

УДК 539.3

В. М. Ахундов, д-р физ.-мат. наук, М. М. Кострова

*Национальная металлургическая академия Украины***НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО  
ЦИЛИНДРА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ  
ПРИ ЖЕСТКОЙ ПОСАДКЕ**

Приводятся результаты численного решения задачи о деформациях эластичного цилиндра, армированного двоякопериодически по окружностям волокнами квадратного сечения. Решение задачи производится с использованием модели кусочно-однородной среды с описанием матрицы и волокон на основе общих уравнений нелинейной теории упругости. Выявлено распределения деформаций и напряжений в характерных сечениях цилиндрического тела. Изучено проявление приповерхностного эффекта при больших деформациях как нарушение квазипериодического деформирования кольцевых элементов цилиндра возле его граничных поверхностей.

**Ключевые слова:** цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, деформирование нелинейное, метод конечных разностей, посадка жесткая, вращение.

**Введение.** В [1] дан обзор основных публикаций, отражающих исследования однородных и армированных цилиндров под воздействием вращательного движения. Рассмотрено деформирование свободно вращающегося эластичного цилиндра, матрица которого армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения с двоякопериодическим расположением. Исследование проведено на основе общих нелинейных уравнений теории упругости с использованием модели кусочно-однородной среды. Задача решена методом конечных разностей, с использованием конечно-разностных соотношений второго порядка точности, решение продолжено по угловой скорости вращения цилиндра. Изучено деформационное поведение кусочно-однородного цилиндра данного строения при вращении в условиях жесткого соединения с недеформируемым валом по внутренней поверхности.

**Постановка задачи.** Исследуется деформация эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при жесткой посадке по внутренней поверхности. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривается как сборка кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом  $r = a$  и внешним  $r = b$ . Цилиндр включает цилиндрические слои толщиной  $h$ , армированные кольцевыми волокнами квадратного сечения с длиной сторон  $\delta$ . Изучается осесимметричная деформация цилиндра при макроскопически плоском деформировании, когда длина цилиндра остается неизменяемой. В силу условий симметрии задача решается для правой половины дискового слоя толщиной  $h/2$ . Такой половинный слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу посередине между волокнами.

Используется система материальных цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , из которых  $\hat{\theta}^1$  – осевая,  $\hat{\theta}^2$  – окружная,  $\hat{\theta}^3$  – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначены как  $t, \phi, r$  соответственно. Осевая координата  $t$  отсчитывается от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой  $r$  используется координата  $z = r - a$ , отсчитываемая от внутренней поверхности цилиндра. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечены индексом  $n$  при значении  $n = 0$ , отвечающем матрице, и значениях  $n = 1, \dots, n_{\max}$ , как отвечающих волокнам в их нумерации по направлению от внутренней к внешней поверхности. В некоторых случаях для большей наглядности величины описания матрицы отмечаются отдельно индексом  $m$ . При ясной принадлежности индексы компонентов обычно опускаются.

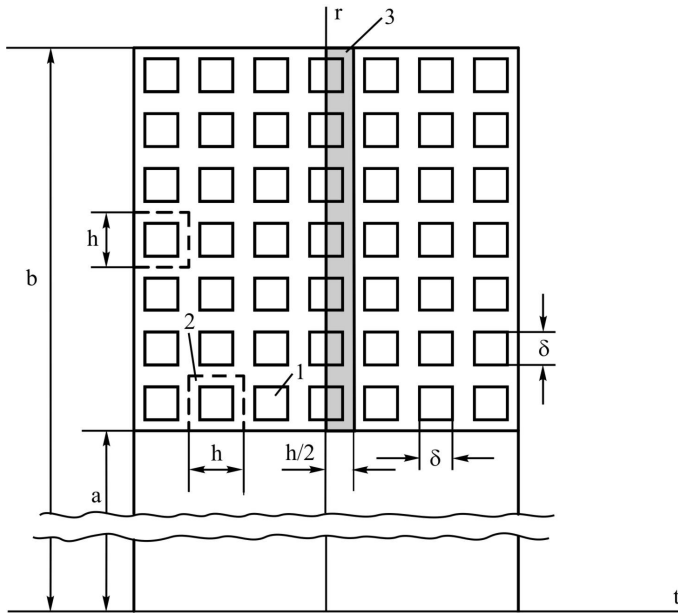


Рис. 1. – Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии:

1 – волокно квадратного сечения,

2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Используются геометрические, физические уравнения и уравнения равновесия нелинейной теории упругости [2] для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменения расстояния от их материальных точек до оси вращения цилиндра. В рассматриваемых уравнениях задается радиальная компонента плотности массовых сил, воздействующих на составляющие (компоненты) цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)})\omega^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

где  $u_{n(3)}$  – радиальная компонента вектора перемещения в  $n$ -ом составляющем;  $\omega = 2\pi \cdot f$  – угловая скорость вращения;  $f$  – число оборотов вращения в секунду.

Граничные условия для каждого из компонентов цилиндра, при которых решается краевая задача, соответствуют отсутствию осевых перемещений в поверхностях  $t = 0$  и  $t = h/2$  и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max};$$

$$u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad n = 0.$$

Для внутренней граничной поверхности цилиндра, ограничивающей нижний покровный слой связующего и жестко связанной с поверхностью недеформируемого вала, задаются равными нулю компоненты вектора перемещения:

$$u_{m(1)}|_{r=a} = 0, \quad u_{m(3)}|_{r=a} = 0,$$

где относящиеся к матрице величины отмечены индексом  $m$  (вместо  $n = 0$ ). На свободной от нагрузок внешней поверхности цилиндра, ограничивающей верхний покровный слой связующего, принимаются равными нулю компоненты несимметричного тензора Пиола – Кирхгофа:

$$t_{m(31)=0}|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)=0}|_{r=b} = 0.$$

Условия совместного деформирования задаются, исходя из условия равенства компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокон между собой на границах их раздела. Приведем эти условия, отметив величины, относящиеся к матрице, индексом  $m$ . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с  $n$ -м волокном

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(31)}(t, r) = t_{n(31)}(t, r), \quad t_{m(33)}(t, r) = t_{n(33)}(t, r), \quad 0 \leq t \leq \delta/2,$$

$$z = nh - (h + \delta)/2, \quad z = nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}.$$

В поперечной плоскости  $t = \delta/2$  раздела  $n$ -го волокна с матрицей

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r), \quad t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r),$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, \dots, n_{\max}.$$

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  в уравнениях задачи аппроксимируются с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [5]. Из граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2$ ,  $a \leq r \leq b$ . Данная система уравнений решается на основе процедуры дискретного метода Ньютона [3]. Единственность решения краевой задачи обеспечивается на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

