

УДК 539.312

В. І. Пожуєв¹, д-р фіз.-мат. наук, А. В. Пожуєв², канд. фіз.-мат. наук,
А. В. Фасоляк¹

¹Запорізький національний технічний університет

²Запорізька державна інженерна академія

ДИНАМІКА, ПІДКРІПЛЕНИХ КІЛЬЦЕВИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ, ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто нестационарну динамічну задачу для підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості, циліндричної оболонки у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі. Ціллю є дослідження впливу кільцевих ребер жорсткості та їх взаємного розташування на динамічний напружено-деформований стан даної механічної системи. Науковою новизною є розв'язок нестационарної динамічної задачі для дискретно-підкріпленої, кільцевими ребрами жорсткості, циліндричної оболонки у пружному тривимірному середовищі. Розв'язок даної задачі отримано розкладання невідомих функцій у тригонометричний ряд Фур'є та методом інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа.

Ключові слова: циліндрична оболонка, кільцеві ребра жорсткості, тривимірне пружне середовище, динамічне навантаження, невісесиметрична задача.

Вступ. На сьогодні, важливе місце для практики мають динамічні задачі для пружних, тонких циліндричних оболонок у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі під дією нестационарних навантажень. Зокрема до таких розрахункових схем зводяться задачі моделювання динаміки трубопроводів та тунелів глибокого залягання (глибина залягання перевищує 10 радіусів оболонки). В подібних задачах напруження і навантаження, викликані дією поверхневих нестационарних динамічних навантажень можуть значно перевищувати відповідні статичні значення, а тому не можуть бути враховані за допомогою коефіцієнта динамічності. Тому дана задача є актуальною.

На сьогодні досить добре вивчена динаміка циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі. У [2] досліджені подібні задачі у стаціонарній постановці. У нестационарній постановці такі задачі розглянуті зокрема у [7; 8], причому у [7] у вісесиметричній постановці, а в [8] – невісесиметричній.

Також важливе значення для практики мають оболонки, які підкріплені кільцевими ребрами жорсткості. В [2] розглянута подібна динамічна задача у стаціонарній постановці з використанням теорії конструктивно-ортотропних оболонок.

Дану роботу присвячено нестационарним динамічним задачам для дискретно підкріплених кільцевими ребрами жорсткості циліндричними оболонкам, у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному середовищі. Припускається, що самоврівноважене динамічне навантаження діє на кільцеві ребра жорсткості (шпангоути). Важливим є порівняння динамічних ефектів підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості оболонки з невідкріпленою. Також важливою задачею є дослідження впливу інтервалу між ребрами жорсткості.

Постановка задачі. Нехай оболонка і середовище віднесені до нерухомої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, причому вісь оболонки співпадає з віссю Ox . Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $r = b$, а зовнішня – $r = a$ ($h = a - b$ – товщина оболонки). Середовище задається співвідношенням $r \geq a$. Контакт між оболонкою і середовищем будемо вважати ковзним.

Далі розглядаються три випадки. В першому випадку будемо припускати, що при $x_1 = 0$ розташований одне кільцеве ребро жорсткості. В другому, що два ребра розташовані симетрично відносно нуля на відстані d один від одного (тобто при $x_1 = -d/2$, $x_2 = d/2$). І в третьому випадку розглянемо три ребра жорсткості. Перший розташований в початку координат ($x_2 = 0$), а два інші симетрично відносно першого на відстані d (тобто при $x_1 = -d$, $x_3 = d$).

Рух середовища будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності, які у векторній формі мають вигляд [6]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div}(\bar{u}) - \mu_2 \text{rot rot}(\bar{u}) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $\bar{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$ – вектор переміщень; λ_2, μ_2 – параметри Ламе для простору, ρ_2 – щільність простору.

Рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), та в загальному випадку мають вигляд [1]

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x; \\ & \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & \quad + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2a} \chi_\theta - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_\theta; \\ & \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{a^2} + \\ & \quad + \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (p - q_r); \\ & -6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_x + \frac{1-\nu_1}{2a^2} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - \\ & \quad - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x; \\ & -6k^2 \frac{1-\nu_1}{ah^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_\theta + \\ & \quad + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_\theta; \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де u, v, w – осьове, кільцеве та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки відповідно; χ_x, χ_θ – кути повороту нормалі до серединної поверхні в

осьовому і кільцевому напрямках; q_r, q_x, q_θ – нормальна, осьова та кільцева реакція з боку середовища на границі контакту між середовищем та оболонкою; p – нормальне навантаження; G_1, ρ_1, ν_1, h, a – модуль зсуву, густина, коефіцієнт Пуассона, товщина та зовнішній радіус оболонки; $k^2 = 2/3$ – числовий коефіцієнт.

Для опису руху кожного ребра використовуємо по два рівняння динаміки кільця [9]

$$\begin{cases} \frac{E_{\delta k} F_k}{r} \left(\frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_{\delta k}}{\partial \theta} \right) + \frac{E_{\delta k} I_k}{r^3} \left(\frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w_{\delta k}}{\partial \theta^3} \right) - r \rho_{\delta k} F_k \frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{E_{\delta k} F_k}{r} \left(\frac{\partial v_{\delta k}}{\partial \theta} + w_{\delta k} \right) - \frac{E_{\delta k} I_k}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v_{\delta k}}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 w_{\delta k}}{\partial \theta^4} \right) + r \rho_{\delta k} F_k \frac{\partial^2 w_{\delta k}}{\partial t^2} = q_{ck} - p_{\delta k}; \end{cases} \quad (3)$$

де $p_{\delta k}(\theta, t)$ – інтенсивність заданого навантаження на k -е ребро; $q_{ck}(\theta, t)$ – невідома реакція з боку оболонки на k -е ребро; $E_{\delta k}, \rho_{\delta k}$ – модуль Юнга і щільність k -го ребра; $w_{\delta k}, v_{\delta k}$ – нормальне і дотичне переміщення k -го ребра; I_k, F_k – момент інерції і площа поперечного перетину кільцевого ребра жорсткості.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції φ, ϕ, χ за формулами [6]

