

УДК 533.6.013.42

Ю. О. Джуха

*Донецький національний університет імені Василя Стуса***СТАТИЧНИЙ ПРОГИН ПРУЖНИХ ОСНОВ ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЕВОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА З РІДИНОЮ**

Проведені дослідження статичних прогинів пружних основ у вигляді закріплених кільцевих пластин в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з важкою ідеальною нестисливою рідиною. Розглянуті граничні випадки виродження кільцевих пластин в мембрани та в кругові. Для широкого кола параметрів механічної системи, що розглядається, проведені та проаналізовані чисельні дослідження. Виписане частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань ідеальної нестисливої рідини та пружних кільцевих основ в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі. На основі проведених чисельних досліджень показані приклади визначення області зміни параметрів, при яких статична задача описується в рамках лінійної теорії.

Ключові слова: гідропружність, кругові та кільцеві пружні пластини та мембрани, ідеальна нестислива рідина, статичні прогини пластин.

Вступ. Інтерес до задачі про осесиметричні коливання пружного дна та рідини в циліндричному резервуарі пов'язаний із необхідністю враховувати статичний прогин дна та поздовжні коливання стовпа рідини як одного цілого. Задача про коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружною мембраною або пластиною на вільній поверхні почала інтенсивно розвиватися більш ніж 35 років тому [6], і на даний момент з цієї тематики є достатньо велика кількість публікацій. Задача про коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з двома пружними основами є подальшим узагальненням цієї проблеми. Ця задача, вірогідно, вперше була розглянута з позиції функціонального аналізу в [1] та монографії [12], а потім – у [7; 9; 11] та інших. Достатньо повний огляд літератури приведений в [8; 9, 11]. В [11] проведені дослідження осесиметричних коливань пружних основ та одношарової ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі, а в [9] ці результати узагальнені на випадок коаксіального циліндричного резервуара. На основі модального аналізу в роботі [5] була розглянута задача про стійкість поступальних і обертальних коливань циліндричного резервуару з пружними основами у вигляді тонких пластин, повністю заповненого ідеальною нестисливою рідиною. Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном і пружними елементами на вільній поверхні рідини були розглянуті в [2]. Осесиметричні коливання в'язкої рідини, на поверхні якої знаходиться пружна структура, були досліджені в [14]. Серед близьких за тематикою закордонних статей можна виділити [3; 4], в яких розглядаються осесиметричні коливання двошарової рідини в застосуванні до проблеми капілярних фазороздільників.

В даній роботі отримані функції статичних прогинів пружних основ у вигляді кільцевих пластин в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з важкою ідеальною нестисливою рідиною. Розглянуті випадки виродження кільцевих пластин в мембрани та в кругові. Проведені чисельні дослідження для широкого кола параметрів механічної системи: пружних та масових характеристик пластин, густини та глибини заповнення рідини.

Найбільш повне дослідження статичної задачі дозволить оцінити область механічних параметрів, для яких застосовна лінійна постановка задачі.

Постановка задачі. Розглянемо сумісні осесиметричні коливання пружних основ та важкої ідеальної нестисливої рідини з густиною ρ , що повністю заповнює прямий кільцевий циліндричний резервуар з жорсткою боковою поверхнею зовнішнього радіусу a і внутрішнього $a\varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon < 1$). Основи кільцевого циліндричного резервуара представляють собою кільцеві ізотропні пластини зі згинальними жорсткостями D_i , на які впливають розтягуючі зусилля T_i в серединній площині ($i = 1, 2$). Індекс $i = 1$ відповідає верхній основі, а $i = 2$ – нижній. Циліндричну систему координат $Or\theta z$ розмістимо так, щоб площина $Or\theta$ знаходилась на однаковій відстані від основ, а вісь Oz була спрямована за віссю циліндра протилежно вектору прискорення сили тяжіння \vec{g} . Прийmemo умови жорсткого закріплення пластин, що найчастіше зустрічаються на практиці. Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи рух рідини потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини – безвідривними.

Рівняння руху механічної системи, що розглядається, мають вигляд [8; 9; 11]:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=h/2} - g \frac{h}{2} \right), \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-h/2} + g \frac{h}{2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

з урахуванням наступних граничних умов:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS, \quad (4)$$

$$W_i \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial r} \Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (5)$$

де $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$; W_i , ρ_{0i} і δ_{0i} – відповідно прогин, густина і товщина i -ої пластини; Φ – потенціал швидкостей рідини; h – глибина заповнення; Q – довільна функція часу; $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ і $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – відповідно двомірний та тримірний оператори Лапласа для осесиметричного випадку; S – кільцева область. Для зручності запису введені додатковий індекс j та позначення контурів. Індекс $j = 1$ відповідає зовнішньому контуру γ_1 , а $j = 2$ – внутрішньому γ_2 .

