти на п. 3.
11.  $q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta q$ ,  $n = n + 1$ .
12.  $q^{(n)} \leq q^*$  на п.3, иначе – дальше.
13. Конец.

Для решения обратной задачи, то есть определения значений  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$  по известным значениям  $u^* = \{u_{1s_1}^*, \dots, u_{1s_D}^*\}^T$ , где  $s_i$ ,  $i = \overline{1, D}$  – номер узла, выходящего на границу  $\Gamma^-$ , в котором производится измерение, используется метод вектора спада [7].

Функционал  $J$  после дискретизации приобретает вид

$$\tilde{J} = (u(P) - u^*)^T (u(P) - u^*), \quad (22)$$

а условие (2) запишется в виде

$$P = \arg \min_{P \in \bar{P}} J(P). \quad (23)$$

Пусть  $W$  – дискретное точечное пространство,  $\bar{P}$  – множество допустимых решений,  $\bar{P} \in W$ , причем  $W$  – метрическое пространство с метрикой

$$\rho^2(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^M (\bar{p}_{1i} - \bar{p}_{2i})^2, \quad (24)$$

где  $p_{1i}, p_{2i}$  – координаты точек  $P_1, P_2$  в пространстве  $W$ .

Пусть  $P'$  – некоторое допустимое решение обратной задачи (2). Определим окрестность  $\tilde{W}$  точки  $P'$  с радиусом  $r_1$ , как набор возможных решений  $P'_k$ ,  $k = \overline{1,4}$ , полученных путем добавления (убавления) элементов  $p_i$ , принадлежащих границе  $\Gamma'_H$ , влево и вправо от точек  $s = p_1$ ,  $s = p_M$ .

Вектор спада функции  $J$  в окрестности  $\tilde{W}$  произвольной точки  $P'$  определим как вектор с компонентами  $\Delta_k = J(P_k) - J(P')$ , где  $P_k$ ,  $k = \overline{1,4}$ , – возможные решения обратной задачи, которые принадлежат окрестности  $\tilde{W}$ , а  $J(P_k)$ ,  $J(P')$  вычисляются путем решения задач с помощью алгоритма 1. Очевидно, что при всех  $\Delta_k \geq 0$ ,  $k = \overline{1,4}$ , в окрестности точки  $P'$  эта точка является локальным минимумом функции  $J(P)$ . Если некоторые  $\Delta_k < 0$ , и  $\Delta_{k^*} = \min \Delta_k$ , то точка  $P_{k^*}$  является точкой скорейшего спада функции  $J(P)$ .

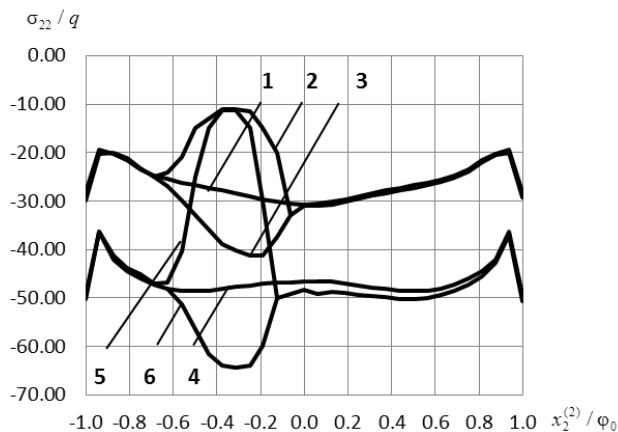
Алгоритм, реализующий метод спада, имеет вид:

**Алгоритм 2**

1. Выбрать начальную точку  $P_0$ , сформировать точки  $P_k$ ,  $k = \overline{1,4}$ .
2. Определить компоненты вектора спада для точки  $P_0$  в направлениях  $P_k$  путем вычисления  $J(P)$  с помощью алгоритма 1. Если все  $\Delta_k \geq 0$ , то  $J(P_0) = \min J(P)$ .
3. Если  $\exists \Delta_k < 0$  для  $k = \overline{1,4}$ , то выбирают  $P_{k^*}$ , соответствующее  $\min \Delta_k$ , которое становится центром новой окрестности  $P_{k^*} = P_0$ .
4. Переход на п.2. Процесс продолжается до тех пор, пока  $\exists \Delta_k < 0$ ,  $k = \overline{1,4}$ .

