

УДК 539.3

А. П. Колодяжний<sup>1</sup>, канд. техн. наук, М. А. Медникова<sup>2</sup><sup>1</sup>Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,<sup>2</sup>Государственное предприятие Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля

## НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ КРУЧЕНИИ

Представлены результаты линейного конечно-элементного анализа напряжений в недлинных тонких оболочках с небольшим отверстием на боковой поверхности при действии крутящего момента. Показано, что коэффициенты концентрации напряжений быстро убывают с уменьшением длины оболочки, причем этот важный для проектирования эффект начинает проявляться, начиная с длин, в десятки раз превышающих радиус отверстия. Исследованы поля напряжений в зонах между отверстием и торцами оболочки и их взаимовлияние.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, круговое отверстие, кручение, напряженное состояние, метод конечных элементов.

**Введение.** Теоретическое решение задач о прочности оболочек с отверстиями сопряжено со значительными трудностями, поскольку соответствующие краевые задачи становятся многосвязными, поля напряжений и деформаций плохо поддаются аналитическому описанию. Первая математическая модель, созданная на основе комплексного представления разрешающих уравнений теории пологих оболочек, была предложена Лурье [3], который применил её для цилиндрических оболочек с малым отверстием для случаев нагружения растягивающей силой и бокового равномерного давления. Основные ограничительные предположения, лежащие в основе модели, касаются линейности рассматриваемых задач и длины оболочки, принимающейся бесконечной. Для идеальных сплошных цилиндрических оболочек, при действии стандартных нагрузок типа осевого растяжения – сжатия, изгиба, кручения и бокового давления, линейность деформирования соблюдается на большом диапазоне нагрузок, вплоть до потери устойчивости или достижения пластических деформаций, поэтому для малых отверстий можно ожидать, что для начального этапа нагружения предположение о линейности деформаций не даст значительных погрешностей, то есть возмущение, вносимое малым отверстием, несущественно. Второе предположение о бесконечности длины оболочки является важным для модели, так как дает возможность разделить краевые условия и напряженное состояние на невозмущенное (основное), соответствующее сплошной оболочке, и возмущенное, затухающее при удалении от отверстия. Предположение о затухании напряжений кажется очевидным, поскольку вполне согласуется с принципом Сен-Венана, тем более, что главный вектор сил на контуре отверстия, свободном от нагрузок, равен нулю. Далее будет показано, что это предположение не имеет абсолютного характера, и протяженность области затухания может быть весьма значительной даже для небольших отверстий. На протяжении последних 70 лет задачи определения напряжений в оболочках с отверстиями постоянно привлекали внимание исследователей и к настоящему времени известно несколько сотен публикаций. Для цилиндрических оболочек, нагружаемых крутящим моментом, которым и посвящена данная статья, исследований напряженного состояния известно несколько десятков. Первая работа по кручению, опубликованная Шевляковым и Зигелем [6], следовала непосредственно методике, изложенной в [3]. Рассматривались только малые по классификации Лурье отверстия. Далее появился ряд работ, основанных на той же модели [4; 8 – 13; 15 – 17], но с разными вариациями в алгоритмах реше-

ния и расширениями диапазона величин отверстий. Определенный итог этого цикла работ дан в фундаментальном исследовании Савина по концентрации напряжений [5]. Систематическое изложение задач о влиянии отверстий разного очертания на напряженно-деформированное состояние для оболочек произвольной кривизны и, как наиболее распространенных, изотропных и композитных цилиндрических, конических, сферических оболочек, дано в [1]. Модель Лурье стала в определенном смысле классической, ее идейная основа используется последние десятилетия для оболочек более сложной структуры, с большими отверстиями, с учетом пластического деформирования, ползучести, иных, осложняющих расчет, обстоятельств. Попытки построить решение с учетом конечности длины оболочки и удовлетворением всем граничным условиям, как на кромке отверстия, так и на торцах оболочки, путем подбора координатных функций, признать удачными трудно из-за весьма сложной структуры полей напряжений. Примером может служить [7], где применен упрощенный вариационный метод и метод Бубнова – Галеркина, а координатные функции, представленные в рядах, подбирались как точно удовлетворяющие граничным условиям на кромке отверстия и на торцах оболочки с бесконечным радиусом. В последние годы появились исследования [2; 14], использующие для решения обсуждаемой задачи метод конечных элементов, который не требует жестких предположений о разделимости напряженного состояния на основное и возмущенное и о бесконечности длины оболочки. В [2] показано, что даже в рамках геометрически линейной задачи для оболочки с относительно малым отверстием нагружаемые торцы могут оказывать заметное поддерживающее влияние, ведущее к снижению концентрации напряжений. Данная работа посвящена более детальному анализу оценки влияния отверстия на напряженное состояние в тонкой цилиндрической оболочке и влияния конечности длины на поля напряжений в зонах концентрации напряжений в окрестности отверстия и участках, прилегающих к торцам, при кручении. Исследуется обнаруженный механизм нелокального взаимодействия отверстия и краевых закреплений для оболочек разной длины.