Задача про власні сумісні осесиметричні коливання пружних кругових і кільцевих пластин була розглянута в [9, 11]. Прогини пластин представлені у вигляді суми динамічного та статичного прогинів: $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$, де W_i^{st} – статичні прогини пластин.

У випадку закріплених контурів пластин частотне рівняння має вигляд [9]:

$$\left\| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^9 \right\| = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_{i+j-1,k} &= B_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*; & C_{i+j-1,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*; \\ C_{i+j-1,9} &= k^*; & C_{i+j,k} &= C_{ijk}; & C_{i+j,k+4} &= 0; & C_{i+j,9} &= 0, & (i=1, j=1, k=\overline{1,4}). \\ C_{i+j,k} &= B_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*; & C_{i+j,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*; \\ C_{i+j,9} &= k^*; & C_{i+j+1,k} &= C_{ijk}, & C_{i+j+1,k+4} &= 0, & C_{i+j+1,9} &= 0, & (i=1, j=2, k=\overline{1,4}). \\ C_{i+j+2,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*; & C_{i+j+2,k+4} &= B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*; & (7) \\ C_{i+j+2,9} &= k^*; & C_{i+j+3,k} &= 0; & C_{i+j+3,k+4} &= C_{ijk}; & C_{i+j+3,9} &= 0, & (i=2, j=1, k=\overline{1,4}). \\ C_{i+j+3,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*; & C_{i+j+3,k+4} &= B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*; \\ C_{i+j+3,9} &= k^*; & C_{i+j+4,k} &= 0; & C_{i+j+4,k+4} &= C_{ijk}; & C_{i+j+4,9} &= 0, & (i=2, j=2, k=\overline{1,4}). \\ C_{9,k} &= \tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0; & C_{9,k+4} &= \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0, & C_{9,9} &= \tilde{k}, & (k=\overline{1,4}), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} B_{ijk} &= w_{ik}^0 \Big|_{\gamma_j}; & C_{ijk} &= \frac{d w_{ik}^0}{d r} \Big|_{\gamma_j}; & B_{jn}^* &= Z_0 \left(\frac{r}{a} \right) \Big|_{\gamma_j}; \\ Z_m(x) &= J_m(\xi_n x) + \gamma_n Y_m(\xi_n x); & a_{11n} &= D_{1n} D_{2n}^*; \\ a_{12n} &= -d_{1n}^*; & a_{21n} &= -d_{2n}^*; & a_{22n} &= D_{2n} D_{1n}^*; \\ k_1 &= \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}; & k_2 &= \frac{\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}; & k^* &= \frac{2 \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}; \\ d_{in}^* &= \frac{\tilde{d}_{in}}{\Delta_n}; & \tilde{d}_{in} &= \frac{\rho \omega^2}{d_{in} k_n \sinh \kappa_n}; & D_{in} &= \tilde{d}_{in} \sinh \kappa_n; \\ D_{in}^* &= \frac{\coth \kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}; & \Delta_n &= 1 - (D_{1n} + D_{2n}) \coth \kappa_n + D_{1n} D_{2n}; \\ E_{ikn}^0 &= \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ik}^0 \psi_n dS; & \tilde{w}_{ik}^0 &= \frac{1}{S} \int_S w_{ik}^0 dS; & \tilde{k}_2 &= \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2; \\ \tilde{k}_1 &= \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2; & \tilde{k} &= 2 \left(\rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02} \right); \\ \tilde{k}_{0i} &= \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2}; & d_{in} &= \left(D_i k_n^2 + T_i \right) k_n^2 - \left[k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g \right]; \end{aligned}$$

$\psi_n(r) = J_0(k_n r) + \gamma_n Y_0(k_n r)$ ($\gamma_n = -J_1(\xi_n)/Y_1(\xi_n)$), $k_n = \xi_n/a$; ξ_n – корені рівняння $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n \varepsilon) - J_1(\xi_n \varepsilon)Y_1(\xi_n) = 0$, J_0 , J_1 и Y_0 , Y_1 – функції Бесселя

першого та другого роду), $\kappa_n = k_n h$; w_{ik}^0 ($i=1,2, k=\overline{1,4}$) – фундаментальна система розв’язків однорідних рівнянь, що описують форму динамічного прогину пластин [9 – 11].