**Численные результаты.** Получены результаты для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматривается как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра  $a = 100$  мм, внешний радиус

$b = 200 \text{ мм}$ . Квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон  $h = 1 \text{ мм}$ ; волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения  $\delta = 0,6h = 0,6 \text{ мм}$ ; коэффициент наполнения волокнами  $k_f = \delta^2 / h^2 = 0,36$ . Материалы матрицы и волокон задаются с помощью трехконстантного потенциала Левинсона – Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [4]. Для матрицы принимаются значения упругих параметров  $E_m = 4 \text{ МПа}$ ,  $\nu_m = 0,46$ ,  $\beta_m = 1$ ; для волокон –  $E_f = 68 \text{ МПа}$ ,  $\nu_f = 0,4$ . Плотность материалов матрицы и волокон одинакова  $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Результаты получены на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках  $0 \leq t \leq 0,3 \text{ мм}$  и  $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$  выбиралось по семь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. Вдоль координаты  $z$  в волокнах и между волокнами брали по тринадцать узловых точек при сдвоенных узлах на границе раздела компонентов.

На рис. 2 представлены контурные линии цилиндра в исходном и при угловой скорости  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  состояниях и график изменения радиального перемещения  $u_{(3)}$  в поперечном сечении цилиндра в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Радиальное перемещение для центрального сечения  $t = 0$  изменяется от значения  $u_{(3)} = 0$  при  $r = a = 100 \text{ мм}$  до  $u_{(3)} = 17,28 \text{ мм}$  при  $r = b = 200 \text{ мм}$ . Для крайнего сечения  $t = h/2 = 0,5 \text{ мм}$  радиальное перемещение во внешней поверхности  $u_{(3)} = 17,26 \text{ мм}$ . Внешний радиус цилиндра в деформированном состоянии при  $t = 0$   $b^* = b + u_{(3)} |_{t=0, r=b} = 217,28 \text{ мм}$ , а по месту крайнего сечения  $b^* = b + u_{(3)} |_{t=h/2, r=b} = 217,26 \text{ мм}$ .

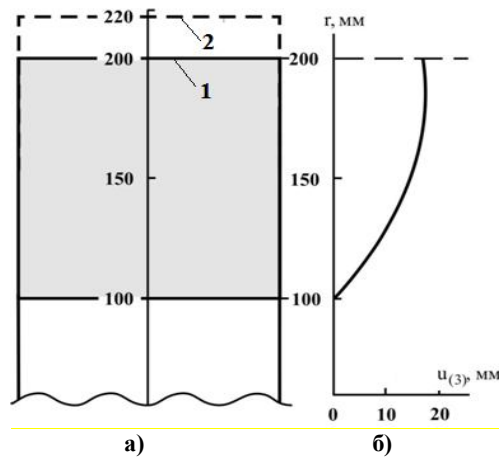


Рис. 2. – Контур осевого сечения цилиндра в исходном (линия 1) и при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  (линия 2) состояниях (а); распределение радиальных перемещений в поперечных сечениях цилиндра (б)

При этом толщина цилиндра в центральном сечения  $H^* |_{t=0} = b^* - a^* = 117,28 \text{ мм}$ , вместо прежней –  $H = b - a = 100 \text{ мм}$  ( $a^* = a$ ).

Радиальные перемещения  $u_{(3)}(r)$  не вполне монотонно изменяются по тол-

щине. Перемещение при  $z = 86,2 \text{ мм}$  достигает своего максимального значения  $u_{(3)} = 17,68 \text{ мм}$ , очень слабо уменьшается при дальнейшем возрастании  $z$  и на внешней поверхности  $z = 100 \text{ мм}$  принимает ранее указанное значение  $u_{(3)} = 17,28 \text{ мм}$ . Заметим, что подобный эффект имеет место и для однородного цилиндра с такой же внешней геометрией и условиями вращения. Так, в случае однородного цилиндра с теми же параметрами материала для матрицы, скорости вращения  $\omega = 2\pi \cdot 112,28 \text{ с}^{-1}$  и когда перемещение во внешнем контуре также  $u_{(3)} = 17,28 \text{ мм}$ , наибольшее перемещение  $u_{(3)} = 17,77 \text{ мм}$  при  $z = 85,7 \text{ мм}$ .

Далее представлены картины осевых, окружных и радиальных деформаций  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , задающих кратности удлинений координатных линий  $t (\hat{\theta}^1), \phi (\hat{\theta}^2), r (\hat{\theta}^3)$  соответственно, и угловой деформации  $\omega_{13}$ , как угла между осевой  $t$  и радиальной  $r$  координатными линиями. Описание деформаций приводится для характерных кольцевых элементов из дисковой сборки цилиндра, по которым можно получить представление и о деформациях других ее элементов. В соответствии с условиями симметрии задачи функция деформации  $\omega_{13}$  антисимметрична, а функции деформаций  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – симметричны относительно центрального сечения  $t = 0$  и краевого сечения  $t = h/2$  при продолжении решения за пределы интервала  $0 \leq t \leq h/2$  на остальную область цилиндра (функцию  $\omega_{13}$  называем антисимметричной, имея в виду антисимметричное поведение деформации поперечного сдвига  $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13}$ .)

На рис. 3 показаны распределения параметров деформации во внутренней поверхности цилиндра  $z = 0$ , по которой производится его соединение с недеформируемым валом.

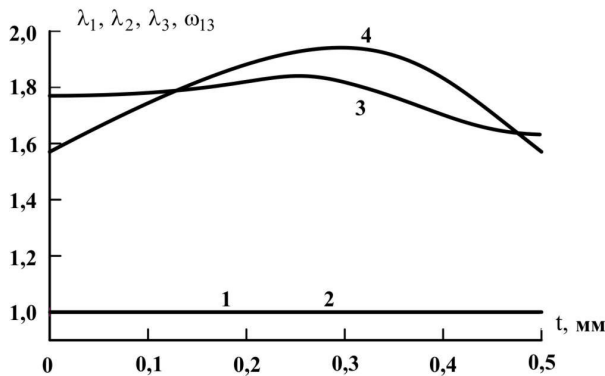


Рис. 3. – Распределения кратностей удлинений  $\lambda_1$  (линия 1),  $\lambda_2$  (линия 2),  $\lambda_3$  (линия 3) и координатного угла  $\omega_{12}$  (линия 4) для внутренней поверхности  $z = 0$  первого кольцевого элемента

В силу неизменяемости размеров в данной поверхности осевая и окружная деформации  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Радиальная деформация  $\lambda_3$  слабо и немонотонно изменяется на интервале волоконно-матричного слоя сборки  $0 \leq t \leq \delta/2$  и монотонно уменьшается в ее матричном слое  $\delta/2 \leq t \leq h/2$ . Данная деформация на

інтервалі зборки кільцевих елементів  $0 \leq t \leq h/2$  змінюється в діапазоні  $1,83 \geq \lambda_3 \geq 1,63$ . Углова деформація  $\omega_{13}$  монотонно зростає під волокном от значення  $\omega_{13} = \pi/2$  до  $\omega_{13} = 1,94$  і монотонно зменшується за волокном от указанного значення до  $\omega_{13} = \pi/2$ .

