

УДК-539.3:534:1

М. Ю. Швайко, д-р техн. наук

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ДО ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ ФОРМИ РІВНОВАГИ ТА ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ СТИСНУТОГО ПРИЗМАТИЧНОГО СТРИЖНЯ

З використанням явища наклепу запропоновано спосіб суттєвого збільшення величини критичних параметрів при втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги та процесу деформування при осьовому стиску призматичного стрижня.

Ключові слова: пластичність, стрижень, стійкість рівноваги і процесу деформування.

Вступ. Для забезпечення нормальної роботи інженерна конструкція повинна задовольняти умовам *міцності*, *жорсткості*, а також *стійкості*, під якою розуміється властивість механічної системи мало відхилятися від незбуреного руху або рівноваги за довільних як завгодно малих збурень.

Розглянемо для прикладу рівновагу матеріальної кульки на гладкій поверхні (рис. 1). В точці A_1 кулька перебуває в стані стійкої рівноваги. Якщо відхилити кульку від цього положення в яке-небудь інше положення, наприклад A_2 , а потім відпустити, то вона під дією власної ваги та реакції в'язі почне коливатися в околі точки A_1 . Рух під впливом тертя та розсіювання енергії з часом згасає і кулька повернеться до свого стійкого положення рівноваги. Якщо кульку покласти в найбільш високу точку B_1 поверхні, то вона теж буде в положенні рівноваги, але ця рівновага буде нестійкою. За самого незначного відхилення кулька стане рухатися, але вже не повернеться до свого початкового положення. В граничному випадку, коли поверхня вироджується в горизонтальну площину, довільні положення кульки C є рівноважними. Така форма рівноваги називається *байдужою*.

Перейдемо до прикладу з механіки деформівного твердого тіла. Розглянемо під дією осьової сили P гнучкий пружний стрижень із шарнірно закріпленими кінцями (рис. 2). За малих значень сили стрижень буде стискуватися, залишаючись прямолінійним.

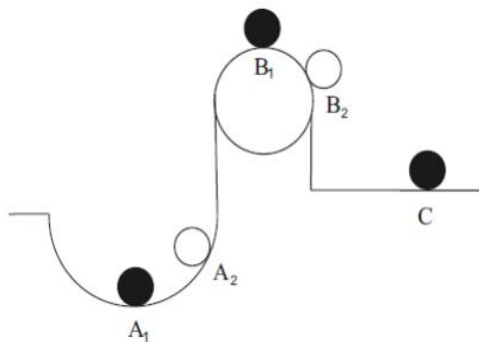


Рис. 1. – Стійка (A_1), нестійка (B_1) та байдужа (C) форми рівноваги матеріальної кульки на гладкій поверхні

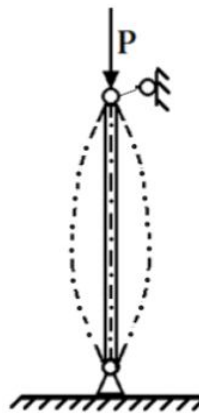


Рис. 2. – Стійкість рівноваги та процесу деформування стиснутого стрижня

Якщо його злегка відхилити від початкової прямолінійної форми рівноваги (пунктирні лінії на рис. 2) і відпустити, то стрижень буде здійснювати згасаючі коливання відносно вихідного положення. Отже його початкове положення рівноваги за малих значень сили P є стійким. Якщо ж сила P досягне деякого критичного значення P_* , то стрижень переходить до *байдужої форми рівноваги*, тобто поряд з прямолінійною можуть існувати також інші викривлені форми рівноваги. Якщо ж стискаюча сила P перевершує критичне значення P_* , то вертикальне його положення буде також рівноважним, але ця рівновага буде нестійкою: при довільному малому збуренні стрижень зігнеться і не повернеться до вихідної прямолінійної форми. Як бачимо, можна провести аналогію між рівноважними станами кульки на гладкій поверхні, та пружного стрижня, що стискається. Різниця заключається в тому, що у першому випадку стан рівноваги не залежить від величини ваги кульки, тоді як у другому випадку деформівного тіла перехід від стійкого до нестійкого положення здійснюється при перевершенні силою P деякого критичного значення P_* . Навантаження, за межею якого початкова форма рівноваги чи руху перестає бути стійкою, називається *критичним*. Зазначимо, що тіло може знаходитися в стані нестійкої форми рівноваги або руху тільки теоретично, утримувати його у такому стані практично неможливо. Звідси випливає висновок: якщо деякий елемент конструкції знаходиться в стані рівноваги або руху, але ці стани не є стійкими, то подальший його розрахунок на міцність або жорсткість не має сенсу.