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \\ u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляємо залежності (4) в рівняння (1). Маємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{\phi, \chi\} &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_p^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2} \quad (6)$$

Граничні умови між оболонкою і середовищем мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_r(x, t, \theta) &= -\sigma_{rr}(a, x, t, \theta), \quad q_x(x, t, \theta) = q_\theta(x, t, \theta) = 0, \\ w(x, t, \theta) &= u_r(a, x, t, \theta), \quad \sigma_{rx}(a, x, t, \theta) = \sigma_{r\theta}(a, x, t, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (7), виражаються через переміщення згідно формул:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{G_2}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).\end{aligned}\quad (8)$$

Умови контакту ребер жорсткості та оболонки запишемо так:

а) в місцях контакту $x = x_k$ нормальне переміщення ребра рівне нормальному переміщенню оболонки, взятому з протилежним знаком

$$w(x_k, t, \theta) = -w_{\delta k}(t, \theta); \quad (9)$$

б) внутрішнє навантаження на оболонку дорівнює сумі тисків, які передаються через кожне ребро

$$p(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{NK} q_{ck}(\theta, t) \delta(x - x_k), \quad (10)$$

де NK – кількість ребер.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Розв'язок задачі у просторі зображень. Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (11)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \quad (12)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned}\{\Phi, X\} &= \frac{1}{a^2} \{\varphi, \chi\}; \quad \{\Psi\} = \frac{1}{a^3} \{\phi\}; \quad \{P, P_{\delta k}\} = \frac{a}{G_2} \{p, p_{\delta k}\}; \\ \{U_x, U_\theta, U_r, U, V, W, V_{\delta k}, W_{\delta k}\} &= \frac{1}{a} \{u_x, u_\theta, u_r, u, v, w, v_{\delta k}, w_{\delta k}\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{\sigma}_{r\theta}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}\}; \quad \{x^*, r^*\} = \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \\ \{\bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{q}_\theta, \bar{q}_{ck}\} &= \frac{1}{G_2} \{q_r, q_x, q_\theta, q_{ck}\}; \quad \tau = \frac{c_s}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad d^* = \frac{d}{a}; \\ \rho^* &= \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; \quad \gamma_k = \frac{G_{\delta k}}{G_2}; \quad \rho_k^* = \frac{\rho_{\delta k}}{\rho_2}; \quad I_k^* = \frac{I_k}{a^4}; \quad F_k^* = \frac{F_k}{a^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x^* до рівнянь (5), та розкладаємо зображення потенціальних функцій в ряд Фур'є за формулами:

$$\{\Phi_{LF}, \Psi_{LF}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{LF,n}, \Psi_{LF,n}\} \cos(n\theta), \quad X_{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{LF,n} \sin(n\theta). \quad (14)$$

Рівняння (5) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_p^2 p^2 - s^2 \right) \Phi_{LF,n} &= 0; \\ \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} - p^2 - s^2 \right) \{\Psi_{LF,n}, X_{LF,n}\} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{де } \eta_p^2 = \frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}.$$

Загальний розв'язок рівнянь (15) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{1n}(s, p) K_n(m_p r_*); \\ \Psi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{2n}(s, p) K_n(m_s r_*); \\ X_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{3n}(s, p) K_n(m_s r_*), \end{aligned} \quad (16)$$

де $m_p = \sqrt{s^2 + \eta_p^2 p^2}$, $m_s = \sqrt{s^2 + p^2}$, а K_n – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x^* до компонент переміщень і напружень середовища, та розкладаємо їх в ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned} \{U_{rLF}, U_{xLF}, \bar{\sigma}_{rrLF}, \bar{\sigma}_{rxLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{rLF,n}, U_{xLF,n}, \bar{\sigma}_{rrLF,n}, \bar{\sigma}_{rxLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{U_{\theta LF}, \bar{\sigma}_{r\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{\theta LF,n}, \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Рівності (4) та (8) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_{xLF,n} &= is\Phi_{LF,n} + \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} \right) \Psi_{LF,n}, \\ U_{rLF,n} &= \frac{d\Phi_{LF,n}}{dr_*} - is \frac{d\Psi_{LF,n}}{dr_*} + \frac{n}{r_*} X_{LF,n}, \\ U_{\theta LF,n} &= -\frac{n}{r_*} \Phi_{LF,n} + \frac{isn}{r_*} \Psi_{LF,n} - \frac{dX_{LF,n}}{dr_*}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rrLF,n} &= \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(isU_{xLF,n} + \frac{n}{r_*} U_{\theta LF,n} + \frac{U_{rLF,n}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLF,n}}{dr_*}, \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \frac{dU_{xLF,n}}{dr_*} + isU_{rLF,n}, \quad \bar{\sigma}_{r\theta LF,n} = \frac{1}{r_*} \left(-nU_{rLF,n} + \frac{dU_{\theta LF,n}}{dr_*} - \frac{U_{\theta LF,n}}{r_*} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Розкладемо зображення шуканих величин у ряд Фур'є наступним чином:

$$\begin{aligned} \{U_{LF}, W_{LF}, \bar{q}_{rLF}, \bar{q}_{xLF}, \chi_{xLF}, \chi_{\theta LF}, F_{LF} P_{LF}\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{LF,n}, W_{LF,n}, \bar{q}_{rLF,n}, \bar{q}_{xLF,n}, \chi_{xLF,n}, P_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{V_{LF}, \bar{q}_{\theta LF}, \chi_{\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{LF,n}, \bar{q}_{\theta LF,n}, \chi_{\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (20)$$