На рис. 4 приведені криві залежностей параметрів деформації от осевий координати  $t$  для поверхності  $z = h/2 - \delta/2 = 0,2$  мм, в якій розташована границя розділа матриці с волокном першого кільцевого елемента по внутрішній поверхності волокна (здесь и на наступних рисунках номери ліній відповідають параметрам, приведенним на рис. 3). Параметри деформації  $\lambda_3$  и  $\omega_{13}$  с переходом границі розділа компонентів циліндра претерпевають розриви из-за різниці пружних властивостей двох контактуємих матеріалів. В відповідності с цим данні деформації на границі розділа задаються двома кривими, одна из которых относится к матриці, а друга к волокну (криві залежностей для матриці и волокна відзначені номерами с одним и двома штрихами відповідно). В кутовій точці  $(\delta/2, h/2 - \delta/2)$  поперечного сечення волокна, сдвоенної с куговою точкою матричного матеріала, с переходом от волокна и от матриці к матричному слою испытывают розриви деформації  $\lambda_1, \lambda_3$  и  $\omega_{13}$ . Данна точка сингулярна (нерегулярна), как принадлежащая лінії порушення гладкості поверхності контакту різних матеріалів. Происходить расхождение значений указанных деформаций из решения задачи в окрестности кугової точки с увеличением числа узловых точек конечно-разностной схемы задачи. При этом сама окрестность кугової точки сужается.

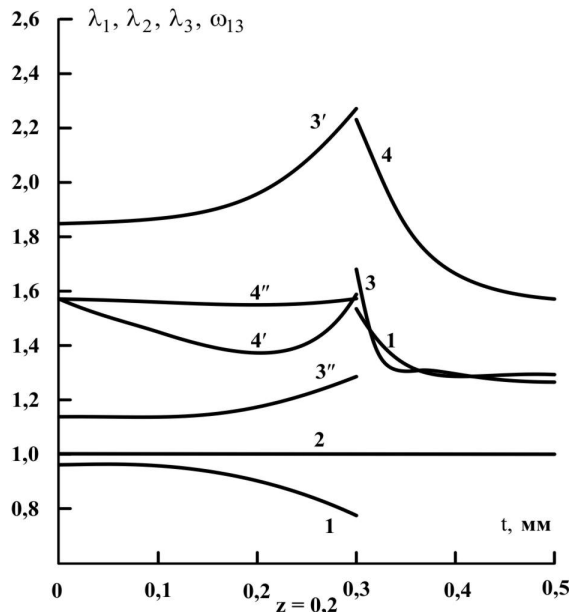


Рис. 4. – Распределения кратностей удлинений  $\lambda_i$  и координатного угла  $\omega_{13}$  для поверхности  $z = 0,2h$  раздела матрицы и волокна в первом кольцевом элементе

На рис. 5 даны кривые зависимостей параметров деформации от координаты  $t$  для цилиндрической поверхности  $z = h/2 = 0,5$  мм, срединной 1-го кольцевого элемента. Функция окружной деформации остается практически равной единице ( $\lambda_2 \cong 1$ ). Функции  $\lambda_1$  и  $\omega_{13}$  испытывают разрывы, а функция  $\lambda_3$  – излом с переходом

дом границы раздела компонентов из-за изменения скачком механических свойств материала. Волокно в осевом направлении укорачивается, матричный материал возле волокна испытывает осевое удлинение, а возле края дискового слоя  $t = h/2$  – осевое сжатие. Угол сдвига на всем протяжении волокна практически равен нулю  $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13} \cong 0$ , а в матричном слое достаточно малый, когда  $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13} \leq 0,05$ . На краю сборки  $t = 0,5$  мм относительное радиальное удлинение достигает значительной величины  $\lambda_3 - 1 = 0,72$ . Волокно испытывает осевую деформацию, которая монотонно уменьшается в диапазоне  $1,01 \geq \lambda_1 \geq 0,96$ . Осевая деформация в матричном слое также является монотонно убывающей функцией, диапазон ее изменения  $1,30 \geq \lambda_1 \geq 0,89$ .

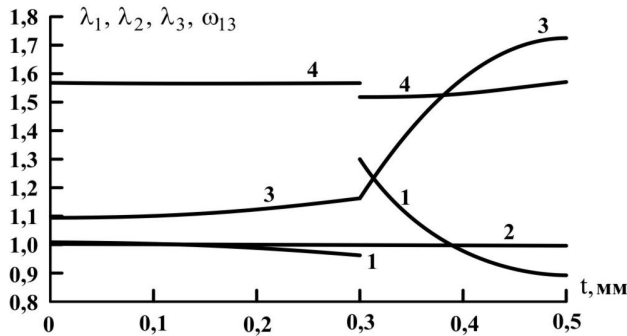


Рис. 5. – Распределения кратностей удлинений  $\lambda_i$  и координатного угла  $\omega_{13}$  для срединной поверхности  $z = 0,5h$  первого кольцевого элемента

На рис. 6 приведены распределения параметров деформации на поверхности  $z = h/2 + \delta/2 = 0,8$  мм раздела волокна первого кольцевого элемента с матрицей по внешней цилиндрической поверхности волокна. Картина деформации в данной поверхности в качественном отношении такая же, как и для внутренней поверхности раздела  $z = h/2 - \delta/2$ . Что касается угловой деформации  $\omega_{13}$ , то при этом следует между собою сопоставлять модули углов сдвига  $|\pi/2 - \omega_{13}|$ . Но количественно имеют место существенные различия. Например, кратность радиального удлинения в матрице над волокном изменяется в диапазоне от  $\lambda_3 = 1,82$  в центральном сечении  $t = 0$  до  $\lambda_3 = 2,45$  в сечении  $t = \delta/2$  на краю волокна. Напомним, что первое из указанных значений «стабильное», практически не изменяется, а второе, как и значения в примыкающей к нему узкой окрестности, заметно изменяется при каждом последующем удвоении числа узловых точек по координатам  $t$  и  $z$  (преимущественно по  $t$ ). Сама окрестность существенного изменения значений деформации при этом сужается.