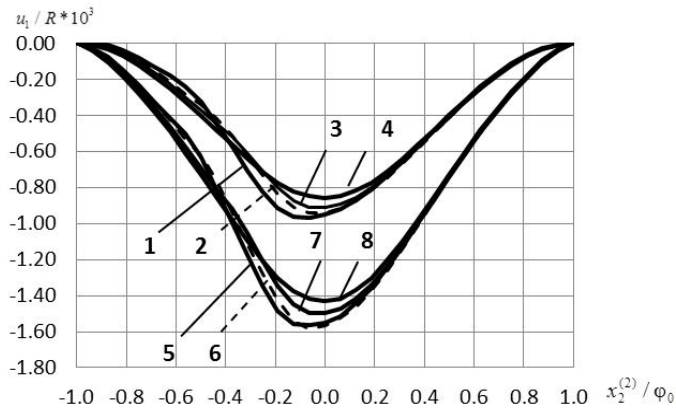
**Результаты расчета.** С помощью предложенного алгоритма был проведен анализ поведения системы, имеющей следующие характеристики: модуль Юнга для верхнего слоя  $E_1 = 1 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.2$ , для нижнего слоя:  $E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  и  $\nu_2 = 0.3$ . На основании исследования выбраны следующие параметры модели:  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $R = 300 \text{ см}$ ,  $h = 1; 2; 4 \text{ см}$ ,  $\varphi_i^* = -\varphi_i / \varphi_0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\eta = R/h = 300; 150; 75$ ,  $\chi = E_2 / E_1 = 200$ . Расчеты проводились с помощью пакета прикладных программ «Cosmos» с использованием нелинейного плоского элемента на каждом шаге алгоритма. Модель рассматриваемой системы, представленная на рис. 1, содержит 551 элемент и 645 узлов.

Описанные выше алгоритмы 1, 2 были использованы для анализа поведения рассматриваемой модели в зависимости от параметров  $\eta$ ,  $\varphi_i^*$  ( $i = 1, 2$ ). Влияние наличия зоны одностороннего контакта ( $\varphi_1^* = -0.5$ ,  $\varphi_2^* = -0.1875$ ) демонстрирует рис. 2, из которого следует, что кольцевые напряжения в указанной зоне возрастают в нижнем слое в  $\sim 1.5$  раза, хотя перемещения изменяются незначительно (рис. 3). Расчеты проведены при значении нагрузки  $\bar{q} = q / q_{кр}^*$ , где  $q_{кр}^*$  – значение нагрузки, при котором в нелинейном расчете фиксируется предельная точка ( $dq / du_{1\text{max}} = 0$ ), что соответствует потере устойчивости системы.



**Рис. 2. – Зависимость относительных кольцевых напряжений при  $\eta = 75$ ,  $\bar{q} = 9.54 \cdot 10^{-2}$ : линия 1 – полное сцепление; линия 2 – со стороны верхнего слоя; линия 3 – со стороны нижнего слоя; при  $\eta = 150$ ,  $\bar{q} = 3.09 \cdot 10^{-1}$ : линия 4 – полное сцепление; линия 5 – со стороны верхнего слоя; линия 6 – со стороны нижнего слоя**

С помощью алгоритма 2 была проведена идентификация зоны отрыва, моделируемая наличием односторонних связей для случая  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\varphi_1^* = -0.5$ ,  $\varphi_2^* = -0.1875$  при  $\eta = 75; 150$ . Множество  $\bar{P}$  было представлено вариантами решений задачи, которые формировались от заданного начального приближения  $P'$  (соответствующего границе  $\Gamma'_H$ ), сформированного в виде вектора значений номеров узлов сетки, в которых выполняются условия одностороннего контакта, с помощью шагов «влево – вправо» от конечных значений узлов сетки, принадлежащих границе  $\Gamma'_H$ . На рис. 3 представлен процесс сходимости значений нормальных перемещений  $u(x)$  к заданным значениям  $u^*(x)$  в зависимости от начального приближения и числа итераций. Аналогичные по точности результаты получаются при использовании данных измерения деформаций.



**Рис. 3. – Сходимость процесса идентификации**  
 при  $\eta=75$ : линия 1 – заданные значения  $u^*$ ; линия 2 – первая итерация;  
 линия 3 – начальное приближение; линия 4 – полное сцепление;  
 при  $\eta=150$ : линия 5 – заданные значения  $u^*$ ; линия 6 – первая итерация;  
 линия 7 – начальное приближение; линия 8 – полное сцепление.