У просторі зображень за Фур'є – Лапласом система (2) має вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} &-\left(\frac{1-\nu_1}{2}(n^2+p^2)+s^2\right)U_{LF,n} + isn\frac{1+\nu_1}{2}V_{LF,n} + \nu_1 isW_{LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma}\bar{q}_{xLF,n}; \\ &-isn\frac{1+\nu_1}{2}U_{LF,n} - \left(\frac{1-\nu_1}{2}(s^2+p^2)+n^2\right)V_{LF,n} - n\left(1+\frac{(1-\nu_1)k^2}{2}\right)W_{LF,n} + \\ &\quad + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2}\chi_{\theta LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa^2\gamma}\bar{q}_{\theta LF,n}; \\ &is\nu_1 U_{LF,n} + nV_{LF,n} - k^2\frac{1-\nu_1}{2}(is\chi_{xLF,n} + n\chi_{\theta LF,n}) + \\ &\quad + \left(\frac{1-\nu_1}{2}((s^2+n^2)k^2+p^2)+1\right)W_{LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma}(\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}); \\ &-6k^2 is\frac{1-\nu_1}{\kappa^2}W_{LF,n} + isn\frac{1+\nu_1}{2}\chi_{\theta LF,n} - \\ &\quad - \left(s^2 + \frac{1-\nu_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2\right)\right)\chi_{xLF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma}\bar{q}_{xLF,n}; \\ &6k^2 n\frac{1-\nu_1}{\kappa^2}W_{LF,n} - isn\frac{1+\nu_1}{2}\chi_{xLF,n} - \\ &\quad - \left(n^2 + \frac{1-\nu_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2\right)\right)\chi_{\theta LF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma}\bar{q}_{\theta LF,n}. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Граничні умови (7) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{rLF,n}(s,p) &= -\bar{\sigma}_{rrLF,n}(1,s,p), \quad \bar{q}_{xLF,n}(s,p) = \bar{q}_{\theta LF,n}(s,p) = 0, \\ W_{LF,n}(s,p) &= U_{rLF,n}(1,s,p), \quad \bar{\sigma}_{rxLF,n}(1,s,p) = \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}(1,s,p) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи граничні умови (22), в системі (21) з четвертого та п'ятого рівнянь знаходимо невідомі функції $\chi_{xLF,n}, \chi_{\theta LF,n}$, а потім з першого та другого рівнянь знаходимо функції $U_{LF,n}, V_{LF,n}$ відповідно:

$$\begin{aligned} \chi_{xLF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} W_{LF,n}(s, p); & \chi_{\theta LF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} W_{LF,n}(s, p); \\ U_{LF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} W_{LF,n}(s, p); & V_{LF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_5}{\Delta_3} W_{LF,n}(s, p); \end{aligned} \tag{23}$$

де $\Delta = A_1 A_2 - A_3^2$; $\Delta_1 = i A_4 (s A_2 - n A_3)$; $\Delta_2 = A_4 (-s A_3 + n A_1)$; $\Delta_3 = B_1 B_2 - B_3^2$;
 $\Delta_4 = -i (v_1 s B_2 + n B_4 B_3)$; $\Delta_5 = v_1 s B_3 - B_4 B_1$;

$$A_1 = s^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2 \right); \quad A_2 = n^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2 \right);$$

$$A_3 = sn \frac{1+v_1}{2}; \quad A_4 = 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2};$$

$$B_1 = \frac{1-v_1}{2} (n^2 + p^2) + s^2; \quad B_2 = \frac{1-v_1}{2} (s^2 + p^2) + n^2; \quad B_3 = sn \frac{1+v_1}{2};$$

$$B_4 = -k^2 \frac{(1-v_1)\Delta_2}{2\Delta} + n \left(1 + \frac{(1-v_1)k^2}{2} \right).$$

В результаті третє рівняння системи (21) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & \left(isv_1 \frac{\Delta_4}{\Delta_3} + n \frac{\Delta_5}{\Delta_3} - k^2 \frac{1-v_1}{2\Delta} (is\Delta_1 + n\Delta_2) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1-v_1}{2} ((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) \right) W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}). \end{aligned} \tag{24}$$

Отже, враховуючи рівняння (24) та дві останні рівності з (22), отримуємо систему рівнянь відносно змінних $C_{1n}(s, p), C_{2n}(s, p), C_{3n}(s, p)$, яка розв'язується методом Гауса. Нехай $\bar{C}_{1n}(s, p), \bar{C}_{2n}(s, p), \bar{C}_{3n}(s, p)$ – розв'язки цієї системи. Тоді можемо записати

$$U_{rLF,n}(r^*, s, p) = T_n(r^*, s, p) P_{LF,n}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned} T_n(r^*, s, p) &= \bar{C}_{1n}(s, p) \left(\frac{n K_n(m_p r^*)}{r^*} - m_p K_{n+1}(m_p r^*) \right) - \\ & - is \bar{C}_{2n}(s, p) \left(\frac{n K_n(m_s r^*)}{r^*} - m_s K_{n+1}(m_s r^*) \right) + \bar{C}_{3n}(s, p) \frac{n K_n(m_s r^*)}{r^*}. \end{aligned}$$

Аналогічно до (25) можна записати вираз і для інших переміщень та всіх напружень.