Далі розглядаються задачі стійкості стиснутих пружних та пружнопластичних стрижнів і, як результат розгляду, запропоновано одну із можливостей значного збільшення їх вантажопідйомності.

При дослідженні використовується, в якості прикладу, діаграма напружень σ - ε (рис. 3), яку з деяким уточненням можна розглядати як ідеалізовану експериментальну діаграму при одноосьовому стиску маловуглецевих сталей в межах малих пружнопластичних деформацій ($\varepsilon_{max} \leq 5\%$) при відсутності явно вираженої площинки текучості. Далі напруження і деформації стиску будемо вважати додатніми.

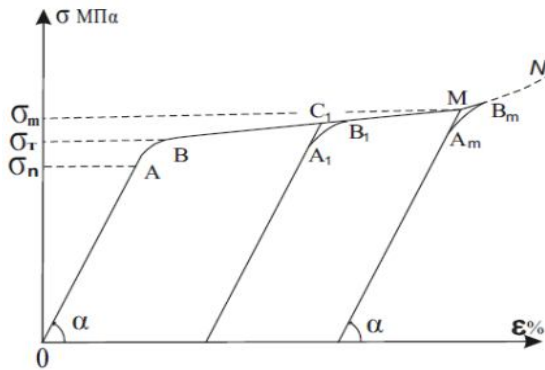


Рис. 3. – Діаграми напружень σ - ε сталі Ст-3 за відсутності (лінія $OABC_1M$) та наявності (лінії $O_1A_1B_1M$ і $O_mA_mB_m$) попереднього деформаційного зміцнення

На діаграмі σ - ε рис. 3 позначено: σ_n , σ_T , σ_m — напруження на межі пропорційності, текучості та міцності відповідно; E і $E_t(\sigma) = d\sigma/d\varepsilon$ — пружний і дотичний модулі діаграми σ - ε ; прямолінійний відрізок OA ($\sigma \leq \sigma_n$, $\varepsilon = \sigma/E$) відповідає пружній роботі стрижня, а ABC_1M — пружнопластичній. Лінія $C_1A_1O_1$ — ділянка розвантаження за межами пружності з повторним довантаженням $O_1A_1B_1$ і виходом на діаграму σ - ε , побудовану за відсутності розвантаження.

Підвищення межі пропорційності σ_n , викликане попереднім навантаженням за межі пружності з наступним розвантаженням, називається *наклепом* [1], або *деформаційним зміцненням*. Явище наклепу в різній формі широко використовується в інженерній практиці, особливо в машинобудуванні.

Зауважимо, що показана на рис. 3 пунктиром лінія MN не вважається складовою частиною діаграми $\sigma\sim\varepsilon$ за одноосового стиску, так як вона є результатом значної просторової деформації та суттєвої зміни форми короткого циліндричного зразка, що використовується в експерименті на одноосовий стиск [1].

Стійкість рівноваги стиснутого пружного стрижня. Формули Ойлера та межі їх застосування. Задачу визначення критичної сили (P_*), за якої здійснюється *біфуркація (розгалуження)* форм рівноваги ($\delta P=0$) в переміщеннях стиснутого пружного стрижня (рис. 2) при наявності в його поперечних перерізах зон довантаження ($\delta\sigma>0$) і розвантаження ($\delta\sigma<0$), вперше (1744 р.) поставив і розв'язав Леонард Ойлер [1]. Для критичної сили P_* і напруження $\sigma_*=P_*/F$ були одержані такі формули

$$P_* = \pi^2 EI / (\mu l)^2 ; \quad (1)$$

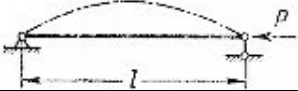
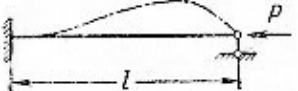