Анализ поведения вектора спада  $\Delta_k$  функций  $J$  на области  $\Omega$  при последовательном выборе начальных приближений  $\Gamma'_H$  на всей линии контакта с различным числом узлов сетки, принадлежащих  $\Gamma'_H$  показал, что функционал  $\Delta_k(\Gamma'_H)$  является многоэкстремальной функцией. На рис. 4 показаны линии уровня функции  $\Delta_k(\Gamma'_H)$ .

Сплошной линией показана граница области притяжения  $\Gamma'_H$  к абсолютному минимуму функции  $\Delta_k$ .

Широкомасштабный численный эксперимент показал, что выбор начального приближения  $\Gamma'_H$ , доставляющего абсолютный минимум функции  $\Delta_k$ , может быть осуществлен с помощью построения области  $\Gamma'_H = P^0$  следующим образом:

- 1) найти значение  $P_d^0$ , соответствующее узлу сетки, где  $P_d^0 = \arg \max_S |u_S^* - \bar{u}_S|$ ,  $S = \overline{1, N}$ , при этом  $\bar{u}$  – вычисленный вектор перемещений для случая полного контакта,
- 2) построить границу  $\Gamma'_H$  путем добавления одного узла сетки влево и вправо от точки  $P_d^0$ .



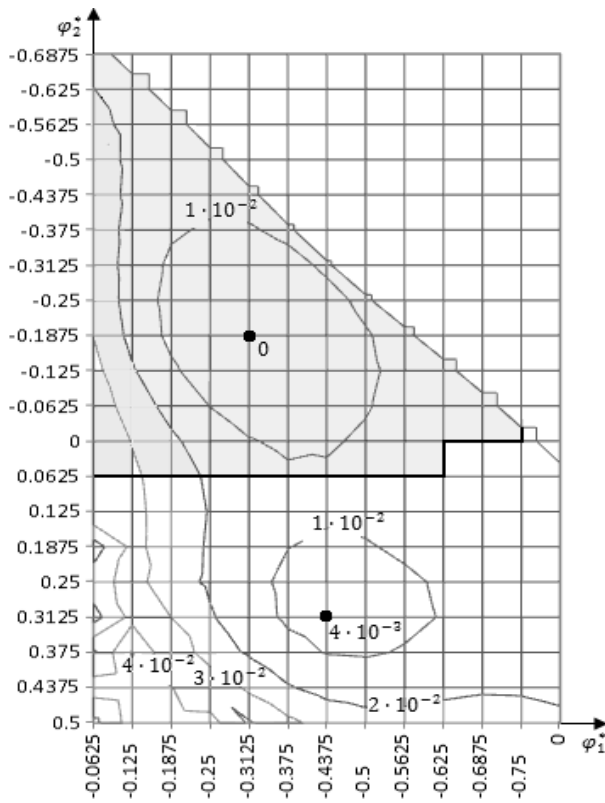


Рис. 4. – Лінії рівня функції  $\Delta_k(\Gamma'_H)$  при  $\eta = 150$

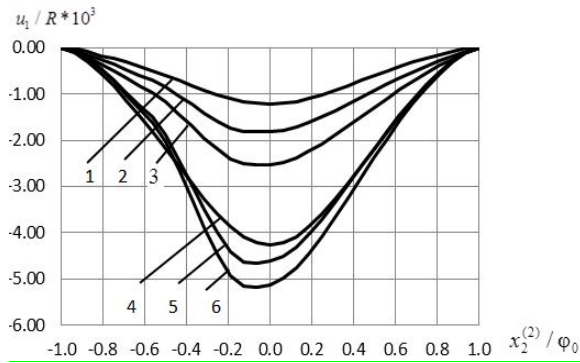
В табл. 1 представлені значення числа ітерацій, що визначають збіжність процесу реалізації алгоритму 2, значення  $\varphi_i^*$  визначають координати граничних вузлів області  $P^0$  в початковому наближенні.

Таблиця 1. Залежність кількості ітерацій від початкового наближення при  $\eta = 150$ .