Повні дослідження частотного спектра для випадків кругової та кільцевої основ потребують розв’язання статичної задачі, яка зводиться до наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} D_1 \Delta_2^2 W_1^{st} - T_1 \Delta_2 W_1^{st} + \rho g W_1^{st} &= C, \\ D_2 \Delta_2^2 W_2^{st} - T_2 \Delta_2 W_2^{st} - \rho g W_2^{st} &= -C - \rho g h, \end{aligned} \quad (8)$$

$$W_i^{st} \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad \frac{\partial W_i^{st}}{\partial r} \Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (9)$$

$$\int_0^a r W_1^{st} dr = \int_0^a r W_2^{st} dr. \quad (10)$$

Тут невідомими є функції W_i^{st} та константа C .

Можливість розв’язання крайової задачі (8) – (10) для довільного контейнера з пружними основами була розглянута в [12] з позиції операторних методів. Загальний підхід до розв’язання крайової задачі (8) – (10) наступний:

- спочатку розв’язується система двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь (8) з граничними умовами (9);
- після цього з умови нерозривності (10) знаходиться невідома константа C .

Розв’язання статичної крайової задачі. Розглянемо деякі розв’язки статичної крайової задачі. Для цього введемо безрозмірні параметри:

$$\tilde{W}_1(\tilde{r}) = \frac{W_1(r)}{a}, \quad \tilde{W}_2(\tilde{r}) = \frac{W_2(r)}{a}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{a}, \quad \tilde{D}_i = \frac{D_i}{\rho g a^4}, \quad \tilde{T}_i = \frac{T_i}{\rho g a^2}, \quad H = \frac{h}{a} \quad (i=1,2).$$

Випадок двох кругових мембран. Розв’язок крайової задачі (8) – (10) для двох кругових мембран ($\varepsilon = 0$, $D_1 = D_2 = 0$) має вигляд:

$$\tilde{W}_1(\tilde{r}) = H C^* \left(1 - \frac{I_0(\eta_1 \tilde{r})}{I_0(\eta_1)} \right); \quad \tilde{W}_2(\tilde{r}) = H (1 + C^*) \left(1 - \frac{J_0(\eta_2 \tilde{r})}{J_0(\eta_2)} \right), \quad (11)$$

де

$$C^* = \frac{1}{2} \frac{\eta_1 I_0(\eta_1) (\eta_2 J_0(\eta_2) - 2 J_1(\eta_2))}{\eta_1 J_1(\eta_2) I_0(\eta_1) - \eta_2 J_0(\eta_2) I_1(\eta_1)}; \quad \eta_i = \sqrt{\frac{1}{\tilde{T}_i}} \quad (i=1,2),$$

J_0, J_1 і I_0, I_1 – відповідно функції Бесселя і модифіковані функції Бесселя першого роду.

Випадок двох кругових пластин. Розв’язок крайової задачі (8) – (10) для двох кругових пластин ($\varepsilon = 0$) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1(\tilde{r}) &= HC^* \left(1 - \frac{\varsigma_1 p_7 J_0(\varsigma_2 \tilde{r}) + \varsigma_2 p_8 I_0(\varsigma_1 \tilde{r})}{\varsigma} \right), \\ \tilde{W}_2(\tilde{r}) &= H(1 + C^*) \left(1 - \frac{\tau_1 p_5 J_0(\tau_2 \tilde{r}) + \tau_2 p_6 I_0(\tau_1 \tilde{r})}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} C^* &= \frac{\tilde{\zeta}(\tilde{\tau} - \tau^*)}{\tilde{\zeta}\tau^* - \tilde{\zeta}^*}, \quad \varsigma = \varsigma_1 p_4 p_7 + \varsigma_2 p_3 p_8, \quad \tau = \tau_1 p_2 p_5 + \tau_2 p_1 p_6, \\ \tilde{\zeta} &= \varsigma_1 \varsigma_2 \varsigma, \quad \tilde{\tau} = \tau_1 \tau_2 \tau, \quad \varsigma^* = 2(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2) p_7 p_8, \quad \tau^* = 2(\tau_1^2 + \tau_2^2) p_5 p_6, \\ p_1 &= I_0(\tau_1), \quad p_2 = J_0(\tau_2), \quad p_3 = I_0(\varsigma_1), \quad p_4 = J_0(\varsigma_2), \\ p_5 &= I_1(\tau_1), \quad p_6 = J_1(\tau_2), \quad p_7 = I_1(\varsigma_1), \quad p_8 = J_1(\varsigma_2), \\ \varsigma_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{T}_1^2 - 4\tilde{D}_1} + \tilde{T}_1}{2\tilde{D}_1}}, \quad \varsigma_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{T}_1^2 - 4\tilde{D}_1} - \tilde{T}_1}{2\tilde{D}_1}}, \\ \tau_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{T}_2^2 + 4\tilde{D}_2} + \tilde{T}_2}{2\tilde{D}_2}}, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{T}_2^2 + 4\tilde{D}_2} - \tilde{T}_2}{2\tilde{D}_2}}. \end{aligned}$$