Тепер для знаходження нормальних переміщень за співвідношенням (25) потрібно знайти навантаження, яке передається на оболонку з боку кільцевих ребер жорсткості. Для цього застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ до рівнянь (3), та розкладаємо зображення функцій в ряд Фур'є за формулами:

$$\left\{ W_{\delta k L}, P_{\delta k L}, \bar{q}_{ckL} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ W_{\delta k L, n}, P_{\delta k L, n}, \bar{q}_{ckL, n} \right\} \cos(n\theta),$$

$$V_{\delta k L} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{\delta k L, n} \sin(n\theta).$$
(26)

Рівняння (3) мають вигляд

$$\begin{cases} \left(2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) n^2 (F_k^* + I_k^*) + \rho_k^* F_k^* p^2 \right) V_{\delta k L} + \\ \quad + 2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) n (F_k^* + I_k^* n^2) W_{\delta k L, n} = 0; \\ 2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) n (F_k^* + I_k^* n^2) V_{\delta k L} + \\ \quad + \left(2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) (F_k^* + I_k^* n^4) + \rho_k^* F_k^* p^2 \right) W_{\delta k L, n} = \bar{q}_{ckL, n} - P_{\delta k L, n}. \end{cases}$$
(27)

Введемо позначення

$$A_{11k} = \left(2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) n^2 (F_k^* + I_k^*) + \rho_k^* F_k^* p^2 \right);$$

$$A_{12k} = 2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) n (F_k^* + I_k^* n^2); \quad A_{33k} = A_{12}^2 / A_{11} + A_{22};$$

$$A_{22k} = \left(2\gamma_k (1 + \nu_{\delta k}) (F_k^* + I_k^* n^4) + \rho_k^* F_k^* p^2 \right).$$

Тоді

$$V_{\delta k L} = \frac{A_{12k}}{A_{11k}} W_{\delta k L, n}$$
(28)

$$W_{\delta k L, n} = \frac{\bar{q}_{ckL, n} - P_{\delta k L, n}}{A_{33k}}$$
(29)

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x^* до рівнянь (10) будемо мати:

$$P_{LF, n}(s, p) = \sum_{k=1}^{NK-} \bar{q}_{ckL, n}(p) e^{isx^*k}$$
(30)

Підставляємо (30) в (25). Будемо мати:

$$U_{rLF, n}(r^*, s, p) = T_n(r^*, s, p) \sum_{k=1}^{NK-} \bar{q}_{ckL, n}(p) e^{isx^*k}$$
(31)

Позначимо $f_{kn}(r^*, x^*, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r^*, s, p) e^{-isx^*} e^{isx^*} ds$. Отримаємо:

$$U_{rLF,n}(r^*, x^*, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL,n}(p) f_{kn}(r^*, x^*, p). \quad (32)$$

У виразі (32) замість x^* підставляємо x_j , ($j = \overline{1, NK}$), та отримаємо NK рівностей

$$U_{rLF,n}(r^*, x_j, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL,n}(p) f_{kn}(r^*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}). \quad (33)$$

Використовуємо тепер граничну умову (9). З урахуванням (29) будемо мати

$$\frac{\bar{q}_{cjL,n}(p) - P_{\delta jL,n}(p)}{A_{33j}} = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL,n}(p) f_{kn}(r^*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}), \quad (34)$$

або

$$P_{\delta jLF,n}(p) = (1 + A_{33j} f_{jn}(r^*, x_j, p)) \bar{q}_{cjL,n}(p) + A_{33j} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{NK} \bar{q}_{ckL,n}(p) f_{kn}(r^*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}). \quad (35)$$

Розв'язуємо систему (35) відносно невідомих $\bar{q}_{c1L,n}(p), \dots, \bar{q}_{cNKL,n}(p)$.

Підставляємо отримані результати у вираз (31) та отримуємо кінцевий вираз для нормальних переміщень у просторі зображень за Фур'є – Лапласом.

Проілюструємо описаний алгоритм для випадку одного, двох та трьох ребер жорсткості. Для спрощення розрахунків припустимо, що всі ребра мають однакові фізичні характеристики, та прикладемо до них однакові навантаження. Позначимо $P_{\delta L,n}(p) = P_{\delta 1L,n}(p) = \dots = P_{\delta NKL,n}(p)$; $A_{33} = A_{331} = \dots = A_{33NK}$.

У випадку одного ребра будемо мати ($x_1 = 0$):

$$\bar{q}_{cL,n}(p) = \frac{P_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33} f_{1n}(r^*, 0, p)}, \quad (36)$$

$$U_{rLF,n}(r^*, s, p) = \frac{T_n(r^*, s, p) P_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33} f_{1n}(r^*, 0, p)}, \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} f_{1n}(r^*, 0, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r^*, s, p) e^{-is \cdot 0} e^{is \cdot 0} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r^*, s, p) ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(r^*, s, p) ds. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли оболонка підкріплена двома ребрами жорсткості ($x_1 = -d^*/2$, $x_2 = d^*/2$). Тоді система (35) матиме вигляд

$$\begin{cases} P_{\delta L,n}(p) = (1 + A_{33} f_{1n}(r^*, x_1, p)) \bar{q}_{c1L,n}(p) + A_{33} \bar{q}_{c2L,n}(p) f_{2n}(r^*, x_1, p); \\ P_{\delta L,n}(p) = A_{33} \bar{q}_{c1L,n}(p) f_{2n}(r^*, x_1, p) + (1 + A_{33} f_{2n}(r^*, x_2, p)) \bar{q}_{c2L,n}(p). \end{cases} \quad (38)$$

Відніmemo від першого рівняння системи (38) друге рівняння системи (38). Будемо мати

$$\begin{aligned} \bar{q}_{c1L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{1n}(r^*, x_1, p) - f_{1n}(r^*, x_2, p))) = \\ = \bar{q}_{c2L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{2n}(r^*, x_2, p) - f_{2n}(r^*, x_1, p))). \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} f_{1n}(r^*, x_1, p) - f_{1n}(r^*, x_2, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{-isx_1} (e^{isx_1} - e^{isx_2}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{-isx_1} (e^{isx_1} - e^{-isx_1}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{-isx_1} (\cos(sx_1) + i \sin(sx_1) - \cos(sx_1) + \\ &+ i \sin(sx_1)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{-isx_1} 2i \sin(sx_1) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (i \cos(sx_1) \sin(sx_1) + \sin^2(sx_1)) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin(2sx_1) ds + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2(sx_1) ds = \\ &= 0 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2\left(-\frac{sd^*}{2}\right) ds = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2\left(\frac{sd^*}{2}\right) ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2n}(r^*, x_2, p) - f_{2n}(r^*, x_1, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{-isx_2} (e^{isx_2} - e^{isx_1}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{isx_1} (e^{-isx_1} - e^{isx_1}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{isx_1} (\cos(sx_1) - i \sin(sx_1) - \cos(sx_1) - i \sin(sx_1)) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) e^{isx_1} (-2i) \sin(sx_1) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (i \cos(sx_1) \sin(sx_1) + \sin^2(sx_1)) ds = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin(2sx_1) ds + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2(sx_1) ds = \\
&= 0 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2\left(-\frac{sd^*}{2}\right) ds = \\
&= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin^2\left(\frac{sd^*}{2}\right) ds = f_{1n}(r^*, x_1, p) - f_{1n}(r^*, x_2, p).
\end{aligned}$$