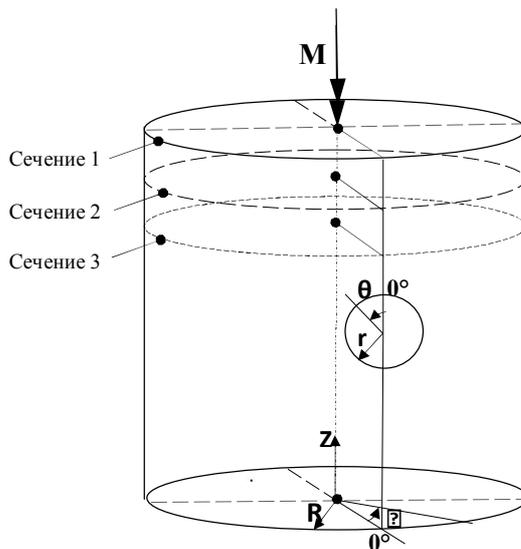


Рис. 1. – Цилиндрическая оболочка  $L/R = 2$  с отверстием  $r/R = 0,08$

**Постановка задачи.** Рассматриваются тонкие изотропные цилиндрические оболочки с относительной толщиной  $R/h = 1200$ , длинами  $L/R = 0,5; 2; 3,9$  и параметром отверстия  $r_0/R = 0,08$ , где  $L, R, h$  – длина, радиус и толщина оболочки соответственно,  $r_0$  – радиус отверстия. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Хотя отверстие по отношению к радиусу исследуемых оболочек мало, в соответствии с классификацией, предложенной в [3], по которой отверстия делятся на три категории (малые, средние и большие) по величине естественного геометрического параметра  $\beta$ , определяемого по формуле

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2} \left( \frac{r_0}{Rh} \right), \quad (1)$$

отверстия можно считать средними ( $\beta > 1$ ). В рассматриваемом случае  $\beta = 1,78$ .

Введены две цилиндрические системы координат, начала которых расположены в центрах фиксированного торца оболочки и отверстия (рис. 1).

Для определения НДС применялся линейный статический анализ пакета MSC.NASTRAN. Для построения конечно-элементной модели используются двумерные пластинчатые 3-х и 4-х узловые элементы. Сетка выполнена неоднородной, со сгущением около отверстия. Граничные условия заданы в виде жесткого защемления для нижнего торца – перемещения и углы поворота по трем осям равны нулю. На верхнем торце смоделирован абсолютно жесткий элемент (в центре которого прикладывается крутящий момент  $M_k$ , при этом сам торец свободен во всех направлениях по перемещениям и поворотам. Кромка отверстия свободна от нагрузок и от ограничений в перемещениях. Для анализа изменения уровня напряжений по всей длине оболочки, были выбраны три сечения в верхней ее половине, перпендикулярных оси  $z$ , выбранных таким образом, чтобы охарактеризовать измененность напряженного состояния: сечение 1 у верхнего края оболочки; сечения 2 и 3 с координатами  $z = 1/8L$  и  $1/4L$  соответственно (рис. 1).

**Численные результаты и их анализ.** Особенностью линейного подхода к решению задачи построения полей напряжения конструкций, при изменении уровня нагрузки, является конгруэнтность напряженно-деформированного состояния и как следствие – постоянство коэффициента концентрации напряжений, определяемого здесь как отношение  $k_t = \sigma_{max}/\tau_0$ , где  $\sigma_{max}$  – вычисляемое максимальное из напряжений в зоне резкого их возрастания,  $\tau_0$  – референсное касательное напряжение в поперечных сечениях сплошной оболочки без отверстий при чистом кручении, определяемое из соотношения  $\tau_0 = M_k/2\pi R^2 h$ . Другая важная особенность линейных задач заключается в возможности применения принципа суперпозиции решений, исходя из которого в модели Лурье напряженное состояние разделяется на два: основное или невозмущенное, соответствующее однородному полю напряжений в сплошной оболочке без отверстия, и возмущенное возникающее в той же оболочке при наличии отверстия. Если первое состояние определяется из решения классической краевой задачи, то для второго – необходимо удовлетворить краевым условиям и на кромке отверстия, и на торцах оболочки. Если на кромке отверстия краевые условия формулируются стандартно, то для торцов это сделать невозможно без дополнительных предположений. В [3] такие упрощающие предположения сделаны. Одно из них основывается на предположении о быстром затухании возмущенной составляющей напряженного состояния по мере удаления от отверстия (например, на расстоянии  $3 \div 3,5r_0$  от его кромки [1]), что приводит к возможности обнуления этих напряжений на достаточно большом расстоянии от отверстия. Отсюда следует второе упрощающее требование о бесконечной длине оболочек. Метод конечных элементов свободен от указанных ограничений. Первой среди задач, которые будут представлены, является определение коэффициентов концентрации напряжений  $k_t$  на широком диапазоне длин оболочек.

**Коэффициенты концентрации напряжений.** На рис. 2 представлены результаты численных расчетов коэффициента концентрации при значениях параметра  $L/R$  от 0,5 до 20,7.

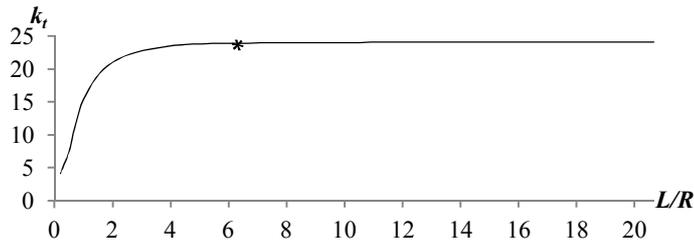


Рис. 2. – Зависимость коэффициента концентрации напряжений  $k_t$  от  $L/R$  при  $\beta = 1,78$

Для наибольшей длины, для которой проведены расчеты, ( $L/R = 20,7$ ) значения  $k_t = 24,04$  сравнивались с результатами, полученными Withum в [17]:  $k_t = 23,93$ , отличие составило 0,45%. Кривая на рис. 2 состоит из двух частей, левая из которых иллюстрирует убывание  $k_t$  при уменьшении  $L/R$ , а правая показывает практическую независимость коэффициента концентрации от длины оболочки, что говорит о валидности модели [3] для весьма длинных оболочек. На кривой звездочкой отмечено значение параметра  $L^*/R = 6,18$ , которое разделяет кривую зависимости  $k_t(L/R)$  на два указанных участка. Критерием выбора этого значения принято условие уменьшения  $k_t$  на 1% по сравнению с  $k_t(L/R = 20,7)$ . Значение  $L^*$  представляет собой условный предел применимости модели [3], которая завышает  $k_t$  для более коротких оболочек. Если воспользоваться параметром  $L^*/r_0$ , то для оболочек, расчеты для которых представлены здесь, длина  $L^*$  составит  $40,7r_0$ . Этот результат указывает на необходимость осторожного отношения к использованию предположения о быстром затухании возмущающей части общего поля напряжений, вызываемой появлением на оболочке даже малого отверстия.