На рис. 7 даны распределения деформаций в поверхности  $z = h = 1$  мм в связующем материале, по которой формально разделяем 1 и 2-й кольцевые элементы. Деформация  $\lambda_1$  всюду монотонно возрастающая функция, а деформация  $\lambda_3$  всюду монотонно убывающая на интервале дискового слоя  $0 \leq t \leq h/2$ . При этом вдоль осевого направления в промежутке между волокнами  $0 \leq t \leq \delta/2$  связующее укорачивается ( $\lambda_1 < 1$ ), а в промежутке за волокнами  $\delta/2 \leq t \leq h/2$  – удлиняется ( $\lambda_1 > 1$ ). Радиальная деформация изменяется от значения  $\lambda_3 = 2,06$  в централь-

ном сеченні  $t = 0$  до значення  $\lambda_3 = 1,25$  в крайовому сеченні  $t = h/2$ . Деформації  $\lambda_2$  і  $\omega_{13}$  на всем інтервалі дискового слоя мало відличаються від 1 і  $\pi/2$ :  $\lambda_2 = 1,0045$ ,  $1,5646 \leq \omega_{13} \leq \pi/2$ .

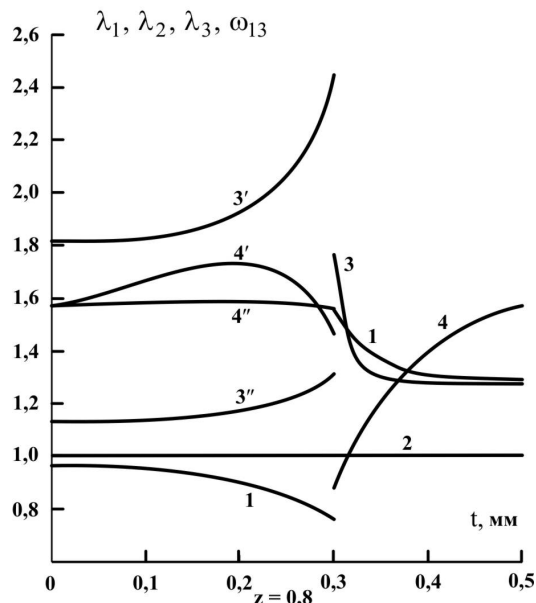


Рис. 6. – Распределения кратностей удлинений  $\lambda_i$  и координатного угла  $\omega_{13}$  для поверхности  $z = 0,8h$  раздела матрицы и волокна в первом кольцевом элементе

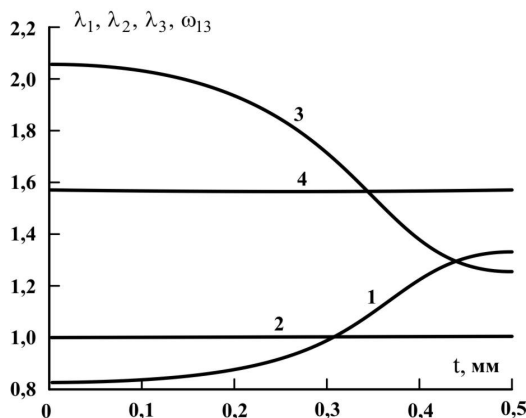


Рис. 7. – Распределения кратностей удлинений  $\lambda_i$  и координатного угла  $\omega_{13}$  для поверхности  $z = h$  раздела первого и второго кольцевых элементов

По итогам рассмотрения распределения деформаций во внешней и внутренней поверхностях 1-го кольцевого элемента, а также на внешней и внутренней поверхностях раздела связующего с волокном, приходим к выводу о неперiodическом характере деформирования данного элемента. В качестве оценки отклонения от периодического (квазипериодического) деформирования кольцевого элемента принимаются различия между деформациями в его внешней и внутренней ограничивающих цилиндрических поверхностях (по условиям симметрии решаемой задачи различия между деформациями на краях  $t = -h/2$  и  $t = h/2$  сборки



кольцевых элементов отсутствуют). Наибольшие из разниц узловых значений на противоположно расположенных граничных поверхностях элемента для отдельных параметров деформации называем частичными показателями неперидического деформирования элемента и обозначаем их как

$$\begin{aligned} S_1 &= \sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-| \cdot 100\%, & S_2 &= \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-| \cdot 100\%, \\ S_3 &= \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-| \cdot 100\%, & S_4 &= \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \cdot 100\%. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь параметры деформации, отмеченные «+» и «-» относятся к внешней и внутренней поверхностям кольцевого элемента; индексом  $i$  отмечены узловы значения параметров деформации в данных поверхностях, отвечающие узловому значению осевой координаты  $t = t_i$  в конечно-разностной схеме решения задачи.

Из найденных различий между одноименными параметрами деформации на внешней и внутренней поверхностях элемента выбирается максимальное по модулю как показатель неперидического деформирования элемента и выражается в процентах

$$S = \max \left( \sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-|, \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-|, \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-|, \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \right) \cdot 100\%. \quad (2)$$

Выражение (2) для показателя  $S$  называем далее критерием неперидического деформирования кольцевого элемента, что может быть записано в более кратком виде как

$$S = \max(S_1, S_2, S_3, S_4). \quad (3)$$

Также производим оценку неперидичности деформирования кольцевого элемента, сопоставляя деформаций на внешней (верхней) и внутренней (нижней) цилиндрических поверхностях раздела материалов матрицы и волокна. Показатель неперидического деформирования определяем по формуле (3), в которой  $S_1, \dots, S_4$  находим отдельно для связующего над верхней и под нижней поверхностями и отдельно для волокна под верхней и над нижней поверхностями его разделения с матрицей. При этом частичные показатели неперидического деформирования  $S_1, \dots, S_3$  вычисляем по формулам (1), а показатель по угловой деформации как

$$S_4 = \sup_i \left| |\gamma_{13}^+| - |\gamma_{13}^-| \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

При квазиперидическом деформировании кольцевого элемента, когда исходная материальная конфигурация элемента симметрична относительно его срединной цилиндрической поверхности, сдвиговые деформации в поверхностях раздела, относящиеся к одному и тому же материалу, практически равны по модулю и противоположны по знаку. В этом случае показатель  $S_4$  практически равняется нулю. Заметим, что строго перидическое деформирование кольцевого элемента, как цилиндрически симметричное относительно его срединной цилиндрической поверхности, невозможно из-за различия в кривизнах внутренней и внешней поверхностей элемента. Но при размерах поперечного (осевого) сечения, малых по сравнению с диаметральным размером элемента, его деформация может мало отличаться от перидической (стремиться к перидической с уменьшением поперечного сечения).

Критерий (3) показателен и при малых деформациях в линейной механике деформирования, в которой деформированная конфигурация тела рассматривается

как совпадающая с отсчетной. В этом случае вычисленный по данному выражению показатель неперіодичности деформирования элемента всегда мало отличается от нуля, свидетельствуя о его квазипериодическом деформировании.