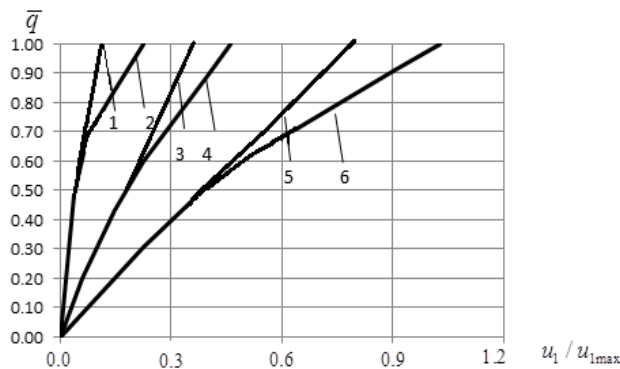
$\varphi_2^* \backslash \varphi_1^*$	-1.0	-0.87	-0.75	-0.63	-0.57	-0.50	-0.44	-0.37	-0.31	-0.25	-0.19	-0.13
-0.57	13	12	10	8	–	–	–	–	–	–	–	–
-0.50	12	11	9	7	5	–	–	–	–	–	–	–
-0.44	11	10	8	6	4	3	–	–	–	–	–	–
-0.37	10	9	7	4	3	2	3	–	–	–	–	–
-0.31	9	8	6	3	2	2	2	3	–	–	–	–
-0.25	6	7	5	2	2	1	2	2	3	–	–	–
-0.19	4	5	3	1	1	0	1	2	2	4	–	–
-0.13	5	4	2	2	1	1	2	2	3	4	5	–
-0.06	8	7	5	3	2	2	2	3	5	6	7	8
0	9	8	6	5	3	2	3	4	5	6	7	8
0.06	10	9	7	6	4	3	4	5	6	7	8	–

Представлена область притяжения к абсолютному минимуму функции  $\Delta_k$ . Кружками обозначены начальные приближения, выбранные в соответствии с указанным выше правилом.

Было исследовано влияние нелинейности процесса деформирования на сходимость итерационного процесса, представленного алгоритмом 2. На рис. 5, рис. 6 представлены результаты линейного и нелинейного прямых расчетов напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы при  $\varphi_1^* = -0.5$ ,  $\varphi_2^* = -0.1875$  в зависимости от уровня нагружения  $\bar{q} = q / q^*$ .



**Рис. 5. – Относительное перемещение на границе раздела точек нижнего и верхнего слоя при  $\eta = 300$  : линия 1 – полное сцепление, нелинейный расчет; линия 2 – наличие зоны отслоения, нелинейный расчет; линия 3 – линейный расчет; при  $\eta = 150$  : линия 4 – полное сцепление, нелинейный расчет; линия 5 – наличие зоны отслоения, нелинейный расчет; линия 6 – линейный расчет**



**Рис.6. – Зависимость максимальных перемещений точки с координатами  $(R, 0)$  от критической нагрузки при  $\eta = 300$  : линия 1 – линейный расчет; 2 – нелинейный расчет; при  $\eta = 150$  : 3 – линейный расчет; 4 – нелинейный расчет; при  $\eta = 75$  : 5 – линейный расчет; 6 – нелинейный расчет**

Так как в условиях действительности система находится при значениях, близких к  $\bar{q} = 1$ , то решение обратной задачи имеет смысл лишь при указанных нагрузках. Численный эксперимент показал, что сходимость алгоритма 2 при использовании линейного расчета наблюдается лишь до значений нагрузки  $\bar{q} \leq 0.6$ , при изменении указанных на рис. 6 параметрах задачи данная оценка может снизиться.

**Выводы.** Проведенный численный анализ позволяет установить, что наличие зон нарушения двустороннего контакта в криволинейных конструкциях приводит к существенному увеличению кольцевых напряжений в зоне отрыва поддерживающего нижнего криволинейного слоя, что, в свою очередь, может стать причиной его «выщелкивания».

Идентификация зоны, где нарушены связи, может быть произведена по результатам мониторинга напряженно-деформированного состояния датчиками перемещений или деформаций с помощью разработанных алгоритмов и пакетов прикладных программ, реализующих метод конечных элементов.

При реализации алгоритма идентификации, базирующегося на методе вектора спада, необходим предварительный анализ данных измерений путем их сопоставления с эталонными данными, полученными при расчете неповрежденной конструкции.

При решении задачи идентификации зоны повреждения криволинейных межслойных связей на основе измерений параметров напряженно-деформированного состояния рассмотренной системы необходимо использовать нелинейную постановку краевой задачи и нелинейный конечный элемент при реализации ее решения методом конечных элементов.