**Напряженное состояние на кромке отверстия.** Анализ полей напряжений, возникающих в оболочке, показал, что во всех рассматриваемых случаях область концентрации напряжений определяется кольцевыми напряжениями в окрестности кромки отверстия на внутренней поверхности оболочки. На рис. 3,а показано распределение интенсивности напряжений по Мизесу относительно референсной интенсивности напряжений  $\sigma_{m0} = \sqrt{3}\tau_0$  на внутренней поверхности оболочки. Изменение длины оболочки существенно не влияет на количество зон концентрации интенсивности напряжений. Четыре зоны концентрации, локализованы под углами  $\pm 60^\circ$  и  $\pm 120^\circ$ , амплитудные значения  $\sigma_{m\theta}$  резко падают по мере укорочения оболочки. Для  $L/R = 3,9$  максимальное значение относительной интенсивности равно  $\sigma_{m\theta}/\sigma_{m0} = 12,8$ . При уменьшении длины до  $L/R = 2$  уровень интенсивности падает на 6,7%, а при  $L/R = 0,5$  максимальное значение снижается в значительной мере относительно  $L/R = 2$  в 2,85 раз. На рис. 3,б показаны распределения кольцевых напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия, отнесенных к референсным касательным напряжениям. Уменьшение длины оболочки оказывает влияние на характер распределения напряжений. Для оболочек с  $L/R = 2$  и  $3,9$  конечные элементы с максимальными напряжениями  $\sigma_\theta$  расположены под углами  $\theta = \pm 58^\circ$  и  $\pm 124^\circ$ , а для  $L/R = 0,5$  под углами  $\theta = \pm 60^\circ$  и  $\pm 120^\circ$ . При уменьшении параметра с  $L/R = 3,9$  до  $L/R = 2$ , коэффициент концентрации напряжений снижается на 15%, и при уменьшении с  $L/R = 2$  до  $L/R = 0,5$  снижается еще в 2,7 раза.

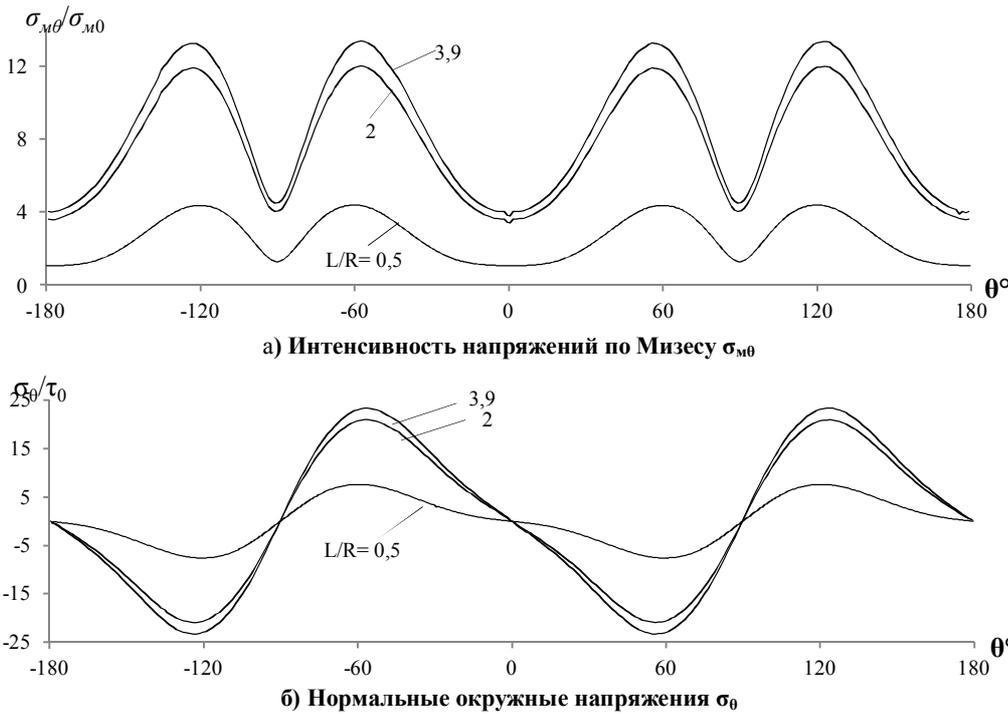


Рис. 3. – Относительные напряжения на кромке отверстия на внутренней поверхности оболочки

Далее приведены сравнительные данные о напряжениях  $\tau_{\varphi}$ ,  $\sigma_v^{top}$ ,  $\sigma_v^{bot}$ ,  $\sigma_u^{top}$ ,  $\sigma_u^{bot}$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в сечениях 1 – 3 между отверстием и торцом для оболочек с  $L/R = 0,5; 2; 3,86$ , где  $\sigma_v^{top}$  и  $\sigma_v^{bot}$ ,  $\sigma_u^{top}$  и  $\sigma_u^{bot}$  – окружные и осевые нормальные напряжения на наружной и внутренней поверхности оболочки соответственно,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – мембранные напряжения на главных площадках. Все напряжения отнесены к  $\tau_0$ .