1. Випадок двох кільцевих мембран. Розв'язок крайової задачі (8)–(10) для двох кільцевих мембран ($\varepsilon = 0$, $D_1 = D_2 = 0$) запишеться так:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1(\tilde{r}) &= HC^* \left(1 + \frac{\delta\beta_1 I_0(\eta_1 \tilde{r}) - \delta\alpha_1 Y_0(\eta_1 i \tilde{r})}{\lambda_1} \right), \\ \tilde{W}_2(\tilde{r}) &= H(1 + C^*) \left(1 + \frac{\delta\beta_2 J_0(\eta_2 \tilde{r}) - \delta\alpha_2 Y_0(\eta_2 \tilde{r})}{\lambda_2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

тут

$$\begin{aligned} C^* &= \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (1 - \varepsilon^2) - \lambda_1^*}{\lambda_1^* + \lambda_2^*}; \\ \delta\alpha_1 &= \alpha_1 - \alpha_2; \quad \delta\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4; \quad \delta\beta_1 = \beta_1 - \beta_2; \quad \delta\beta_2 = \beta_3 - \beta_4; \\ \lambda_1 &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1; \quad \lambda_2 = \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3; \\ \tilde{\alpha}_1 &= (\beta_5 - \beta_6 \varepsilon) \delta\alpha_1; \quad \tilde{\alpha}_2 = (\beta_7 - \beta_8 \varepsilon) \delta\alpha_2; \\ \tilde{\beta}_1 &= (\alpha_5 - \alpha_6 \varepsilon) \delta\beta_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (\alpha_7 - \alpha_8 \varepsilon) \delta\beta_2; \\ \tilde{\lambda}_1 &= \eta_1 \lambda_1; \quad \tilde{\lambda}_2 = \eta_2 \lambda_2; \quad \lambda_1^* = 2\tilde{\lambda}_1 (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2); \quad \lambda_2^* = 2\tilde{\lambda}_2 (\tilde{\alpha}_1 i + \tilde{\beta}_1); \\ \alpha_1 &= I_0(\eta_1); \quad \alpha_2 = I_0(\eta_1 \varepsilon); \quad \alpha_3 = J_0(\eta_2); \quad \alpha_4 = J_0(\eta_2 \varepsilon); \\ \alpha_5 &= I_1(\eta_1); \quad \alpha_6 = I_1(\eta_1 \varepsilon); \quad \alpha_7 = J_1(\eta_2); \quad \alpha_8 = J_1(\eta_2 \varepsilon); \\ \beta_1 &= Y_0(\eta_1 i); \quad \beta_2 = Y_0(\eta_1 \varepsilon i); \quad \beta_3 = Y_0(\eta_2); \quad \beta_4 = Y_0(\eta_2 \varepsilon); \\ \beta_5 &= Y_1(\eta_1 i); \quad \beta_6 = Y_1(\eta_1 \varepsilon i); \quad \beta_7 = Y_1(\eta_2); \quad \beta_8 = Y_1(\eta_2 \varepsilon), \end{aligned}$$

Y_0, Y_1 – функції Бесселя другого роду, i – уявна одиниця.

В загальному випадку кільцевих пластин функції статичних прогинів досить громіздкі, тому не будемо їх наводити.

Чисельні дослідження. Чисельні дослідження були проведені для наступних значень безрозмірних параметрів: $\tilde{T}_1 = 0 \div 3$, $\tilde{T}_2 = 0 \div 20$, $\tilde{D}_1 = 1$, $\tilde{D}_2 = 0.1 \div 10$, $\varepsilon = 0.01 \div 0.9$, $H = 1$.

На рис. 1 зображені графіки статичних прогинів для випадку кругових мембран при $\tilde{T}_1 = 3$; $\tilde{T}_2 = 3, 5, 10, 20$; $H = 1$, а на рис. 2 – для випадку кругових пластин при $\tilde{D}_1 = 1$; $\tilde{D}_2 = 0.1, 0.5, 1, 3, 10$; $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 = 1$; $H = 1$. При цьому на цих та інших рисунках суцільними лініями зображені статичні прогини нижньої пластини, а пунктирними – верхньої.