Применим критерии (2) и (3) для оценки неперіодичности деформирования первого кольцевого блока. Содержащиеся в них частичные показатели неперіодического деформирования вычислим по формулам (1) и (4). Эти показатели и показатель в целом неперіодического деформирования элемента, а также значения осевой координаты, при которых достигаются показатели, приводим в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Показатели различия деформаций во внешней  $z = 1$  мм и внутренней  $z = 0$  ограничивающих поверхностях 1-го кольцевого элемента

Показатель	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S$
Значение показателя, %	33,1	0,451	37,7	37,3	37,7
$t$ , мм	0,5	0,5	0,5	0,3	0,5

Таблица 2. Показатели различия деформаций во внешней  $z = 0,8$  мм и внутренней  $z = 0,2$  мм разделяющих поверхностях 1-го кольцевого элемента

Показатель	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S$
Значение показателя для связующего, %	1,42	0,11	17,4	8,94	17,4
$t$ , мм	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Значение показателя для волокна, %	1,42	0,11	2,67	0,95	2,67
$t$ , мм	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Значение показателя для матричного слоя, %	4,71	0,34	8,38	8,32	8,38
$t$ , мм	1/3	0,5	0,3	11/30	0,3

Показатели деформирования в ограничивающих поверхностях элемента достигают своих значений по месту перехода от волоконно-матричного слоя к матричному  $t = 0,3$  мм и на краю сборки  $t = 0,5$  мм. В цилиндрических поверхностях раздела волокна со связующим показатели деформирования для волоконно-матричного слоя достигают своих значений в угловых точках (линиях)  $t = 0,3$  мм. В матричном слое показатели принимают свои значения на его краях  $t = 0,3$  мм,  $t = 0,5$  мм и в промежуточных точках  $t = 1/3$  мм и  $t = 11/30$  мм. Показатели деформирования для ограничивающих поверхностей элемента намного превосходят соответствующие показатели для его разделяющих поверхностей. Итоговый показатель неперіодического (несимметрического) деформирования кольцевого элемента, как максимальный частичный показатель из приведенных в обеих таблицах,  $S = 37,7\%$  достигается по параметру  $\lambda_3$  на краю сборки  $t = 0,5$  мм.

Для получения представления в целом о характере напряженного состояния в центральном сечении  $t = 0$  и краевом  $t = 0,5$  мм дисковой сборки кольцевых элементов в цилиндре (см. рис. 1) при рассматриваемой скорости вращения  $\omega = 2\pi \cdot 140c^{-1}$  приводим распределения напряжений в указанных сечениях по высоте сборки при

данной скорости. Графики этих распределений построены отдельно для связующего и матрицы. В случае матрицы точки, отвечающие значениям напряжения во внутренней поверхности  $z = 0$ , в поверхностях разделения кольцевых элементов (посередине между волокнами)  $z = nh$ ,  $n = 1, \dots, 99$  и во внешней поверхности  $z = 100h$ , соединяли последовательно прямолинейными отрезками. Для волокон прямолинейными отрезками соединяли точки, отвечающие значениям напряжения в срединных поверхностях волокон (посередине волокон)  $z = nh - h/2$ ,  $n = 1, \dots, 100$ . При  $t = 0,5$  мм также для каждого из напряжений построили две зависимости по значениям напряжений в точках, расположенных напротив точек, из напряжений в которых исходили при построении зависимостей для сечения  $t = 0$ . При  $t = 0$  одна зависимость относится к матрице, а другая к волокнам, при  $t = 0,5$  мм обе зависимости относятся к матрице).

На рис. 8 изображены кривые зависимостей осевого напряжения  $p_{11}$  в сечении  $t = 0$  для матрицы, построенные по значениям напряжения в границах кольцевых элементов и значениям напряжения в их срединных поверхностях соответственно.

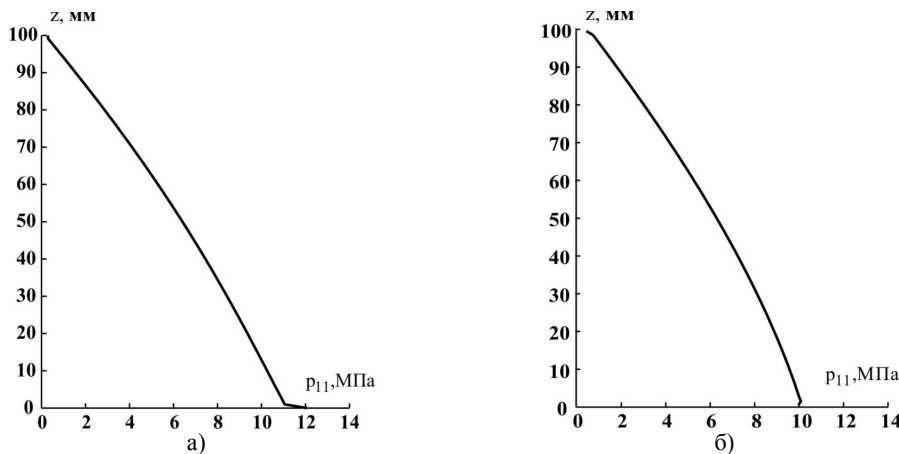


Рис. 8. – Распределения значений осевого напряжения  $p_{11}$  для сечения  $t = 0$  :  
 а) в граничных поверхностях кольцевых элементов;  
 б) в срединных поверхностях волокон

На рис. 9 изображены соответствующие распределения напряжения  $p_{11}$  в сечении  $t = h/2 = 0,5$  мм. На этих рисунках отрезки прямых линий, соединяющие две смежные из опорных точек, образуют непрерывные и практически гладкие кривые зависимостей. Нарушения гладкостей этих кривых находят в пределах погрешности графического изображения этих кривых и визуально не воспринимаются. Исключение обусловлено наличием начального и конечного участков этих графиков с протяжениями по координате  $z$ , равными  $h$ . Данные участки представляют собой прямые отрезки, негладко сопрягаемые с остальной (практически) гладкой частью графической зависимости. Эти концевые участки отражают проникновение приповерхностного эффекта на глубину, по крайней мере, не более двух периодов армирования кольцевыми волокнами возле внутренней поверхности цилиндра и одного периода армирования возле его внешней поверхности.