**Касательные напряжения в сечениях 1 – 3.** На рис. 4 приведены сдвиговые напряжения в сечениях 1 – 3. Независимо от длины оболочки существует локальная область падения уровня касательных напряжений, включающая в себя окрестность отверстия и распространяющаяся до краев оболочки (рис. 4,а). С уменьшением длины оболочки размер этой области по окружной координате уменьшается, а отличие от референсных напряжений растет. При  $L/R = 0,5$  эта область занимает участок на кривой по окружности ( $-15^{\circ}; +15^{\circ}$ ), а амплитуда изменения в ней  $\tau_{\varphi}$  для сечения 1 составляет  $0,6\tau_0$ . Для  $L/R = 2$  и  $3,9$  картины распределения сдвиговых напряжений подобны, но сектор возмущения расширяется. Между амплитудными значениями  $\tau_{\varphi}$  сектор увеличивается до  $120^{\circ} - 130^{\circ}$ . Перепад напряжений уменьшается и с увеличением длины оболочки стремится к нулю. По мере удаления от отверстия изменчивость  $\tau_{\varphi}$  уменьшается, однако к  $\tau_0$  касательные напряжения не стремятся, то есть предположение о затухании напряженного состояния [3], вызванное появлением отверстия, для оболочек с длинами  $L < L^*$  становится неверным.

**Нормальные окружные напряжения.** Хотя кольцевые и осевые нормальные напряжения при кручении сплошной оболочки равны нулю, а при наличии отверстия относительно малы, интерес представляет их изменчивость как в окружном направлении, так и по мере удаления от отверстия к торцу. На рис. 5 – 7 приведены зависимости окружных напряжений  $\sigma_v^{top}$  и  $\sigma_v^{bot}$  на внешней и внутренней поверхностях в сечениях 1 – 3 и вид полей напряжений для всей оболочки при  $L/R = 0,5$  и между сечениями 1 и 3 для  $L/R = 2$  и  $3,86$ .