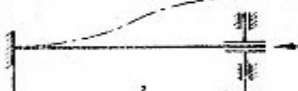
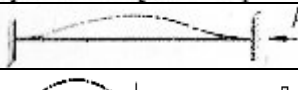
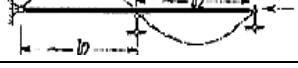
$$\sigma_* = \pi^2 E / \lambda^2 , \quad \sigma_* \leq \sigma_n . \quad (2)$$

Тут I , F , l – момент інерції, площа поперечного перерізу та довжина стрижня відповідно; μ – наведений в табл. 1 безрозмірний коефіцієнт способу закріплення стрижня. Параметр λ , який називається гнучкістю, задається формулою

$$\lambda = \mu l / i, \quad (3)$$

де $i = \sqrt{I/F}$ – радіус інерції поперечного перерізу стрижня. За однакових умов закріплення кінців стрижня в обох головних площинах інерції поперечного перерізу у формулі (3) потрібно покласти $i=i_{min}$. У випадку різних умов закріплення кінців вибирається така комбінація величин $\mu=\mu_{1,2}$ та $i=i_{1,2}$, за яких $\lambda=\lambda_{max}$.

Таблиця 1. – Безрозмірний коефіцієнт способу закріплення стрижня

№ з/п	Схема	Характер закріплення кінців стрижня	Значення коефіцієнта μ
1		Обидва кінці шарнірно обперті	1
2		Один кінець жорстко закріплений, другий кінець – шарнірно обпертий	0,7
3		Один кінець жорстко закріплений, другий кінець – вільний	2
4		Один кінець жорстко закріплений, на другому кінці рухоме закріплення	1
5		Обидва кінці жорстко закріплені	0,5
6		На кінцях стержня і посередині шарнірне закріплення	0,5

Формула (2) є рівнянням так званої гіперболи Ойлера, обмеженої зверху напруженням $\sigma = \sigma_n$. При цьому гнучкість стрижня на межі пропорційності, згідно з (2), задовольняє умову

$$\lambda > \lambda_n = \pi \sqrt{E / \sigma_n}. \quad (4)$$

Так, наприклад, якщо для маловуглецевої сталі Ст-3 маємо $\sigma_n = 200 \text{ МПа}$, $E = 2,1 \times 10^5 \text{ МПа}$, то граничне значення λ_n наближено дорівнює 100. У більш коротких стрижнях ($\lambda < \lambda_n$) втрата стійкості відбувається у пружнопластичній зоні ($\sigma > \sigma_n$).

В кінцевому рахунку формули Ойлера (1) і (2) визначаються точкою *біфуркації (розгалуження)* розв'язків граничної задачі в геометрично нелінійній постановці теорії пружності у переміщеннях.

Втрата стійкості прямолінійної форми процесу деформування стиснутого стрижня. Формули Шенлі – Работнова та межі їх застосування. Першу спробу розглянути задачу стійкості центрально стиснутого стрижня в пластичній зоні зробив у 1839 р. Енгесер [1], який запропонував обраховувати критичну силу за формулою Ойлера (1), але із заміною модуля пружності E на дотичній $E_t = d\sigma/d\varepsilon$. Цей підхід не врахував ефекту розвантаження, який згідно з критерієм Ойлера, має місце на частині поперечного перерізу стрижня при біфуркації форм рівноваги. На це вперше звернув увагу проф. Ф. С. Ясинський. З врахуванням зауваження Ясинського в 1895 р. Енгесер і незалежно від нього в 1909 р. Карман одержали «точну» в межах критерія Ойлера формулу