В сечении  $t = 0$  для матрицы напряжение  $p_{11}$  монотонно убывает от значения  $p_{11} = 12,0$  МПа в заделке (при  $z = 0$ ) и значения  $p_{11} = 11,1$  МПа при  $z = 1$  мм до значения  $p_{11} = 0,31$  МПа при  $z = 99$  мм и значения  $p_{11} = 0,27$  МПа во внешней поверхности ( $z = 100$  мм). В этом же сечении для волокон напряжение изменяется от значения  $p_{11} = 9,9$  МПа для середины первого волокна и  $p_{11} = 10,1$  МПа для середины второго волокна до значения  $p_{11} = 0,7$  МПа для середины 99-го волокна и  $p_{11} = 0,5$  МПа для середины 100-го волокна. Для сечения  $t = h/2$  с переходом от поверхности жесткой заделки к поверхности раздела первого и второго кольцевых элементов напряжение в связующем возрастает от значения  $p_{11} = 10,1$  МПа до значения  $p_{11} = 11,7$  МПа. С переходом от 1-го волокна до второго (для середин волокон) напряжение изменяется от  $p_{11} = 8,70$  МПа до  $p_{11} = 8,75$  МПа.

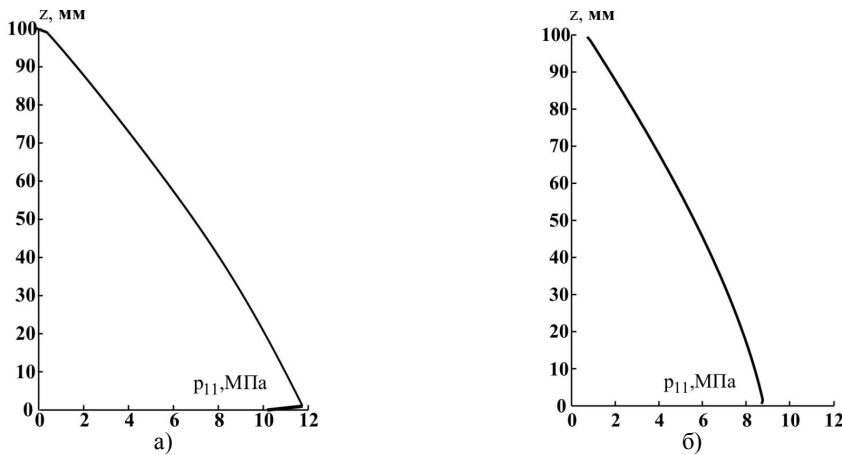


Рис. 9. – Распределения значений осевого напряжения  $p_{11}$  для сечения  $t = h/2$ :  
 а) в граничных поверхностях кольцевых элементов;  
 б) в срединных поверхностях волокон

На границе раздела 99-го и 100-го элементов ( $z = 99$  мм)  $p_{11} = 0,3$  МПа, во внешней поверхности цилиндра (100-го элемента)  $p_{11} = -0,07$  МПа. Для 99-го волокна ( $z = 98,5$  мм)  $p_{11} = 0,9$  МПа, а для 100-го волокна ( $z = 99,5$  мм)  $p_{11} = 0,7$  МПа.

Для сечения  $t = 0$ , за исключением первых 2-х, 3-х кольцевых элементов, уровни напряжений в матрице и волокнах довольно близки между собой. Тогда как для сечения  $t = 0,5$  мм уровень напряжений в разделах кольцевых элементов существенно больше уровня напряжений в их срединных поверхностях. Отметим при этом малое напряжение осевого сжатия по месту центрального для матричного слоя сечения  $t = 0,5$  мм во внешней поверхности последнего (100-го) кольцевого элемента. Это вполне согласуется с малыми растягивающими напряжениями в этой же поверхности по месту сечения  $t = 0$ .

На рис. 10 и рис. 11 отображены зависимости окружного напряжения  $p_{22}$  в сечениях  $t = 0$  и  $t = 0,5$  мм в целом для всей дисковой сборки кольцевых элементов в цилиндре.

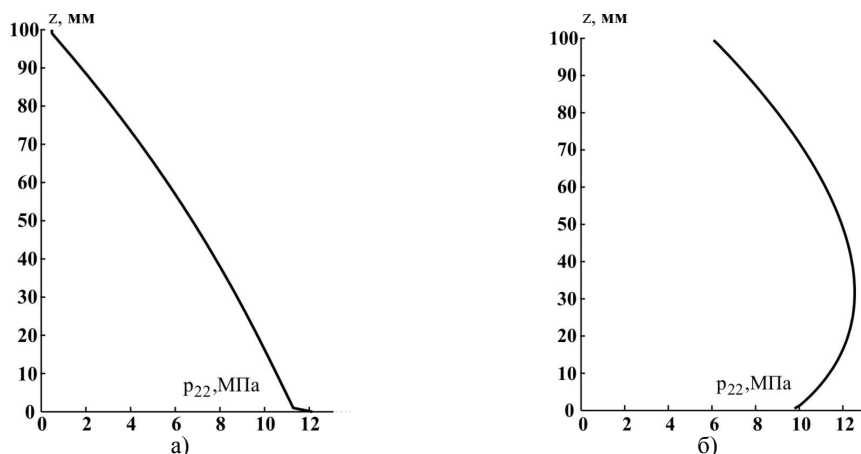


Рис. 10. – Распределения значений осевого напряжения  $p_{22}$  для сечения  $t = 0$  :  
 а) в граничных поверхностях кольцевых элементов,  
 б) в срединных поверхностях волокон

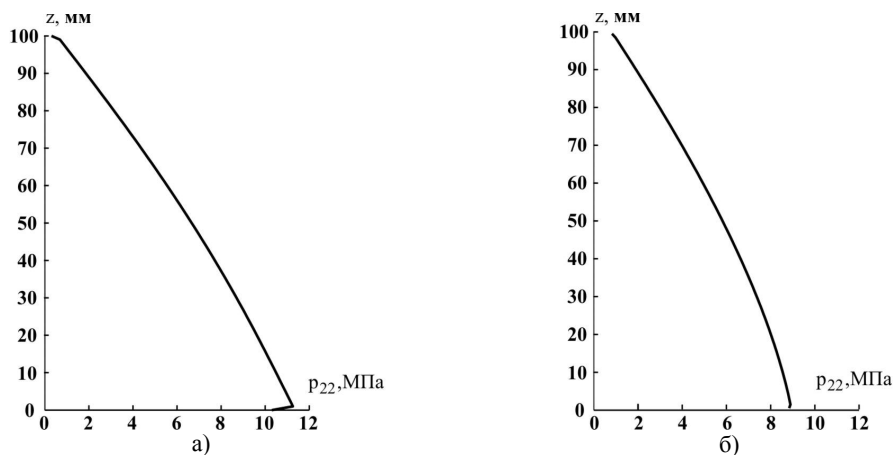


Рис. 11. – Распределения значений осевого напряжения  $p_{22}$  для сечения  $t = h / 2$  :  
 а) в граничных поверхностях кольцевых элементов,  
 б) в срединных поверхностях волокон

Зависимости для данного напряжения в обоих сечениях, построенные для связующего по значениям напряжения в граничных поверхностях элементов, близки к соответствующим зависимостям для напряжения  $p_{11}$ . Близкими между собой оказываются и кривые распределения напряжений  $p_{22}$  и  $p_{11}$ , построенные также для связующего по значениям этих напряжений в сечении  $t = 0,5$  мм по месту срединных поверхностей кольцевых элементов.