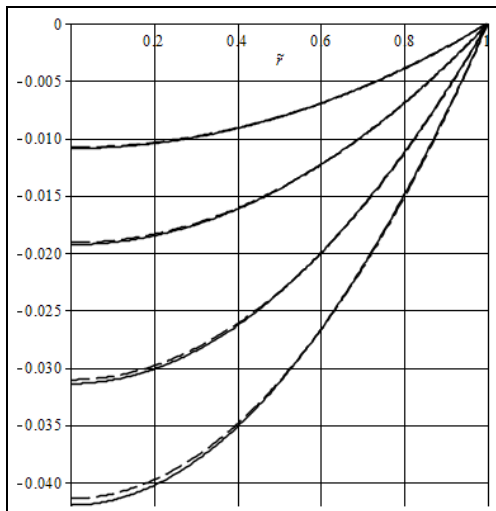


Рис. 1. – Форми статичного прогину кругових мембран у залежності від \tilde{T}_2

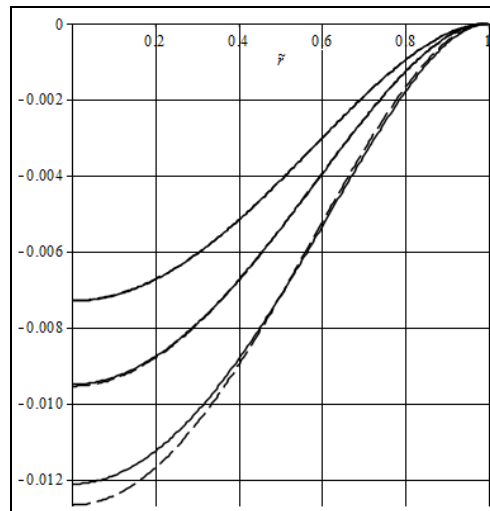


Рис. 2. – Форми статичного прогину кругових пластин у залежності від \tilde{D}_2

З рис. 1, рис. 2 витікає монотонне зменшення прогинів за умови збільшення попереднього натягу чи жорсткості нижньої мембрани (пластини).

На рис. 3, рис. 4 зображені графіки статичних прогинів для випадку кільцевих мембран: на рис. 3 – при $\tilde{T}_1 = 1$, $\tilde{T}_2 = 0, 1; 1; 2; 3; 5; 10$; $H = 1$, $\varepsilon = 0, 5$, а на рис. 4 – при $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 = 3$, $H = 1$, $\varepsilon = 0, 01; 0, 2; 0, 5; 0, 7; 0, 9$.

З рис. 3, рис. 4 витікає монотонне зменшення прогинів за умови збільшення внутрішнього радіусу або попереднього натягу нижньої мембрани.

На рис. 5, рис. 6 зображені графіки статичних прогинів для випадку кільцевих пластин: на рис. 5 – при $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = 0, 1; 0, 2; 0, 5; 1; 3$; $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 = 1$, $H = 1$, $\varepsilon = 0, 5$, а на рис. 6 – при $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = 1$, $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 = 0$, $H = 1$, $\varepsilon = 0, 01; 0, 2; 0, 4; 0, 6$.

З рис. 5, рис. 6 витікає монотонне зменшення прогинів за умови збільшення внутрішнього радіусу або жорсткості прогину нижньої мембрани.

Висновки. На основі проведених чисельних розрахунків статичної задачі можна зробити наступні висновки. Розв'язок статичної задачі дозволяє визначити

область зміни параметрів k_{0i} , T_i , D_i , h , ε , при яких задача, що розглядається, описується в рамках лінійної теорії. У випадку *кругових мембран* при $H = 1$ та $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ для виконання нерівностей $\tilde{W}_1(\tilde{r}) < 0.1$, $\tilde{W}_2(\tilde{r}) < 0.1$ достатньо покласти $\tilde{T}_1 \geq 1.28$. У випадку *кільцевих мембран* при $\varepsilon = 0,01$, $H = 1$ та $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ для виконання нерівностей $\tilde{W}_1(\tilde{r}) < 0.1$, $\tilde{W}_2(\tilde{r}) < 0.1$ достатньо покласти $\tilde{T}_1 \geq 0,85$. При подальшому збільшенні ε мінімально допустимі значення \tilde{T}_1 для виконання зазначених нерівностей суттєво зменшуються.

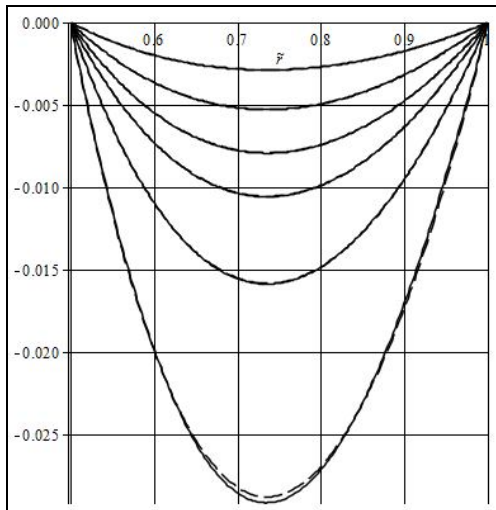


Рис. 3. – Форми статичного прогину кільцевих мембран у залежності від \tilde{T}_2