$$P^* = \pi^2 K I / (\mu l)^2, \quad (5)$$

де так званий приведений модуль K враховує в частині поперечного перерізу стрижня ефект розвантаження і залежить від E , $E_t(\sigma)$, а також від самої форми його поперечного перерізу [1]. Довгий час після робіт названих авторів вважалося що приведено-модульна сила (5) і є критичною силою для пружнопластичного стрижня і що початковий результат Енгесера був помилковим. Поворотним моментом в історії цього питання стали роботи Шенлі [8; 9] і Работнова [5], які започаткували новий підхід до явища випучування пружнопластичних систем, який потім одержав назву *концепції навантаження $P(t)$, що продовжується ($\delta P > 0$), або концепції Шенлі – Работнова*. Показано, що за межами пружності при $\delta P > 0$ втрата стійкості елементів конструкцій відбувається не в наслідок біфуркації форм рівноваги в переміщеннях, як це має місце при критерії Ойлера для пружних систем, а в наслідок *біфуркації процесу деформування в швидкостях переміщень*. При цьому критична сила $P = P^*$ і напруження $\sigma^* = P^*/F$ визначаються формулами

$$P^* = \pi^2 E_t(\sigma^*) I / (\mu l)^2, \quad (6)$$

$$\sigma^* = \pi^2 E_t(\sigma^*) / \lambda^2, \quad \sigma^* > \sigma_n. \quad (7)$$

Проведений пізніше [2, 3] на моделях стержня і пластини аналіз збурених рухів показав, що процес деформування при навантаженнях, більших ніж критичні за Шенлі – Работнова є нестійким: як завгодно мале збурення приводить до появи кінцевих незворотніх прогинів. До величини дотично-модульного навантаження (6) такий процес є стійким і викривлення, викликані дією малого збурення, за умови $P(t) < P^*$ зникають в процесі наступного довантаження. Що ж до приведено-

модульної сили Енгесера – Кармана (5), то вона є такою, що не досягається при біфуркації процесу деформування.

Числові розрахунки з аналізом одержаних результатів. Розрахунки для визначення критичних напружень проведемо для призматичних стрижнів, виготовлених із будівельної сталі Ст-3. Діаграма напружень $\sigma\sim\varepsilon$ для такого матеріалу показана на рис. 3 графіком $OABC_1B_1M$, або $OABC_1A_1O_1A_1B_1MB_m$ за наявності наклепу.

Спочатку проведемо числові розрахунки для стрижня без попереднього наклепу. В цьому разі конкретизація діаграми $OABC_1B_1M$ дається такими значеннями параметрів механічних характеристик:

$$\sigma_n=200 \text{ МПа}, \sigma_T=220 \text{ МПа}, \sigma_m=360 \text{ МПа}; \tag{8}$$

$$E_t(\sigma) = \left\{ \begin{array}{l} E_t^{(OA)} \equiv E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma \in [0; \sigma_n]; \\ E_t^{(AB)}(\sigma) = E \cdot (10,9 - 9,9 \sigma/\sigma_n), \sigma \in [\sigma_n, \sigma_T]; \\ E_t^{(BM)}(\sigma) = 0,01 \cdot E, \sigma \in [\sigma_T, \sigma_m]. \end{array} \right. \tag{9}$$

Формули (8), (9) визначають величину різниці $\sigma_T - \sigma_n = 20 \text{ МПа}$ між значеннями напружень на межі текучості та пропорційності відповідно, а також забезпечує гладке, без зломів та кутових точок, з'єднання криволінійної ділянки AB діаграми $\sigma\sim\varepsilon$ з прямолінійними OA і BM . Цим самим забезпечується неперервність модуля $E_t(\sigma) = d\sigma/d\varepsilon$, а отже і критичних напружень в усьому діапазоні зміни $\sigma \in [0, \sigma_m]$.

На рис. 4 показаний, побудований за формулами (2), (7) і (9), графік залежності $\sigma^* \sim \lambda$, де $\sigma^* \equiv \sigma_*$, якщо $\lambda \geq 101,8$ і $\sigma^* = \sigma^*$, коли $\lambda \leq 101,8$. Ділянка ao^* відповідає роботі стрижня в пружній зоні ($\sigma^* \leq \sigma_n$), а abm — за межами пружності ($\sigma^* \in [\sigma_n, \sigma_m]$). Характерним точкам a, b, m відповідають точки A, B, M діаграми $\sigma\sim\varepsilon$. Величина σ^* в точці b не перевершує 10% критичного $\sigma^* = \sigma_n$ на межі пропорційності.