Підставивши отримані результати у вираз (39), будемо мати

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{c1L,n}(p) (1 + A_{33}(f_{1n}(r^*, x_1, p) - f_{1n}(r^*, x_2, p))) &= \\
&= \bar{q}_{c2L,n}(p) (1 + A_{33}(f_{1n}(r^*, x_1, p) - f_{1n}(r^*, x_2, p))), \\
\bar{q}_{c1LF,n}(p) &= \bar{q}_{c2LF,n}(p).
\end{aligned}$$

Отже, отриманий результат показує, що симетрично розташовані відносно початку координат ребра, мають однакову реакцію зі сторони оболонки.

Тому, будемо мати

$$\bar{q}_{cL,n}(p) = \frac{P_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33}(f_{n1}(r^*, x_1, p) + f_{n2}(r^*, x_1, p))}, \quad (40)$$

$$U_{rLF,n}(r^*, s, p) = \frac{T_n(r^*, s, p) P_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33}(f_{n1}(r^*, x_1, p) + f_{n2}(r^*, x_1, p))}, \quad (41)$$

де

$$\begin{aligned}
f_{n1}(r^*, x_1, p) + f_{n2}(r^*, x_1, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (e^{-isx_1} e^{isx_1} + e^{-isx_2} e^{isx_1}) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (1 + e^{isx_1} e^{isx_1}) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (1 + \cos(2sx_1) + i \sin(2sx_1)) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) (1 + \cos(2sx_1)) ds + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r^*, s, p) \sin(2sx_1) ds = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) (1 + \cos(2sx_1)) ds + 0 = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) \left(1 + \cos\left(-\frac{2sd^*}{2}\right)\right) ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) (1 + \cos(sd^*)) ds.
\end{aligned}$$

Далі розглянемо випадок, коли оболонка підкріплена трьома кільцевими ребрами жорсткості ($x_1 = -d^*$, $x_2 = 0$, $x_3 = d^*$). Також будемо враховувати отриманий раніше результат для двох симетрично розташованих ребер, а саме $\bar{q}_{c1LF,n}(p) = \bar{q}_{c3LF,n}(p)$. З урахуванням вищеописаної система (35) матиме вигляд

$$\begin{cases} P_{\delta L,n}(p) = (1 + A_{33}(f_{1n}(r^*, x_1, p) + f_{3n}(r^*, x_1, p)))\bar{q}_{c1L,n}(p) + \\ \quad + A_{33}\bar{q}_{c2L,n}(p)f_{2n}(r^*, x_1, p); \\ P_{\delta L,n}(p) = A_{33}\bar{q}_{c1L,n}(p)(f_{1n}(r^*, x_2, p) + f_{3n}(r^*, x_2, p)) + \\ \quad + (1 + A_{33}f_{2n}(r^*, x_2, p))\bar{q}_{c2L,n}(p). \end{cases} \quad (42)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= 1 + A_{33}(f_{1n}(r^*, x_1, p) + f_{3n}(r^*, x_1, p)) = \\ &= 1 + A_{33}\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_n(r^*, s, p)(1 + \cos(2sd^*))ds; \\ \Omega_{12} &= A_{33}f_{2n}(r^*, x_1, p) = A_{33}\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_n(r^*, s, p)\cos(sd^*)ds; \\ \Omega_{21} &= A_{33}(f_{1n}(r^*, x_2, p) + f_{3n}(r^*, x_2, p)) = \\ &= 2A_{33}\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_n(r^*, s, p)\cos(sd^*)ds = 2\Omega_{12}; \\ \Omega_{22} &= 1 + A_{33}f_{2n}(r^*, x_2, p) = 1 + A_{33}\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_n(r^*, s, p)ds. \end{aligned}$$

Розв'язуємо систему (42) відносно невідомих $\bar{q}_{c1LF,n}(p)$, $\bar{q}_{c2LF,n}(p)$. Будемо мати:

$$\bar{q}_{c1L,n}(p) = \frac{\Omega_{22} - \Omega_{12}}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} P_{\delta L,n}(p), \quad (43)$$

$$\bar{q}_{c2L,n}(p) = \frac{\Omega_{11} - 2\Omega_{12}}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} P_{\delta L,n}(p), \quad (44)$$

$$U_{rLF,n}(r^*, s, p) = \frac{T_n(r^*, s, p)(\Omega_{11} + \Omega_{22} - 3\Omega_{12})}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} P_{\delta L,n}(p), \quad (45)$$

Всі невідомі інтеграли, які виникають у співвідношеннях (37), (41) та (45) обчислюються наближено за допомогою методу Файлона [4].

Відповідні вирази для нормальних напружень отримуються аналогічно.

Результати чисельного аналізу. Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t = 0$ в області $x = x_k$ ($k = \overline{1, NK}$), $r = b$, $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$, $-2\pi/3 \leq \theta \leq -\pi/3$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на даній ділянці.