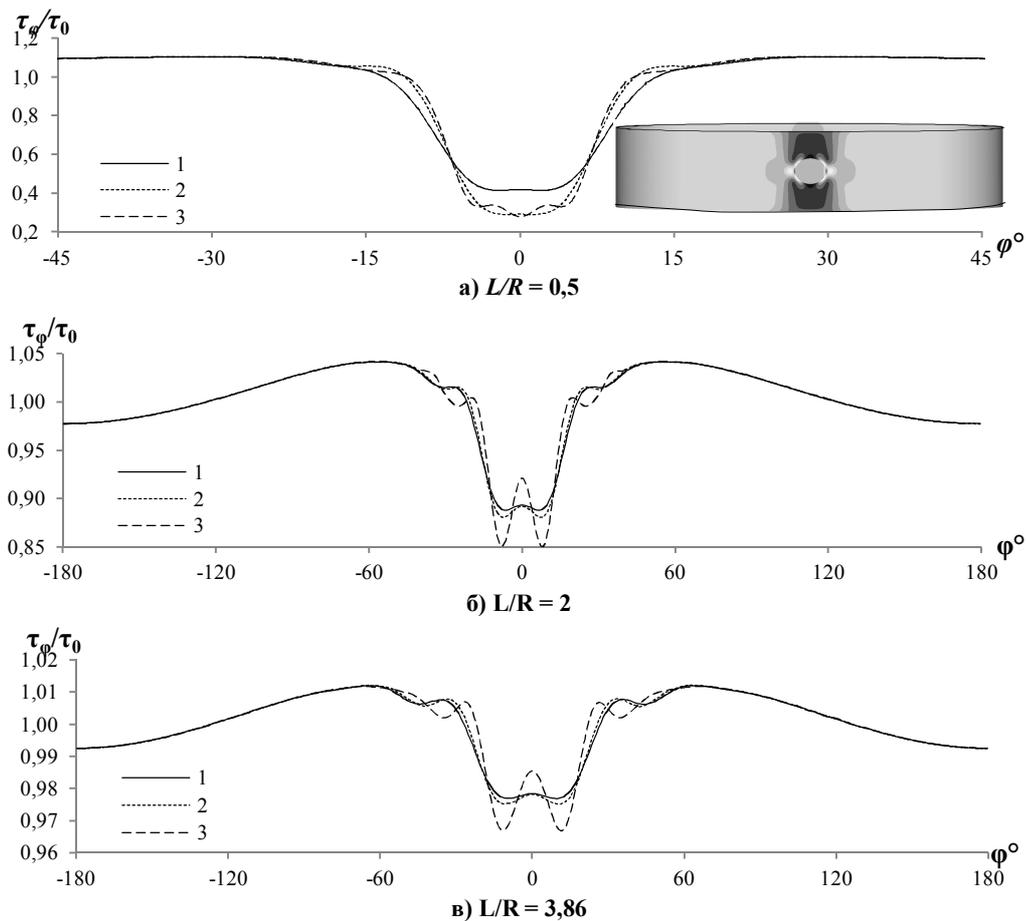


Рис. 4.– Относительные касательные напряжения

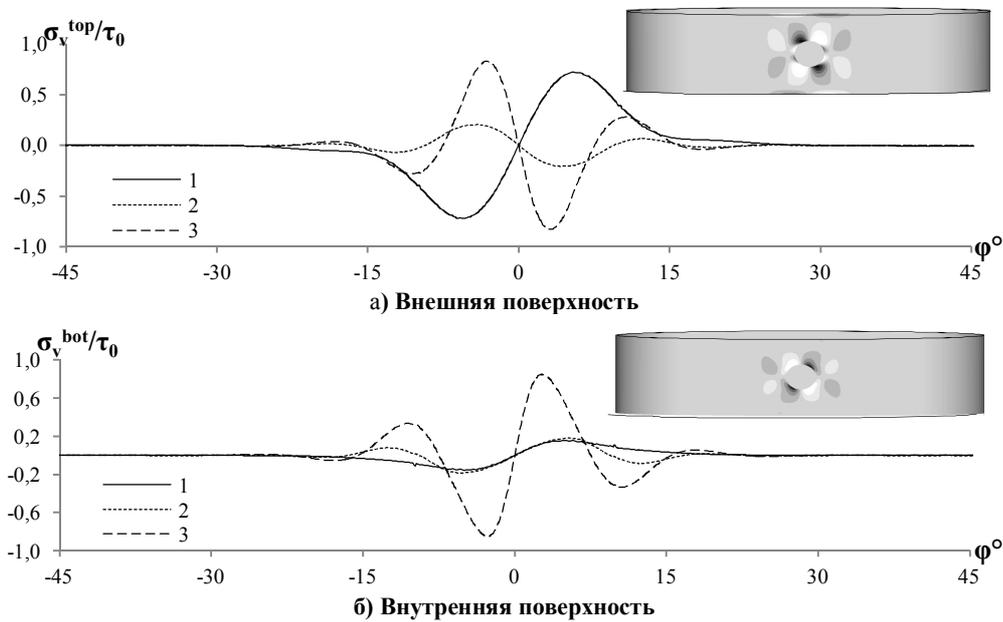


Рис. 5. – Относительные нормальные окружные напряжения  $L/R = 0,5$

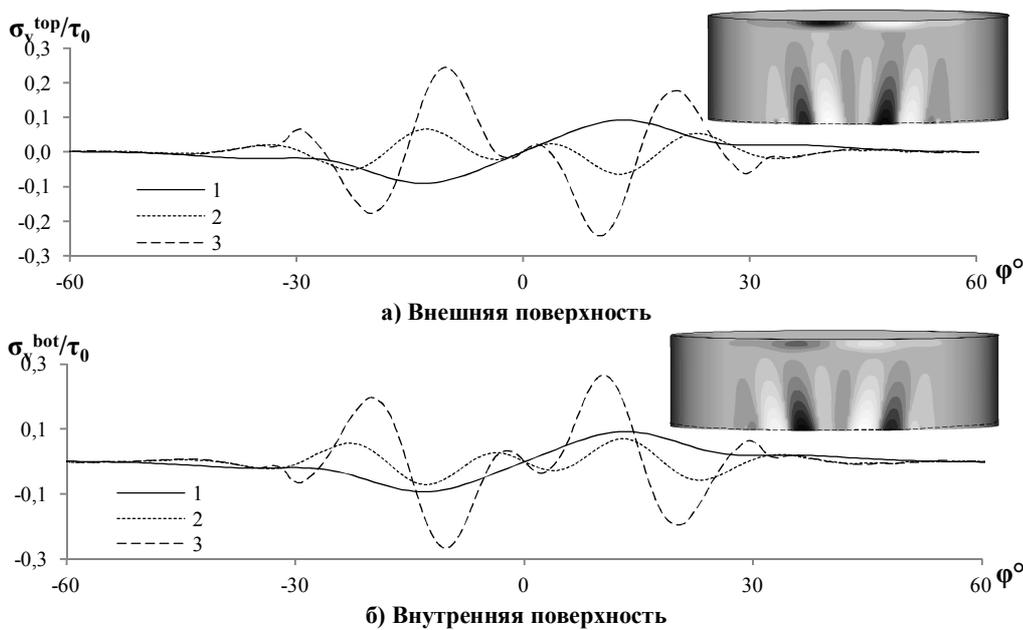


Рис. 6. – Относительные нормальные окружные напряжения  $L/R = 2$

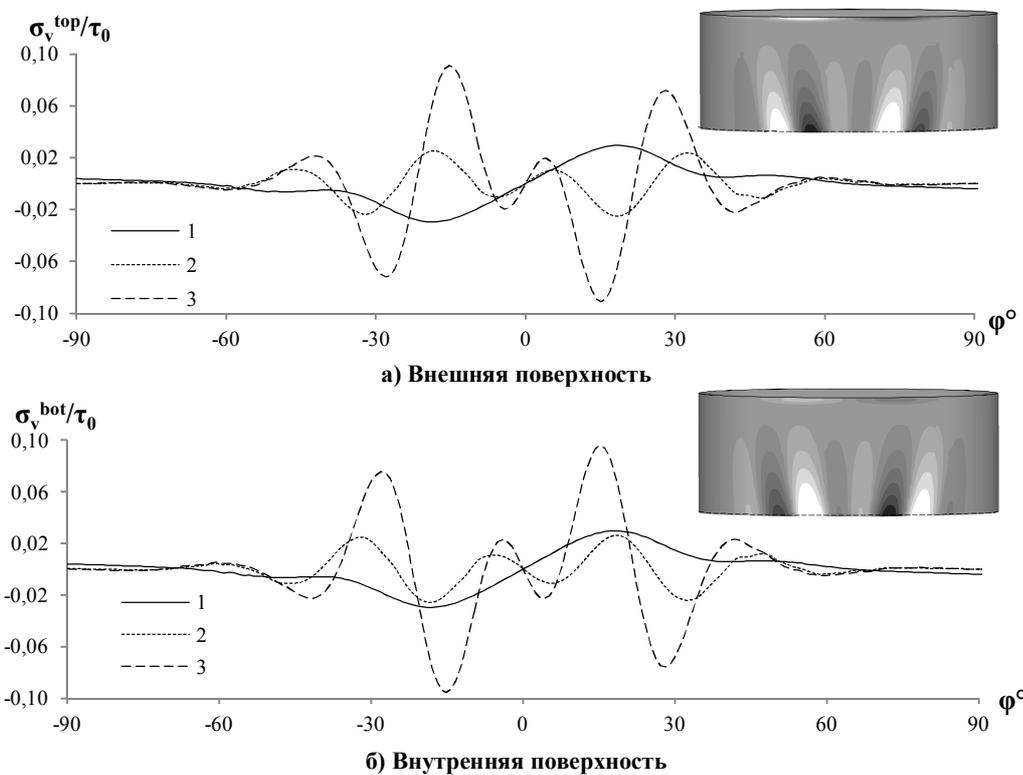


Рис. 7. – Относительные нормальные окружные напряжения  $L/R = 3,86$

С уменьшением длины оболочки уменьшается область возмущений в окружном направлении. Для  $L/R = 3,9$  возмущения распространяются по окружной координате в интервале  $(-60^\circ; +60^\circ)$ , для  $L/R = 2$   $(-45^\circ; +45^\circ)$ , для  $L/R = 0,5$   $(-15^\circ; +15^\circ)$ .

При сравнении напряжений в сечениях 1 – 3 уменьшение амплитудных значений напряжений отмечается при переходе между сечениями 3 и 2, однако между сечениями 2 и 1 экстремальные значения несколько повышаются, оставаясь практически одинаковыми на внешней и внутренней поверхностях, причем на внешней поверхности для оболочки с  $L/R = 0,5$  (рис. 5,а) эти значения в зоне края (сечение 1) возрастают значительно, приближаясь к амплитудному уровню напряжений в сечении 3. Наконец, зависимости, представленные на рис. 5 – 7, показывают уменьшение неравномерности распределения кольцевых напряжений при увеличении длины оболочки. Для  $L/R = 0,5$  на краю внешней поверхности оболочки возникают зоны повышения напряжений, где амплитудный уровень равен  $0,8\tau_0$ . При  $L/R = 2$  и  $3,9$  эти уровни составляют  $0,24\tau_0$  и  $0,09\tau_0$  соответственно.