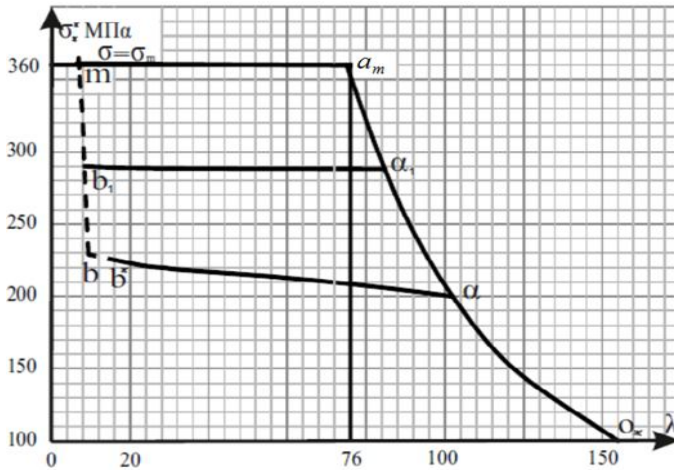


Рис. 4. - Залежність критичних напружень (σ^*) від величини гнучкості стрижня (λ) при відсутності (лінія o^*abm) та наявності (лінії $o^*aa_1b_1m$ і $o^*aa_1a_m m$) деформаційного зміцнення сталі Ст-3

Відносно рамок застосування формул Шенлі – Роботнова «зверху» необхідно зауважити. Умова $\sigma^* \leq \sigma_m$ є необхідною, але не є достатньою для встановлення верхньої межі застосування формул (6) і (7). Це твердження є наслідком того, що

зазначені формули одержані для призматичного стрижня, довжина якого (l), за визначенням, є набагато більшою характерних розмірів (d) його поперечного перерізу. При невиконанні умови $l \gg d$ призматичне тіло необхідно розглядати як трьохвимірне, закони деформації якого виходять за межі застосування формул (6) і (7). Отже верхня межа їх застосування потребує уточнень. В першу чергу таке уточнення необхідно провести для ділянки b^*bm графіка залежності $\sigma^* \sim \lambda < 16$ (рис. 4), а також одержати експериментальне підтвердження стрижневої форми втрати стійкості як єдиного цілого, що є характерною ознакою гнучких довгих стрижнів. До питання рамок застосування формул (6) і (7) ми частково ще повернемося.

Вплив явища наклепу на величину критичних параметрів стиснутого стрижня. Повернемося до рис. 3 і розглянемо, як його складову частину, діаграму напружень $O_1A_1B_1M$, одержану в експерименті з врахуванням явища наклепу матеріалу стрижня. Для довільного $\sigma^{(C1)}$ із інтервалу (σ_T, σ_m) величини напружень $\sigma^{(A1)} \equiv \sigma_n^*$ і $\sigma^{(B1)} \equiv \sigma_T^*$ «на нових межах» пропорційності й текучості однозначно визначаються із побудованої в експерименті діаграми $O_1A_1B_1M$.

У зв'язку з малою величиною силового трикутника $A_1B_1C_1$ і $\Delta\sigma^{(A1C1)} \equiv \sigma^{(C1)} - \sigma^{(A1)} \ll \sigma^{(A1)}$, часто при розрахунках на міцність та жорсткість елементів конструкцій, точки A_1 і B_1 стягують в точку C_1 . Таке спрощення в задачах стійкості не допустиме, так як воно приводить до нічим не виправданого розриву критичного напруження σ^* в точці C_1 на величину порядку (E/λ^2) .