### Библиографические ссылки

1. **Александров В. М.** Механика контактных взаимодействий / В. М. Александров, И. И. Ворович. – М.: Наука, 2001. – 670 с.
2. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
3. **Ватульян А. О.** Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел / А. О. Ватульян // Вестн. Самарск. гос. ун-та. – 2007. – № 4. – С. 93–104.
4. **Новожилов В. В.** Теория упругости / В. В. Новожилов // Л.: Судпромгиз. – 1958. – 374 с.
5. **Ободан Н. И.** Контактное взаимодействие слоя с основанием при комбинированном нагружении / Н. И. Ободан, Н. А. Гук, Н. Л. Козакова // Вісн. ЗНУ. Фіз.-мат. науки. – 2016. – №2. – С.182–192.
6. **Ободан Н. И.** Обратные задачи в теории тонких оболочек / Н. И. Ободан, Н. А. Гук. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 241 p.
7. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко // К.: Наукова думка. – 1988. – 125 с.
8. **Скопецкий В. В.** Идентификационно-псевдоинверсный подход к решению прямых и обратных задач динамики систем с распределенными параметрами / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян, В. Б. Зваридчук // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 32–51.
9. **Устинов К. Б.** О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва / К. Б. Устинов // Вестн. Пермск. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. – 2015. – № 4. – С. 226–245.
10. **Устинов К. Б.** О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины. / К. Б. Устинов // Вестн. Пермск. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. – 2016. – № 2. – С. 131–142.
11. **Янютин Е. Г.** Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39. – № 10. – С. 151–155.
12. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis // K. Bathe, E. L. Wilson. – М.: Nauka, 1985. – 648 p.

Надійшла до редколегії 03.04.2017

УДК 539.3

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЗОНИ З ОДНОСТОРОННІМИ ЗВ'ЯЗКАМИ В ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ДВОХ ШАРІВ МЕТОДОМ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

**Н. І. Ободан**, д-р техн. наук, **Н. А. Гук**, д-р физ.-мат. наук, **Н. Л. Козакова**  
*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*  
*Дніпро, Україна*

Розроблено метод ідентифікації зони пошкодження міжшарових зв'язків в двошарових криволінійних конструкціях. Для розв'язання прямої задачі використана варіаційна постановка для відповідної нелінійної крайової задачі з обмеженнями. Задача ідентифікації вирішена методом обернених задач, реалізованим за допомогою методу вектора спаду. Зроблено числовий аналіз збіжності процесу виявлення дефекту, встановлені межі застосування лінійної моделі деформування при вирішенні задачі ідентифікації.

**Ключові слова:** плоска контактна задача, двошарова криволінійна конструкція, односторонні зв'язки, обернена гранична задача, метод вектора спаду.

УДК 539.3

## IDENTIFICATION OF THE ZONE WITH UNILATERAL BONDS IN THE FIELD OF CONTACT OF TWO LAYERS BY METHOD OF THE INVERSE TASKS

**N. I. Obodan**, Dr. Sci. (Tech.), **N. A. Guk**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), **N. L. Kozakova**  
*Oles Honchar Dnipropetrovsk National University*  
*Dnipro, Ukraine*

A method for identifying the damage zone of interlayer bonds in two-layered curvilinear structures has been developed. To solve a direct problem, we use a variational formulation for the corresponding nonlinear boundary value problem with constraints. The problem of identification is solved by the inverse problem method realized with the method of the recession vector. A numerical analysis is made of the convergence of the defect detection process, and the limits of applicability of the linear deformation model for solving the identification problem are established.

**Keywords:** plane contact problem, two-layer curvilinear construction, one-sided connections, inverse boundary value problem, recession vector method.

An elastic annular two-layered arc system with different mechanical characteristics is considered (Fig. 1). The top layer is loaded with a uniformly distributed normal load, which does not change its direction during deformation. Straight lines of both layers are clamped.

It is assumed that in the unknown part  $\Gamma_H (\varphi_1 \leq x_2^{(k)} \leq \varphi_2)$  of the contact zone  $\Gamma_K$ , for which there is no cohesion between the layers, there is a one-sided contact, the bonding zones remain unchanged during deformation. The values of the deformation functions (displacements) on the inner surface  $\Gamma^-$  of the curvilinear layer are known (measured), along which it is necessary to identify the location and size of the zone  $\Gamma_H$ , depending on the values of the geometric and physical parameters of the system. The problem is considered in the framework of a planar geometrically nonlinear theory of elasticity. Numerical results were obtained using the FEM technique.