**Нормальные осевые напряжения.** На рис. 8 – 10 даны зависимости нормальных осевых напряжений  $\sigma_u^{top}$  и  $\sigma_u^{bot}$  на внешней и внутренней поверхностях оболочки по окружной координате  $\varphi$  и показаны поля этих напряжений для оболочки с  $L/R = 0,5$ , а для более длинных – на верхней половине, ограниченной торцом и сечением 3. Аналогично распределению нормальных окружных напряжений, с уменьшением параметра  $L/R$  уменьшается область возмущений в направлении окружности оболочки и для рассматриваемых оболочек при  $L/R = 3,86; 2; 0,5$  составляет  $30^\circ; 45^\circ; 67^\circ$  соответственно. С уменьшением длины оболочки уровень максимальных напряжений у края значительно повышается. При переходе от  $L/R = 3,86$  до  $L/R = 2$  максимумы  $\sigma_u^{top}$  и  $\sigma_u^{bot}$  возросли приблизительно в 3 раза, с уменьшением  $L/R = 2$  до  $L/R = 0,5$  величина  $\sigma_u^{bot}$  – в 5 раз, величина  $\sigma_u^{top}$  увеличилась только на 10%. Максимальный уровень осевых напряжений на внутренней поверхности оболочки для  $L/R = 3,86; 2; 0,5$  равен  $0,16\tau_0; 0,5\tau_0; 2,4\tau_0$  соответственно. Сравнивая осевые напряжения с окружными, можно увидеть, что амплитудные значения  $\sigma_u^{top}$  и  $\sigma_u^{bot}$  во всех случаях выше  $\sigma_v^{top}$  и  $\sigma_v^{bot}$  в 3÷5 раз.