Функція навантаження має вигляд

$$p_{\delta}(\theta, t) = F_0 H(t) (H(\theta - \pi/3) H(-\theta + 2\pi/3) + H(-\theta - \pi/3) H(\theta + 2\pi/3)). \quad (46)$$

Трансформанта навантаження (46) має вигляд

$$P_{\delta L, n}(p) = \begin{cases} \frac{4F_0}{3paG_2}, & n = 0. \\ \frac{4F_0}{\pi p n a G_2} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right) \sigma_n, & n = 2, 4, 8, 10, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, \dots \end{cases} \quad (47)$$

де, $\sigma_n = (N + 1) / \pi n \sin(n\pi / (N + 1))$ – множники, для прискорення збіжності тригонометричних рядів Фур'є [5]; N – кількість доданків в ряді Фур'є.

Після оберненого перетворення Фур'є та Лапласа і підсумовування рядів тригонометричних рядів Фур'є отримуємо вирази для оригіналу функції переміщень. У випадку одного ребра оригінал матиме вигляд

$$\frac{U_r(r^*, x^*, t, \theta) G_2}{F_0 / a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5 i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{P_{\delta L, n}(p) e^{pt}}{(1 + A_{33}) f_{1n}(r^*, 0, p)} \cdot \left(\int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) ds \right) dp \right] \cos(n\theta). \quad (48)$$

У випадку двох ребер жорсткості оригінал матиме вигляд

$$\frac{U_r(r^*, x^*, t, \theta) G_2}{F_0 / a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5 i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{P_{\delta L, n}(p) e^{pt}}{1 + A_{33} (f_{n1}(r^*, x_1, p) + f_{2n}(r^*, x_1, p))} \times \left(\int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) ds \right) dp \right] \cos(n\theta) \quad (49)$$

У випадку трьох ребер оригінал матиме вигляд

$$\frac{U_r(r^*, x^*, t, \theta) G_2}{F_0 / a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5 i}} \sum_{n=0}^N \left[\int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{P_{\delta L, n}(p) (\Omega_{11} + \Omega_{22} - 3\Omega_{12}) e^{pt}}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} \times \left(\int_0^{\infty} T_n(r^*, s, p) ds \right) dp \right] \cos(n\theta). \quad (50)$$

Обчислення невласних інтегралів у виразах (48) – (50) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [4], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [3].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $v_1 = v_2 = v_{\delta} = 0,3$, $\gamma = 30$, $\gamma_{\delta} = 300$, $\rho^* = 4$, $\rho_{\delta}^* = 8$, $F_{\delta}^* = 7 \cdot 10^{-4}$, $I_{\delta}^* = 10^{-6}$, $\kappa = 0,02$, $r^* = 1$. Величини θ , τ , x^* , d^* – змінювались.

Для порівняння результатів для випадку одного кільцевого ребра жорсткості було розв'язано задачу для непідкріпленої оболонки з навантаженням, яке діє на ділянці, де розташоване ребро за аналогічним законом. Розв'язок отримано методами, описаними в [8].

На рис. 1 проілюстровано зміну нормальних переміщень (48) середовища за змінною безрозмірного часу на границі контакту з оболонкою у характерній точці ($\theta = \pi/2$, $x^* = 0$).

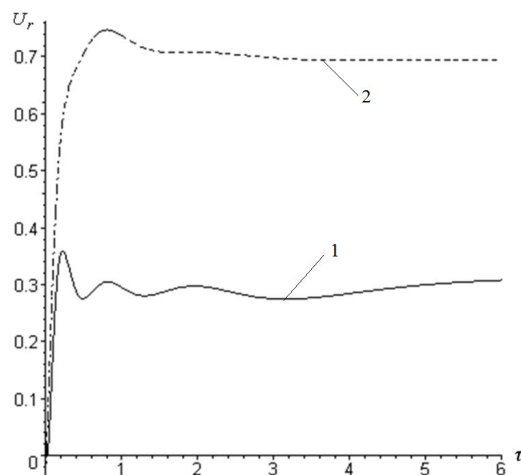


Рис. 1. – Порівняння нормальних переміщень оболонки за змінною безрозмірного часу

Крива 1 відповідає підкріпленій оболонці, а крива 2 – не підкріпленій. На рис. 2 приводиться аналогічне порівняння за кутовою координатою (при $x^* = 0$) у різні моменти часу рис. 2 а) – $\tau = 0, 2$, рис. 2, б) – $\tau = 5$), а на рис. 3 – за осью (при $\tau = 5$, $\theta = \pi/2$). З результатів зрозуміло, що наявність ребра жорсткості зменшує нормальні переміщення оболонки на 57%.