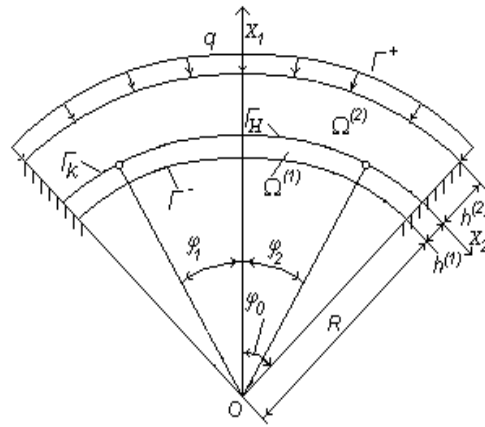


Fig. 1. – Loading scheme of a two-layer structure

**Conclusions.** The numerical analysis allows us to establish that: The presence of zones of violation of bilateral contact in curvilinear structures leads to a significant increase in ring stresses in the tearing-off zone of the supporting lower curvilinear layer, which can cause it to «snap out». Identification of the zone where communications are broken can be made based on the results of monitoring the stress-strain state by displacement or deformation sensors with the help of developed algorithms and software packages implementing the finite element method.

When implementing the identification algorithm based on the recession vector method, a preliminary analysis of the measurement data by comparing them with the reference data obtained in the calculation of the intact structure is necessary.

When solving the problem of identifying the zone of damage to curvilinear inter-layer bonds based on measurements of the parameters of the stress-strain state of the considered system, it is necessary to use a nonlinear formulation of the boundary value problem and a nonlinear finite element in the realization of its solution by the finite element method.

## References

1. **Alexandrov V. M.** Mekhanika of contact interactions / V. M. Alexandrov, I. I. Vorovich. – Moscow: Nauka, 2001. – 670 p. (in Russian).
2. **Vatulyan A. O.** The inverse tasks in mechanics of a deformable solid body (bodies). O. Vatulyan. – Moscow: Fizmatlit, 2007. – 222 p. (in Russian).
3. **Vatulyan A. O.** Problems of identification of the nonuniform properties of solid bodies. O. Vatulyan // Messenger Samarsk. state. un-t. – 2007. – No. 4. – P. 93–104. (in Russian).
4. **Novozhilov V. V.** Elastic theory / V. V. Novozhilov/L.: Sudpromgiz. – 1958. – 374 p. (in Russian).
5. **Obodan N. I.** The inverse tasks in the theory of thin envelopes / N. I. Obodan, N. A. Guk. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2012. – 241 p. (in Russian).
6. **Obodan N. I.** Contact interaction of a layer with the basis at the combined loading / N. I. Obodan, N. A. Guk, N. L. Kozakova // Visnik ZNU. Fiz.-mat. nauk. – 2016. – No. 2. – P. 182–192. (in Russian).
7. **Sergienko I. V.** Mathematical models and methods of solution of problems of discrete optimization / I. V. Sergienko. – Kyiv: Naukova Dumka, 1988. – 125 p.

8. **Skopetsky V. V.** Identification and pseudo-inverse approach to the solution of direct and inverse problems of dynamics of distributed parameter systems / V. V. Skopetsky, V. A. Stojan, V. B. Zvaridchuk // Cybernetics and systems analysis. – 2004. – No. 4. – P. 32–51. (in Russian).
9. **Ustinov K. B.** About stratification of a strip on a demarcation of resilient properties. Part 1. Problem definition, case of a normal separation / K. B. Ustinov // Permsk Bulletin. national. research politekh. un-t. Mechanics. – 2015. – No. 4. – P. 226–245. (in Russian).
10. **Ustinov K. B.** About stratification of a strip on a demarcation of resilient properties. Part 2. Case of a shift crack. / K. B. Ustinov // Permsk Bulletin. national. research politekh. un-t. Mechanics. – 2016. – No. 2. – P. 131-142. (in Russian).
11. **Yanyutin E. G.** Identification of a pulse loading of a resilient rectangular plate / E. G. Yanyutin, A. V. Voropay // Applied mechanics – 2003. – Vol. 39. – No. 10. – P. 151–155. (in Russian).
12. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis // K. Bathe, E. L. Wilson. – Moscow: Nauka, 1985. – 648 p.