Распределение окружных напряжений  $p_{22}$  в волокнах (рис. 10, б) существенно отличается от распределения в них осевых напряжений  $p_{11}$  (рис. 8, б). Напряжение  $p_{22}$  увеличивается с переходом между волокнами от первого волокна до 32-го включительно и затем уменьшается на последующих волокнах, изменяется от

значения  $p_{22} = 9,8 \text{ МПа}$  при  $z = 0,5 \text{ мм}$  (середина 1-го элемента) до  $p_{22} = 12,5 \text{ МПа}$  при  $z = 31,5 \text{ мм}$  (середина 32-го элемента) и далее до  $p_{22} = 6,1 \text{ МПа}$  при  $z = 99,5 \text{ мм}$  (середина 100-го элемента). При этом заметим, что функция  $p_{22}$ , построенная «на волокнах», не отражает наличие приповерхностных эффектов возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра.

На рис. 12 и рис. 13 изображены кривые зависимостей радиального напряжения  $p_{33}$  от радиальной координаты  $z$  для сечений  $t = 0$  и  $t = 0,5 \text{ мм}$  соответственно. Напряжение  $p_{33}$  в центральном сечении  $t = 0$  по месту границ кольцевых элементов (рис. 12, а) изменяется от значений  $p_{33} = 13,6 \text{ МПа}$  ( $z = 0$ ) и  $p_{33} = 14,0 \text{ МПа}$  ( $z = 1 \text{ мм}$ ) до  $p_{33} = 0,03 \text{ МПа}$  ( $z = 99 \text{ мм}$ ) и  $p_{33} = 0$  ( $z = 100 \text{ мм}$ ).

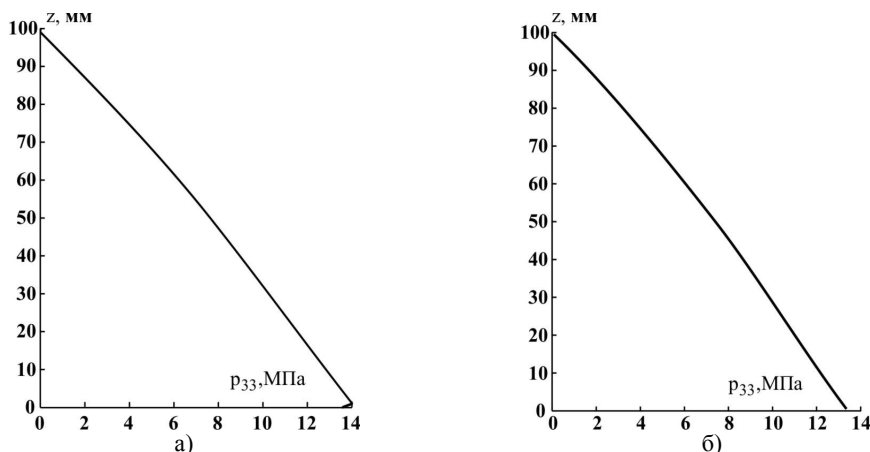


Рис. 12. – Распределения значений радиального напряжения  $p_{33}$  в граничных поверхностях кольцевых элементов (а) и в срединных поверхностях волокон (б) для сечения  $t = 0$

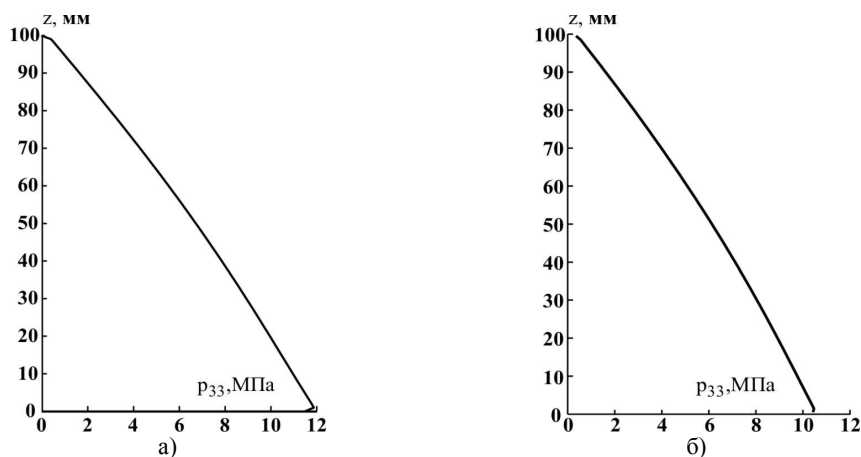


Рис. 13. – Распределения значений радиального напряжения  $p_{33}$  в граничных поверхностях кольцевых элементов (а) и в срединных поверхностях волокон (б) для сечения  $t = h / 2$

В этом же сечении для волокон напряжение изменяется от значений  $p_{33} = 13,3 \text{ МПа}$  при  $z = 0,5 \text{ мм}$  и  $p_{33} = 13,2 \text{ МПа}$  при  $z = 1,5 \text{ мм}$  до  $p_{33} = 0,2 \text{ МПа}$

при  $z = 98,5 \text{ мм}$  и  $p_{33} = 0,1 \text{ МПа}$  при  $z = 99,5 \text{ мм}$ . Значения напряжения  $p_{33}$  в данном сечении по месту заделки и для примыкающих к заделке кольцевых элементов (рис. 12) превышают наибольшие значения напряжения  $p_{33}$  в сечении  $t = 0,5 \text{ мм}$  (рис. 13).

Эти же напряжения превышают и наибольшие напряжения, фиксируемые на графиках зависимостей для осевых и окружных напряжений (рис. 8 – 11). Кривая для волокон (рис. 12, б), как и соответствующая кривая для напряжения  $p_{22}$  (рис. 10, б) не отражает наличие приповерхностных эффектов. Тогда как на рис. 13 обе кривые, относящиеся к связующему материалу, отражают наличие приповерхностных эффектов возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра.

Далее рассмотрен приповерхностный эффект в цилиндрическом теле, обусловленный наличием волокон, как нарушение квазипериодического деформирования кольцевых элементов тела, расположенных вблизи его внутренней и внешней ограничивающих поверхностей. Глубина проникновения приповерхностного эффекта измеряется количеством кольцевых элементов, расположенных в дисковом слое цилиндра возле его граничной поверхности, деформирование которых не является квазипериодическим. В рассматриваемом случае исследования цилиндрического тела с кольцевыми волокнами квадратного сечения достаточно ограничиться сравнением деформаций в ограничивающих и разделяющих поверхностях элемента. В табл. 3 приведены значения показателя неперіодичності деформування  $S$  для характерных кольцевых элементов. Для других кольцевых элементов значения показателя  $S$  являются промежуточными в соответствии с расположением их между кольцевыми элементами, для которых в таблице даны значения этого показателя.