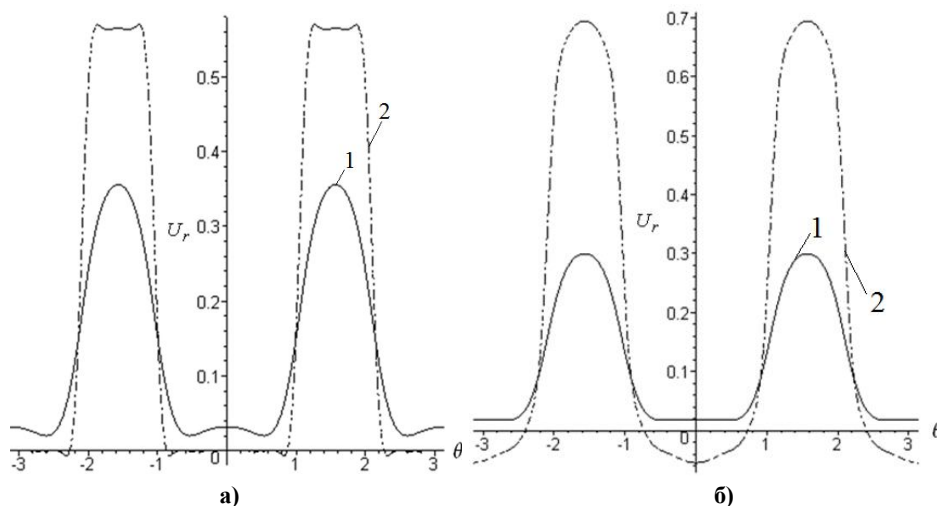


Рис. 2. – Порівняння нормальних переміщень оболонки за кутовою координатою

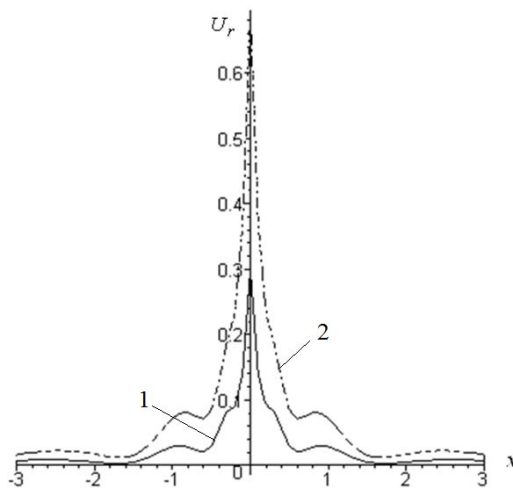


Рис. 3. – Порівняння нормальних переміщень за осьюою координатою

Рис. 4 ілюструє прогин оболонки по довжині для різних відстаней між двома (рис. 4,а) та трьома (рис. 4,б) ребрами відповідно. Причому, на рис. 4, а крива 1 відповідає відстані $d^* = 2$, крива 2 – $d^* = 3$ та крива 3 – $d^* = 4$. На рис. 4, б крива 1 відповідає відстані $d^* = 1$, крива 2 – $d^* = 1,5$ та крива 3 – $d^* = 2$. Із рисунків видно, що для двох та трьох ребер жорсткості при відстані $d^* > 3$ їх взаємний вплив незначний, тому для вказаних відстаней можна розглядати нескінченну циліндричну оболонку з одним кільцевим ребром жорсткості.

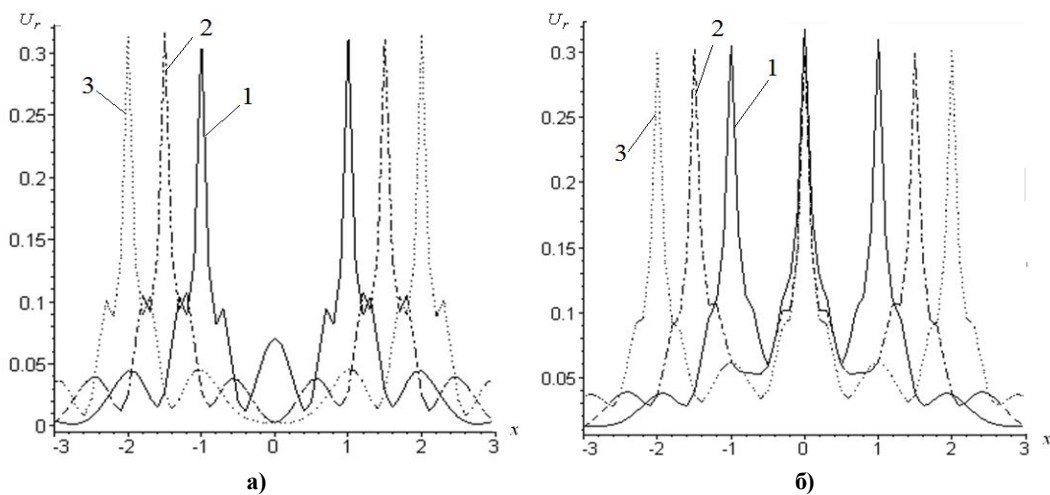


Рис. 4. – Прогин по довжині для оболонки підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості

Висновки. Отримано розв'язок динамічної задачі для дискретно підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі. При цьому вирази для переміщень і напружень у оболонці і довільній точці середовища подано у вигляді рядів Фур'є від подвійних невластних інтегралів Фур'є та Лапласа. Для отримання результатів запропоновано ефективний чисельний алгоритм, який ґрунтується на методі Файлона та многочленів Лежандра. Проілюстровано графічно розподіл за кутовою координатою в різні моменти часу нормальних

переміщень оболонки на межі контакту з пружним середовищем. Проаналізовано вплив ребер у порівнянні з відповідним навантаженням для непідкріпленої оболонки. Досліджено вплив інтервалу між шпангоутами на переміщення оболонки. Знайдено інтервали між ребрами для яких можна розглядати нескінченну оболонку з одним ребром. Отримані результати і запропоновані алгоритми можуть використовуватись при динамічному розрахунку підземних споруд, зокрема тунелів метро та підземних трубопроводів.

Бібліографічні посилання

1. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир – М. : Наука, 1972. – 432 с.
2. **Горшков А. Г.** Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев – М.: МАИ, 1992. – 136 с.
3. **Крылов В. И.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля – М.: Наука, 1974. – 223 с.
4. **Крылов В. И.** Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина – М.: Наука, 1966. – 370 с.
5. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. лит., 1961. – 524 с.
6. **Новацкий В.** Теория упругости / В. Новацкий – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. **Пожуев А. В.** Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького нац. ун-ту: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки – 2016. – № 1. – С. 200–213.
8. **Пожуев А. В.** Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні – 2015. – № 2. – С. 108–114.
9. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны / Л. И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.

Надійшла до редколегії 10.04.2017

УДК 539.312

ДИНАМИКА, ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. И. Пожуев¹, д-р физ.-мат. наук, **А. В. Пожуев²**, канд. физ.-мат. наук,
А. В. Фасоляк¹

¹Запорожский национальный технический университет,

²Запорожская государственная инженерная академия,
Запорожье, Украина

Рассмотрена нестационарная динамическая задача для подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости, цилиндрической оболочки в линейно-упругой, однородной, изотропной и инерциальной трехмерной среде. Исследуется влияния кольцевых ребер жесткости и их взаимного расположения на динамическое напряженно-деформированное состояние данной механической системы. Научной новизной данной работы является решение нестационарной

динамической задачи для дискретно-подкрепленной, кольцевыми ребрами жесткости, цилиндрической оболочки в упругой трехмерной среде. Решение данной задачи получено методом разложения неизвестных функций в тригонометрический ряд Фурье и методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, кольцевые ребра жесткости, трехмерная упругая среда, динамическая нагрузка, неосесимметрическая задача.