Для сталі Ст-3, якщо, для прикладу, покласти $\sigma^{(C1)} = 289$ МПа, то для діаграми $O_1A_1B_1M$ в цілому можемо записати:

$$\sigma_n^* = 288 \text{ МПа}, \sigma_T^* = 290 \text{ МПа}, \sigma_m = 360 \text{ МПа},$$

$$E_t(\sigma) = \left\{ \begin{array}{l} E_t^{(O_1A_1)}(\sigma) \equiv E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma \in [0, \sigma_n^*]; \\ E_t^{(A_1B_1)}(\sigma) = E \cdot \left(143 - 142 \frac{\sigma}{\sigma_n^*} \right), \sigma \in [\sigma_n^*, \sigma_T^*]; \\ E_t^{(B_1M)}(\sigma) = 0,01 \cdot E, \sigma \in [\sigma_T^*, \sigma_m]. \end{array} \right. \quad (10)$$

Формула (10), так само як й (9), забезпечує неперервність дотичного модуля $E_t(\sigma)$ та критичного напруження в усьому діапазоні зміни $\sigma[0, \sigma_m]$.

Розв'язок задачі Ойлера і Шенлі – Работнова для стрижня з діаграмою напружень $O_1A_1C_1M$ дає такі результати:

1) Записані вище для визначення критичних сил P^* та напружень σ^* формули Ойлера (1) і (2) залишаються без змін. Змінюється тільки верхня межа їх застосування, тобто замість умови $\sigma^* \in [0, \sigma_n]$ потрібно записати $\sigma^* \in [0, \sigma_n^*]$, де $\sigma_n^* = \sigma^{(A1)}$.

2) Відмінність у формулах Шенлі – Работнова (6) і (7) для стрижнів без наклепу і з наклепом закладена тільки в дотичні модулі $E_t(\sigma)$. У першому випадку вони даються формулами (9), а у другому – (10).

Графік залежності критичного напруження σ^* від гнучкості стрижня λ при наклепі показаний на рис. 4 лінією $o^*aa_1b_1m$. Підняття напруження пропорційності σ_n до величини $\sigma_n^* \equiv \sigma^{(A1)}$ значно розширює рамки застосування формул Ойлера (1) і (2) і в кінцевому рахунку суттєво збільшує вантажопідйомність тонкостінних

елементів конструкцій. Зокрема, σ^* в точці a_1 перевершує критичне напруження в точці a на 44% і це лише часткове використання можливостей явища наклепу.

На кінець розглянемо граничний випадок, коли діаграма напружень $\sigma \sim \varepsilon$ задається лінією $O_m A_m B_m N$ і точка C_1 співпадає з точкою M (рис. 3). В цьому разі графік критичного навантаження $\sigma^* \sim \lambda$ з точністю до малих величин порядку $\Delta\sigma^{(A_m M)} < 0,006\sigma_m$ зображується лінією $o^* a a_1 a_m t$ (рис. 4) і представляється двома різними за своїм змістом небезпечними для стійкості чи міцності стержня частинами:

1) для $\lambda \geq 76$ – дугою $o^* a a_1 a_m$ гіперболи Ойлера $\sigma^* = \pi^2 E / \lambda^2$ і

2) для $\lambda \leq 76$ – лінією $a_m t$ з напруженням $\sigma^* = \sigma_m$ без попередньої втрати стійкості прямолинійної форми рівноваги чи процесу деформування. Іншими словами, за умови $\lambda \geq 76$ розрахунок стержня необхідно вести на стійкість, а при $\lambda \leq 76$ – на міцність. У граничному випадку явище наклепу дозволяє підняти максимальне критичне напруження на 80% у порівнянні з його величиною на межі пропорційності σ_n .

Зауважимо, що попереднє збільшення шляхом наклепу напруження σ_n^* до величини σ_m можна здійснити шляхом накладання на стержень додаткових тимчасових вязей.

Можливість узагальнення розглянутої на простому прикладі стиснутого стержня методики підняття величини критичних параметрів на більш складні задачі стійкості елементів конструкцій (стержнів, платівок, оболонок) за простого і складного навантаження відкривається, зокрема [7].