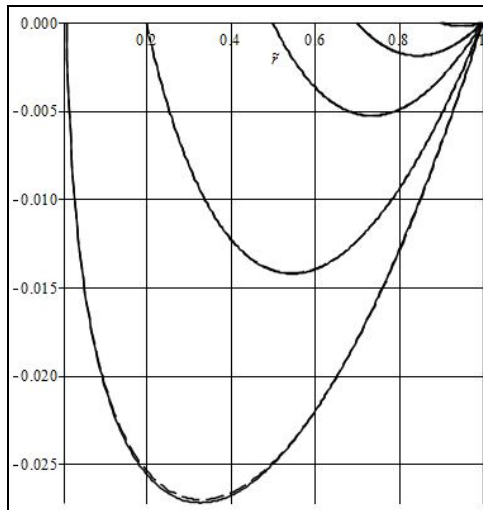


Рис. 4. – Форми статичного прогину кільцевих мембран у залежності від ε

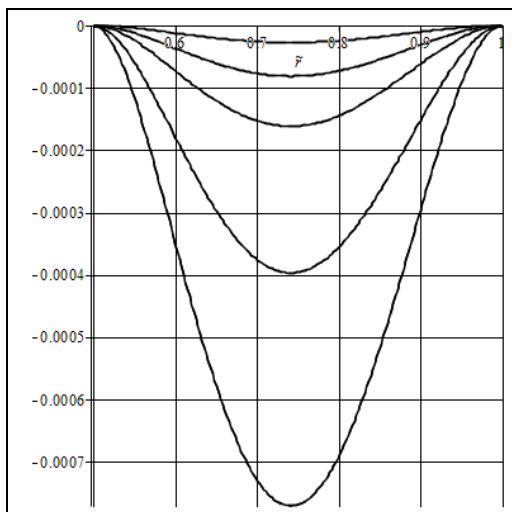


Рис. 5. – Форми статичного прогину кільцевих пластин у залежності від $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2$

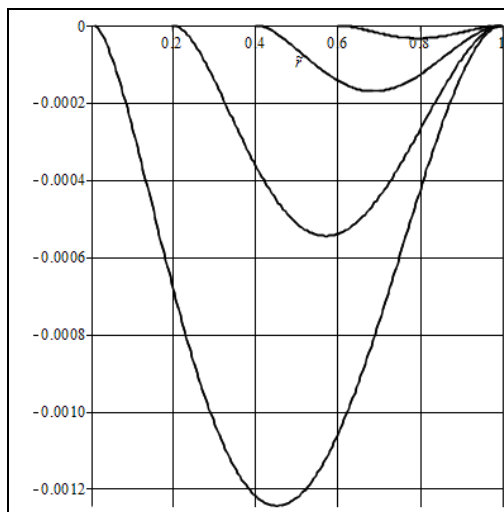


Рис. 6. – Форми статичного прогину кільцевих пластин у залежності від ε

Дослідження статичної задачі показали, що в даній постановці в усіх розглянутих випадках функції статичного прогину залежать лінійно від глибини заповнення резервуару рідиною. За рахунок збільшення попередніх натягів або жорсткостей верхньої або нижньої пластини завжди можна зменшити прогини, залишаючись в межах лінійної теорії.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень, проект № Ф71/47-2017, та в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України, проект № 0116U002522.

Бібліографічні посилання

1. **Андронов А. В.** О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами / А. В. Андронов // Симфер. ун-т. – Симферополь, 1983. – 26 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИИНТИ 30.12.83, № 1478.
2. **Богун Р. І.** Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном та пружними елементами на вільній поверхні рідини / Р. І. Богун, В. А. Троценко // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 461–482.
3. **Гончаров Д. А.** Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013]. – № 11. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 28.10.2017).
4. **Гончаров Д. А.** Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012]. – № 4. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения: 28.10.2017).
5. **Дидок Н. К.** Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102–108.
6. **Докучаев Л. В.** Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. / Л. В. Докучаев – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
7. **Кононов Ю. М.** Осесиметричні коливання пружних основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі [Електронний ресурс] / Ю. М. Кононов, Ю. О. Джуха // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25–27 травня 2016, Львів, Україна / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Львів, 2016. – Режим доступу: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Кононов.pdf>. – (дата звернення: 28.10.2017).
8. **Кононов Ю. Н.** Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Ю. А. Джуха // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2015. – № 1–2. – С. 116–125.
9. **Кононов Ю. Н.** Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре / Ю. Н. Кононов, Ю. А. Джуха // Вісн. Запоріж. нац. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 103–115.
10. **Кононов Ю. Н.** О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости / Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок, Ю. А. Джуха // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2014. – № 1. – С. 64–69.
11. **Кононов Ю. Н.** Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре / Ю. Н. Кононов, В. Ф. Русаков, Ю. А. Джуха // Вісн. Запоріж. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. – 2015. – № 2. – С. 105–114.
12. **Копачевский Н. Д.** Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан – М.: Наука, 1989. – 416 с.