UDK 539.312

DYNAMICS OF CYLINDRICAL SHELLS REINFORCED BY RINGS OF RIGIDITY IN THREE-DIMENSIONAL ELASTIC MEDIA

V. I. Pozhuev¹, Dr. Sci. (Phys.-math.), A. V. Pozhuev², PhD. (Phys.-math.),
A. V. Fasoliak¹

¹Zaporizhzhya national technical university, ²Zaporizhzhya state engineering academy,
Zaporizhzhya, Ukraine

In present work the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell, which is reinforced by rings of rigidity, in linearly-elastic, homogeneous and inertial three-dimensional media is considered. Purpose of present work is analyzing influence of rings of rigidity and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system. In present paper the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell, which is discretely reinforced by rings of rigidity, in an elastic three-dimensional medium has been solved and it is scientific novelty of this work. The solution of this problem was obtained by the method of expansion all unknown functions into the trigonometric Fourier series and by the method of integral Fourier and Laplace transforms.

Key words: cylindrical shell, rings of rigidity, three-dimensional elastic media, dynamic load, non-axisymmetrical problem.

In present paper the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell, which is reinforced by rings of rigidity, in linear-elastic, homogeneous and inertial three-dimensional media is considered. Before, such problems have been considered in a stationary formulation using the constructive-orthotropic shells theory. In present work the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell, which is discretely reinforced by rings of rigidity, in an elastic three-dimensional medium has been solved. Also influence of rings of rigidity and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system are analyzed.

Media motions are described by dynamic equations of elastic theory, shell motions – equations, which consider transverse shear and inertia of rotation (Timoshenko's shell), and motions of rings of rigidity – rings dynamic equations. The solution of this problem was obtained in the dimensionless variables. The method of expansion all unknown functions into the trigonometric Fourier series and by the method of integral Fourier and Laplace transforms were used.

The terms of trigonometric Fourier series for normal displacement of the elastic media in space of integral Fourier – Laplace transforms are:

$$U_{rLF,n}(r^*, s, p) = T_n(r^*, s, p)P_{LF,n},$$

where $T_n(r^*, s, p)$ – function, which has been obtained by solving dynamic equations of elastic theory, equations, which consider transverse shear and inertia of rotation and satisfying boundary conditions on the surface of contact between elastic media and shell; $P_{LF,n}$ – general normal load, which is acting on the inner surface of the shell. Other

components of stress-strain state are written in the similar form. According to boundary conditions between shell and rings of rigidity, $P_{LF,n}$ is equal to total pressure, which is transmitted by all rings, and can be written in form:

$$P_{LF,n}(s, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL,n}(p) e^{isx_k},$$

where $\bar{q}_{ckL,n}$ – normal reaction of the shell on the k ($1 \leq k \leq NK$) ring; NK – number of rings. Using other boundary conditions between shell and rings the system of linear algebraic equations, where $\bar{q}_{ckL,n}$, $k = 1, \overline{NK}$ are unknowns, is obtained. The general solution in terms of trigonometric Fourier series in space of integral Fourier – Laplace transforms is obtained by solving SLAE, which is described.

Algorithm for obtaining the solution in transform space when the shell is reinforced by one, two and three rings of rigidity is described in detail.

The solution is obtained in the form of trigonometric Fourier series from the double improper Fourier and Laplace integrals. An effective algorithm for the numerical calculation of double improper Fourier and Laplace integrals has been developed.

Conclusions. When shell is reinforced by two rings of rigidity and distance between them more than three radiuses of shell, it is determined that the mutual influence of rings is insignificant. When shell is reinforced by three rings of rigidity, similar result has been obtained.

The algorithms, which have been offered, can be used at the dynamic calculation of underground building, in particular tunnels of subway and underground pipelines.

References

1. **Volmir A. S.** Non-linear dynamics of plates and shells / A. S. Volmir. – Moscow: Nauka, 1972. – 432 p. (in Russian).
2. **Gorshkov A. G.** Plates and shells on the inertial foundations under action of moving loads / A. G. Gorshkov, V. I. Pozhnev. – Moscow: Publishing House of MIA, 1992. – 136 p. (in Russian).
3. **Krylov V. I.** Methods of approximate Fourier transform and inversion of Laplace transform / V. I. Krylov, N. S. Skobyta. – Moscow: Nauka, 1974. – 223 p. (in Russian).
4. **Krylov V. I.** Reference book of numerical integrations / V. I. Krylov, L. T. Shulgina. – Moscow: Nauka, 1966. – 370 p. (in Russian).
5. **Lantsosh K.** Practical methods of applied analysis / K. Lantsosh. – Moscow: State publishing house physical and mathematical literature, 1961. – 524 p. (in Russian).
6. **Novatskiy V.** Elastic theory / V. Novatskiy. – Moscow: Mir, 1975. – 872 p. (in Russian).
7. **Pozhnev A. V.** Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic media under the action of extending surface loads / A. V. Pozhnev, A. V. Fasoliak // Visnyk of Zaporizhzhya national university: Collection of scientific articles. Physical and mathematical sciences – 2016. – No 1. – P. 200–213. (in Ukrainian).
8. **Pozhnev A. V.** Non-stationary non-axisymmetrical deformation of cylindrical shell in the elastic media under the action of moving surface loads / A. V. Pozhnev, A. V. Fasoliak // Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering – 2015. – No 2. – P. 108–114. (in Ukrainian).
9. **Slepian L. I.** Non-stationary elastic waves / L. I. Slepian. – Leningrad: Shipbuilding, 1972. – 374 p. (in Russian).