Бібліографічні посилання

1. **Беляев Н. М.** Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М., 1958. – 856 с.
2. **Клюшников В. Д.** Устойчивость процесса сжатия идеализированного упругопластического стержня / В. Д. Клюшников // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964. – № 6. – С. 59–69.
3. **Клюшников В. Д.** Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластины / В. Д. Клюшников // Инж. журнал МТТ, 1966. – № 4. – С. 28–36.
4. **Писаренко Г. С.** Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев и др. // – К.: Вища школа, 1973. – 668 с.
5. **Работнов Ю. Н.** О равновесии сжатых стержней идеализированного упругопластического стержня / Ю. Н. Работнов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964. – № 6. – С. 59–69.
6. **Швайко М. Ю.** Опір матеріалів. ч. II / М. Ю. Швайко // –Дн–ск: ДДУ, 1989. – 176 с.
7. **Швайко М. Ю.** Пластична деформація матеріалів при навантаженні по кусково-гладких траєкторіях з ділянками розвантаження за пружним законом / М. Ю. Швайко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – Вып. 58. – № 4. – С. 113–127
8. **Shanley F. R.** The column paradox / F. R. Shanley // J. Aeronaut. Sci., 1946. – Vol. 3. – No 12. – P. 678–679.
9. **Shanley F. R.** Inelastic column theory / F. R. Shanley // Ibid. – 1947. – Vol. 14. – No 5. – P. 281–287.

Надійшла до редколегії 21.04.2017

УДК-539.3:534:1

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ И ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖАТОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Н. Ю. Швайко, д-р техн. наук

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара
Днепр, Украина*

С использованием явления наклепа предложен метод значительного увеличения критических параметров при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия и процесса деформирования при осевом сжатии призматического стержня.

Ключевые слова: пластичность, стержень, устойчивость равновесия и процесса деформирования.

UDC-539.3:534:1

TO THE THEORY OF STABILITY OF THE RECTILINEAR FORM OF EQUILIBRIUM AND THE PROCESS OF DEFORMATION OF A COMPRESSED PRISMATIC ROD

M. Yu. Shvayko, Dr Sci. (Tech.)

*Oles Honchar Dnipropetrovsk National University
Dnipro, Ukraine*

With the use of the hardening phenomenon, a method of significantly increasing the critical parameters is proposed for the loss of stability of a rectilinear equilibrium shape and the process of deformation in the axial compression of a prismatic rod.

Key words: plasticity theory, rod, stability equilibrium and the process of deformation.

Comparison of problem decision of equilibrium stability [1; 6] and deformation process [6; 8] of compressed rods in elastic and plastic areas was presented. Deformational strengthening of these rods may occur for the reason of initial compression beyond the elastic limit with followed unloading and repetitive load to the stability loss. The calculations for the rods of steel St-3 were made as an example. The diagram of compressed stresses for the steel in initial position was described by plot $OABC_1B_1M$ in fig. 1. The plot was made using formulas (8) and (9).

$$\sigma_n = 200 \text{ MPa}, \sigma_T = 220 \text{ MPa}, \sigma_m = 360 \text{ MPa}; \quad (8)$$

$$E_t(\sigma) = \begin{cases} E_t^{(OA)} \equiv E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma \in [0; \sigma_n]; \\ E_t^{(AB)}(\sigma) = E \cdot (10,9 - 9,9 \cdot \sigma/\sigma_n), \sigma \in [\sigma_n, \sigma_T]; \\ E_t^{(BM)}(\sigma) = 0,01 \cdot E, \sigma \in [\sigma_T, \sigma_m]. \end{cases} \quad (9)$$

The cutting diagram $O_1A_1B_1M$ was achieved with taking into account of deformational strengthening that had been made by the initial compression of rod material up to stress value $\sigma^{(C1)} \in (\sigma_T, \sigma_m)$. The extreme case when $\sigma^{(C1)}$ approaches to σ_m near the strength limit was given.

The solutions of Oйler problem [1] and Shenly – Rabotnov problem [5; 8] about relationship between critical stresses σ^* and rod flexibility λ for three mentioned stress

diagrams $OABC_1M$, $O_1A_1B_1M$, $O_mA_mB_m$ were shown in fig. 2 by the plots o^*abm , $o^*aa_1b_1m$ and $o^*aa_1a_m m$ respectively. The small letters in fig. 2 correspond to the capital letters in fig. 1.