13. **Пожалостин А. А.** Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А. А. Пожалостин, Д. А. Гончаров // Наука и инновации: инженерный журнал. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – № 12. – Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 28.10.2017).

14. **Bauer H. F.** Axisymmetric oscillation of a viscous liquid covered by an elastic structure / H. F. Bauer, M. Chiba // Journal of Sound and Vibrations. – 2005. – Vol. 281. – P. 835–847.

Надійшла до редколегії 19.04.2017

УДК 533.6.013.42

СТАТИЧЕСКИЙ ПРОГИБ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ ЖЁСТКОГО КОЛЬЦЕВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ

Ю. А. Джуха

*Донецкий национальный университет имени Василя Стуса,
Винница, Украина*

Проведены исследования статических прогибов упругих оснований в виде закрепленных кольцевых пластин в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с тяжелой несжимаемой жидкостью. Рассмотрены предельные случаи вырождения кольцевых пластин в мембраны и в круговые. Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы проведены и проанализированы численные исследования. Выписано частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний идеальной несжимаемой жидкости и упругих кольцевых оснований в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. На основании проведенных численных исследований показаны примеры определения области изменения параметров, при которых статическая задача описывается в рамках линейной теории.

Ключевые слова: гидроупругость, круговые и кольцевые упругие пластины и мембраны, идеальная несжимаемая жидкость, статические прогибы пластин.

UDC 533.6.013.42

STATIC DEFLECTION OF ELASTIC BASES IN RIGID ANNULAR CYLINDRICAL CONTAINER

Yu. O. Dzhukha

*Vasyl' Stus Donetsk National University,
Vinnytsia, Ukraine*

The static deflection of the elastic plate-shaped annular bases that are fixed at the edges in the rigid annular cylindrical container with the heavy ideal incompressible liquid is investigated. The limiting cases of the membranes and the circular plates are considered. Numerical studies are conducted and analyzed for a wide range of parameters of the considered mechanical system. The frequency equation of the coupled natural longitudinal vibrations of the elastic plate-shaped bases and the heavy ideal incompressible liquid in the rigid circular cylindrical container is written out. Examples of finding the parameter space under which the static problem is described within the framework of the linear theory are instanced on the basis of numerical studies.

Keywords: hydroelasticity, circular and annular elastic plates and membranes, ideal incompressible liquid, static deflection of plates.

Let us consider the coupled axisymmetric vibrations of the elastic bases and the heavy ideal incompressible liquid. The liquid completely fills the right circular cylindrical container with the rigid lateral surface. The bases of the circular cylindrical container are assumed to be circular isotropic plates with flexural rigidities being under the action of tensile forces acting in the middle surface. The plates are rigidly fixed at the edges. We consider the linear formulation of the problem. Assume that the liquid motion is potential and the coupled vibrations of the plates and the liquid are unseparated.

The interest in the axisymmetric vibrations of the elastic bases and the liquid in the annular cylindrical container is connected with the necessity to take into account the vibrations of a liquid column between the elastic bases.

Deflections of the plates are represented by the sum of the static and dynamic deflections: $W_i(r,t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$. Here W_i^{st} are the static deflections of the plates. To further investigate the frequency equation it is necessary to study the static problem and obtain restrictions on the mechanical parameters of the considered mechanical system: elastic and mass properties of the plates, liquid density and filling depth. The restrictions are the necessary condition that allows to remain within the framework of the linear theory. Note that the static problem is of interest in itself because of the correlation between deflections of the upper and lower bases. In addition the solution of the static problem allows to calculate the changed filling depth $\tilde{h} = h + w^*$.

Research has shown that in the given statement the static deflection depends linearly on the filling depth. The deflections of the plates (membranes) can be reduced by increasing tensile force or rigidity of the upper or lower base thereby remaining within the framework of the linear theory.