Таблица 3

Значение показателя неперіодичності деформування  
для кольцевых элементов в сборке цилиндра при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$

Номер кольцевого элемента	1	2	51	99	100
Показатель $S$ , %	37,7	2,3	1,0	0,9	9,6

При выявлении глубины проникновения приповерхностного эффекта назначим верхнюю границу  $G_s$  различий между значениями параметров деформации в точках кольцевого элемента, симметрично расположенных относительно его срединной поверхности, при которых деформация элемента считается квазипериодической. Если принять верхнюю границу квазипериодического деформирования  $G_s = 2\%$ , то глубина приповерхностного эффекта при скорости вращения цилиндра  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  будет ограничена двумя кольцевыми элементами (1-ым и 2-ым) возле внутренней поверхности  $r = a$  цилиндра и одним (100-ым) элементом возле его внешней поверхности  $r = b$ . При  $G_s = 3\%$  глубина проникновения приповерхностного эффекта оценивается одним кольцевым элементом возле каждой из обеих ограничивающих поверхностей цилиндрического тела.

**Выводы.** Построена методика решения задачи для эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием сил инерции вращения вокруг оси симметрии. В основу методики

положена модель кусочно-однородної серед при великих деформаціях її компонентів. С допомогою комп'ютерної реалізації методики вивчили макроскопічно плоске деформування циліндра при його жорсткій посадці по внутрішній поверхні. Встановлені значення найбільшого розвитку деформацій зв'язуючого між волокнами в матрично-волоконному шарі і в областях матричного шару, примикаючого до волокон. Визначено глибину проникнення приповерхностного ефекту поблизу внутрішньої поверхні циліндра в межах одного або двох кільцевих елементів в залежності від задаваного значення параметра неперіодичності їх деформування. Виявлено характер зміни напружень між поверхнями розділу кільцевих елементів в циліндрі і між їх середніми поверхнями. Криві розподілу цих напружень по товщині циліндра в цілому відображають наявність приповерхностних ефектів поблизу обох граничних поверхонь.

### Бібліографічні посилання

1. **Кострова М. М.** Деформування еластичного циліндра з кільцевими волокнами під впливом обертання при вільній посадці / М. М. Кострова // Вісн. Запорізького нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 205–212.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. **Ортега Дж.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
4. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К. Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
5. **Korn G. A.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review / G. A. Korn and T. M. Korn. – N.Y.: General Publ. Company, 2000. – 1151 p.

Надійшла до редколегії 17.04.2017

УДК 539.3

## НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ПРИ ЖОРСТКІЙ ПОСАДЦІ

**В. М. Ахундов**, д-р фіз.-мат. наук, **М. М. Кострова**

*Національна металургійна академія України,  
Дніпро, Україна*

Наводяться результати чисельного рішення задачі про деформації еластичного циліндра, двоякоперіодично армованого по колах волокнами квадратного перетину. Рішення задачі проведено з використанням моделі кусково-однорідного середовища з описом матриці і волокон на основі загальних рівнянь нелінійної теорії пружності. Виявлено розподіл деформацій і напружень в характерних перетинах циліндричного тіла. Вивчено прояв приповерхневого ефекту при великих деформаціях як порушення квазіперіодичного деформування кільцевих елементів циліндра біля його граничних поверхонь.

**Ключові слова:** циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, деформування нелінійне, метод кінцевих різниць, посадка жорстка, обертання.



UDC 539.3

## NONLINEAR DEFORMATION OF A PIECE-HOMOGENEOUS CYLINDER UNDER THE ACTION OF ROTATION AT A HARD FIXING

**V. M. Akhundov**, Dr. Sci. (Phis.-Math.), **M. M. Kostrova**

*National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnepr, Ukraine*

The results of a numerical solution of the problem of the deformations of an elastic cylinder doubly-periodically reinforced in circumferences by fibers of square cross section are presented. The solution of the problem was based on a model of a piecewise homogeneous medium with a description of the matrix and fibers on the basis of general equations of the nonlinear theory of elasticity. The distribution of deformations and stresses in the characteristic sections of a cylindrical body was identified. The manifestation of the near-surface effect at large deformations was studied as a violation of the quasi-periodical deformation of the circular elements of the cylinder near its boundary surfaces.

**Keywords:** cylinder piecewise homogeneous, circular fibers, nonlinear deformation, finite difference method, hard landing, rotation.

Numerical research of macroscopically flat deformation of a circular hollow cylinder under the influence of inertial forces of rotational motion at a hard fixing along the inner surface was performed. A cylinder of a compressible elastic material, which as the main one includes circular fibers of a square section from the more rigid and also compressible elastic material with a periodical arrangement along the axial and radial coordinates. The behavior of the cylinder was described on the basis of a model of a piecewise homogeneous medium, starting from the general equations of the nonlinear theory of elasticity. The numerical reduction of the corresponding boundary problem was carried out by the method of finite differences with using finite-difference correlations of second-order accuracy. The derived system of nonlinear equations relatively to the nodal values of the required quantities was solved by Newton's discrete method. The solution of the problem was continued along the angular velocity of rotation of the cylindrical body. From the results at a finite speed of rotation, the deformation distributions in the characteristic cylindrical sections of the body were given. Deviations from the quasi-periodic deformation of the circular elements of the cylinder as manifestations of the near-surface effect are considered. On this basis, the depth of penetration of this effect near the inner and outer surfaces of the cylinder is revealed. The curves, which reflect stress distributions along the thickness of the cylinder wall in the central cross sections of the fiber-matrix and matrix layers and having a near-surface effect, were constructed.

### References

1. **Kostrova M. M.** Deformation of an elastic cylinder with annular fibers under the influence of rotation during a free landing / M. M. Kostrova // *Visnyk Zaporizhzhya National University. Physics and mathematics.* – 2017. – No 1. – P. 205–212. (in Russian).
2. **Lur'e A. I.** Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lur'e. – Moscow: Nauka, 1980. – 512p. (in Russian).
3. **Ortega Dzh.** Iterative methods for nonlinear system with several variables / Dzh. Ortega, V. Rejnboldt. – Moscow: Mir, 1975. – 558 p. (in Russian).
4. **Chernyh K. F.** Nonlinear theory of elasticity in engineering / K. F. Chernyh. – Leningrad: Mashinostroenie, 1986. – 336 p. (in Russian).
5. **Korn G. A.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review / G. A. Korn and T. M. Korn. – N. Y.: General Publ. Company, 2000. – 1151 p.