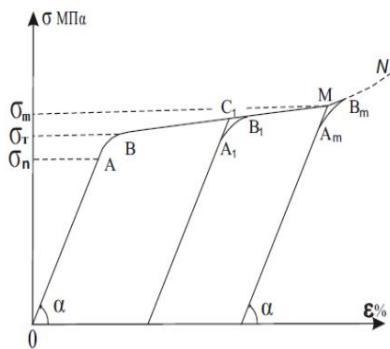


Fig. 1. - Strength diagrams $\sigma \sim \varepsilon$ steel ST-3 in the absence (line $OABC_1M$) and presence (line $O_1A_1B_1M$ and $O_mA_mB_m$) of pre-deformation strengthening

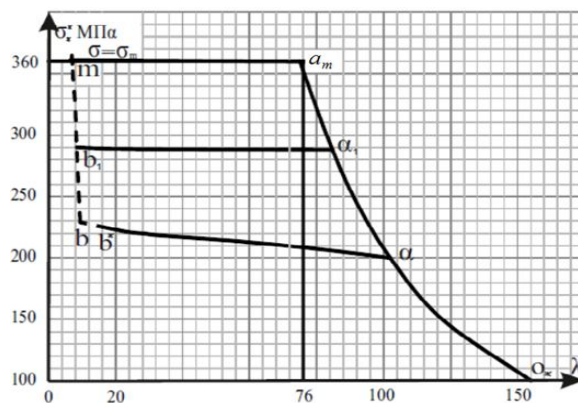


Fig. 2. - Dependence of critical stresses (σ^{}) from the value of the flexibility of the rod (λ) in the absence (line o^*abm) and the presence of (line $o^*aa_1b_1m$ and $o^*aa_1a_m m$) strain hardening steel ST-3**

Deformational strengthening of rod material by means of hardening increases considerably the critical parameters of stability and deformation process. So, with $\sigma^{(C1)}=290 \text{ MPa}$ mentioned increasing consists 44% and in the extreme case with $\sigma^{(C1)} \rightarrow \sigma_m=360 \text{ MPa}$ reaches a value 80%. Hence, it can be made the conclusion about considerable increasing of carrying capacity of construction elements by the use of ruling of deformational strengthening processes.

References

1. **Belyaev N. M.** Resistance of materials / N. M. Belyaev. – Moscow, 1958. – 856 p. (in Russian).
2. **Klyushnikov V. D.** Stability of the Compression Process of an Idealized Elastoplastic Rod / V. D. Klyushnikov // Izv. AN USSR. Mechanics and engineering. – 1964. – No 6. – P. 59–69. (in Russian).
3. **Klyushnikov V. D.** Stability of the process of compression of an idealized plate / V. D. Klyushnikov // Ing. journal MTT. – 1966. – No 4. – P. 28–36. (in Russian).
4. **Pisarenko G. S.** Resistance of materials / G. S. Pisarenko, V. A. Agarev et al. // – Kyiv: Vishcha shkola, 1973. – 668 p. (in Russian).
5. **Rabotnov Yu. N.** On the Equilibrium of Compressed Rods of an Idealized Elastoplastic Rod / Yu. N. Rabotnov // Izv. AN SSSR. Mechanics and engineering. – 1964. – No 6. – P. 59–69. (in Russian).
6. **Shvayko M. Yu.** Strength of materials. Part II / M. Yu. Shvayko // – Dnipropetrovsk: DDU, 1989. – 176 p. (in Ukrainian).
7. **Shvayko M. Yu.** Plastic deformation of materials in the case of navigating along lumpy smooth trajectories with little roses behind the spring law / M. Yu. Shvayko // Mat. method and phys.-mech. fields. – 2015. – Vol. 58. – No 4. – P.113–127. (in Ukrainian).
8. **Shanley F. R.** The column paradox / F. R. Shanley // J. Aeronaut. Sci. – 1946. – Vol. 3. – No 12. – P.678–679.
9. **Shanley F. R.** Inelastic column theory / F. R. Shanley // Ibid. – 1947. – Vol. 14. – No 5. – P. 281–287.