References

1. **Andronov A. V.** On small vibrations of ideal liquid in a tank with elastic bottoms / A. V. Andronov // Simferopol University. – Simferopol, 1983. – 26 p. – Rus. – Dep. in UkrRISTI 30.12.83, No 14178. (in Russian).
2. **Bogun R. I.** Free oscillations of fluid in cylindrical container with arbitrary axisymmetric bottom and elastic elements on the free surface of the fluid / R. I. Bogun, V. A. Trotsenko // Nonlinear Oscillations. – 2010. – Vol. 13. – No 4. – P. 461–482. (in Ukrainian).
3. **Goncharov D. A.** Dynamics of two-layer liquid divided by an elastic dividing wall with an allowance for surface tension forces [Electronic resource] / D. A. Goncharov // Nauka i Obrazovanie: electronic scientific and technical edition. – Moscow: Bauman MSTU, 2013. – No 11. – URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (viewed on October 28, 2017). (in Russian).
4. **Goncharov D. A.** Axisymmetric oscillations of dual-density liquid in cylindrical tank [Electronic resource] / D. A. Goncharov // Nauka i Obrazovanie: electronic scientific and technical edition. – Moscow: Bauman MSTU, 2012. – No 4. – URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (viewed on October 28, 2017). (in Russian).
5. **Didok N. K.** Dynamics and stability of oscillations of cylindrical tank with ideal fluid and elastic bases / N. K. Didok, Yu. N. Kononov // Transactions of IAMM of NAS of Ukraine. – 2013. – No 27. – P. 102–108. (in Russian).
6. **Dokuchaev L. V.** Nonlinear dynamics of flight vehicles with deformable elements / L. V. Dokuchaev – Moscow: Mashinostroenie, 1987. – 232 p. (in Russian).
7. **Karnaukh A. Yu.** Vibrations of elastic plate, separating liquid in cylindrical tank with elastic base / A. Yu. Karnaukh // University news. North-Caucasian region: Natural sciences. – 2013. – No 2. – P. 33–36. (in Russian).

8. **Kononov Yu. M.** Axially symmetric vibrations of elastic foundations and ideal two-layer liquid in the rigid annular cylindrical tank [Electronic resource] / Yu. M. Kononov, Yu. O. Dzhukha // The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2016», 25–27 May 2016, Lviv, Ukraine / Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. – Lviv, 2016. – URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kononov.pdf>. (viewed on October 28, 2017) (in Ukrainian).
9. **Kononov Yu. M.** Axisymmetric vibrations of two-layer ideal liquid with free surface in the rigid circular cylindrical tank with elastic bottom / Yu. M. Kononov, Yu. O. Dzhukha // Bulletin of Donetsk National University. Ser.: A. – 2015. – No 1–2. – P. 116–125. (in Russian).
10. **Kononov Yu. M.** Axisymmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in the rigid annular cylindrical tank / Yu. M. Kononov, Yu. O. Dzhukha // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences. – 2016. – No 1. – P. 103–115. (in Russian).
11. **Kononov Yu. M.** On the solution of the generalized inhomogeneous biharmonic equation in hydroelasticity problems / Yu. M. Kononov, M. K. Didok, Yu. O. Dzhukha // Bulletin of Donetsk National University. Ser.: A. – 2014. – No 1. – P. 64–69. (in Russian).
12. **Kononov Yu. M.** Axial-symmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in rigid cylindrical tank / Yu. M. Kononov, V. F. Rusakov, Yu. O. Dzhukha // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences. – 2015. – No 2. – P. 105–114. (in Russian).
13. **Kopachevskiy N. D.** Operator methods in linear hydrodynamics: evolutionary and spectral problems. / N. D. Kopachevskiy, S. G. Krein, Ngo Zuy Kan – Moscow: Nauka, 1989. – 416 p. (in Russian).
14. **Pozhalostin A. A.** Free axisymmetric oscillations of two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces [Electronic resource] / A. A. Pozhalostin, D. A. Goncharov // Engineering journal: science and innovation. – Moscow: Bauman MSTU, 2013. – No 12. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (viewed on October 28, 2017). (in Russian).
15. **Bauer H. F.** Axisymmetric oscillation of a viscous liquid covered by an elastic structure / H. F. Bauer, M. Chiba // Journal of Sound and Vibrations. – 2005. – Vol. 281. – P. 835–847.
16. **Ding Z.** Free bending vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in consideration of surface wave / Z. Ding // Applied Mathematics and Mechanics. – 1994. – Vol. 15. – No. 9. – P. 831–839.
17. **Jang J.-W.** Mechanical slosh models for rocket-propelled spacecraft [Electronic resource] / J.-W. Jang, A. Alaniz, L. Yang, J. Powers, C. Hall // Navigation and control conference, 19–22 Aug. 2013, Boston, MA, USA / American Inst. of Aeronautics and Astronautics. – Reston, VA, USA, 2013. – URL: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20140002967.pdf>. – (viewed on October 28, 2017).
18. **Jhung M. J.** Dynamic characteristics of cylindrical shells considering fluid-structure interaction / M. J. Jhung, W. T. Kim, Y. H. Ryu // Nuclear Engineering and Technology. – 2009. – Vol. 41. – No. 10. – P. 1333–1346.