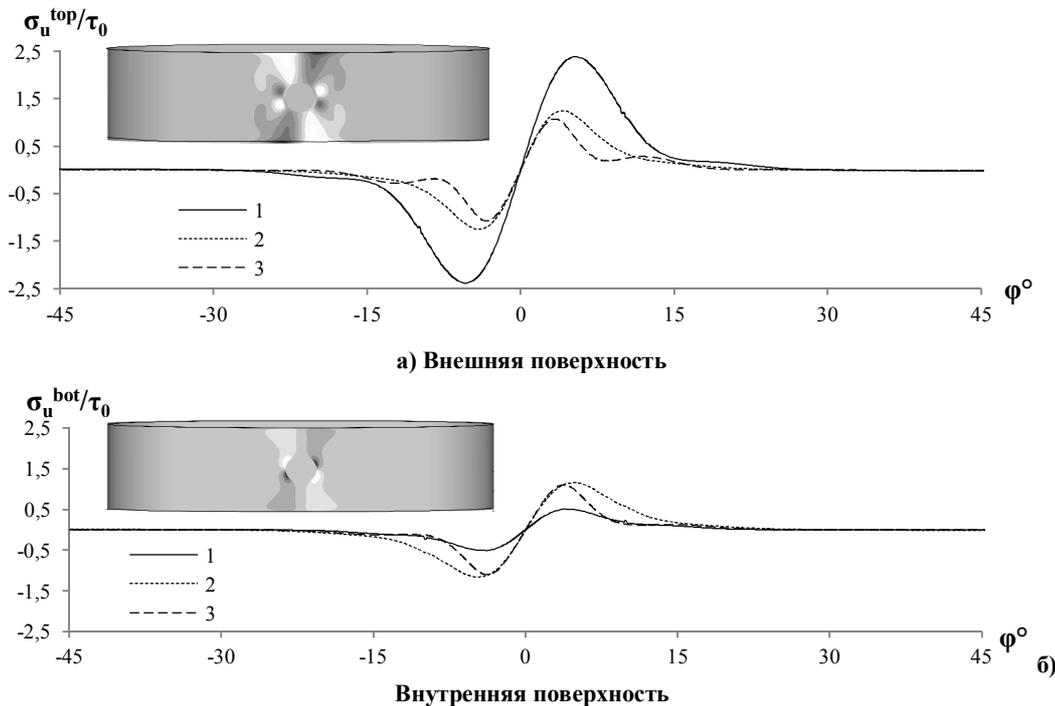


Рис. 8. – Относительные нормальные осевые напряжения  $L/R = 0,5$

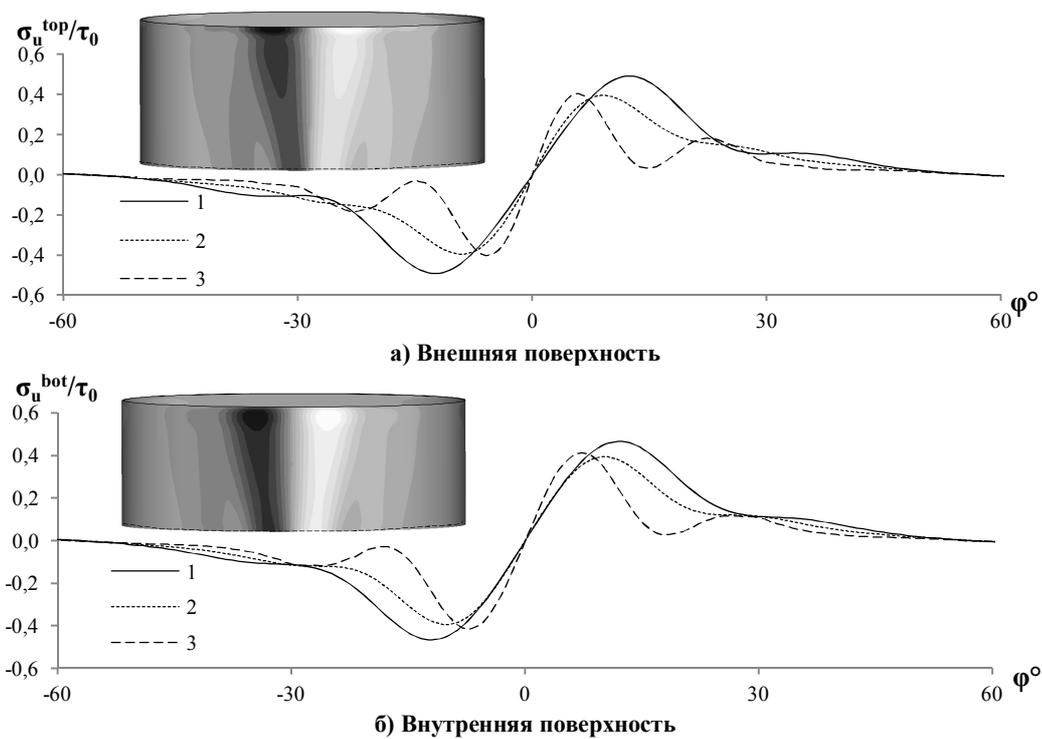


Рис. 9. – Относительные нормальные осевые напряжения  $L/R = 2$

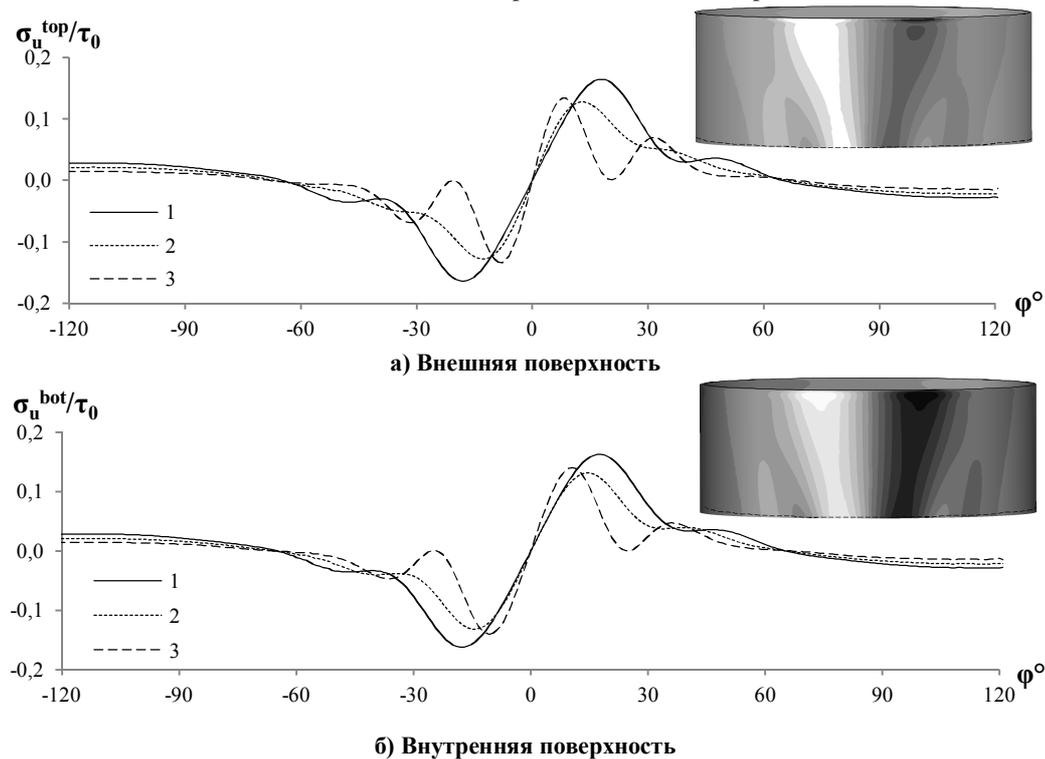
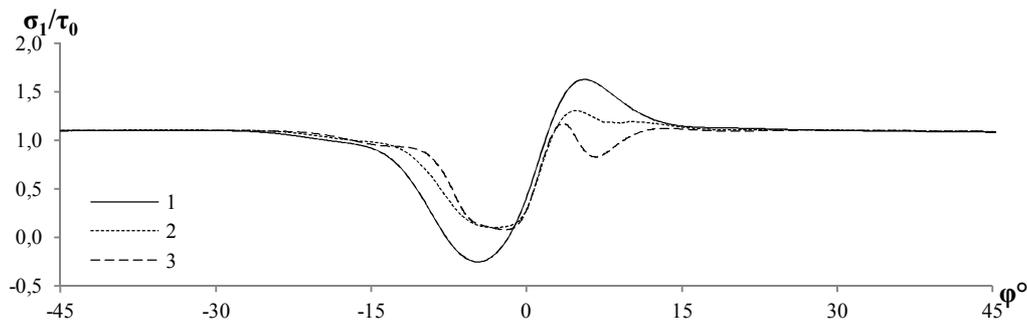
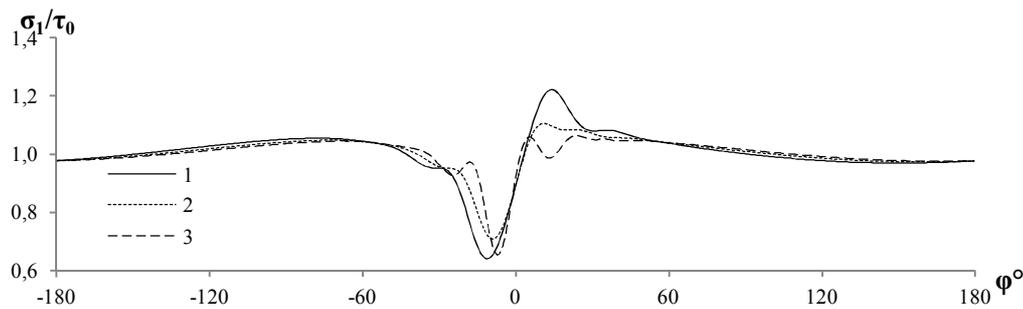
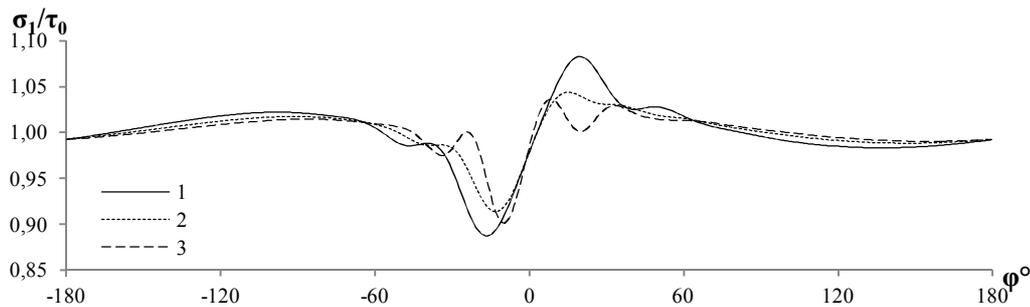


Рис. 10. – Относительные нормальные осевые напряжения  $L/R = 3,86$

**Главные мембранные напряжения.** На рис. 11 – 13 представлены напряжения  $\sigma_1$ , действующие на главных площадках в сечениях 1 – 3 оболочек. Зависимости для второго главного напряжения  $\sigma_2$  кососимметричны по отношению к  $\sigma_1$  и здесь не приводятся. Как и для рассмотренных выше напряжений сектор оболочки, где наиболее отчетливо сказывается возмущающее влияние отверстия, расширяется с увеличением  $L/R$ . Амплитудные значения возмущающих напряжений и их перепад с увеличением  $L/R$  значительно уменьшаются. Для всех длин оболочки отмечается увеличение главных мембранных напряжений на амплитудных участках по мере приближения сечений к торцу. Необходимо также подчеркнуть, что затухание возмущающей части главных напряжений не приводит, как и для других видов напряжений, к их полному исчезновению.

Рис. 11. – Относительные главные мембранные напряжения  $L/R = 0,5$ Рис. 12. – Относительные главные мембранные напряжения  $L/R = 2$ Рис. 13. – Относительные главные мембранные напряжения  $L/R = 3,86$ 

**Выводы.** Разработана высокоточная конечно-элементная модель решения задач определения быстропеременных напряженно-деформированных состояний в цилиндрических оболочках с отверстием, основанная на применении адаптивных сеток в совокупности со специально сформулированными методами контроля точ-

ности. Решены задачи о концентрации напряжений около отверстий для цилиндрических оболочек конечной длины. Показано, что величина коэффициента концентрации напряжений может существенно снижаться, если длина оболочки меньше некоторой, определенной расчетами величины. Проанализированы причины этого снижения для разных полей касательных и нормальных напряжений.

### Библиографические ссылки

1. **Гузь А. Н.** Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. – К.: Наукова думка, 1980. – 636 с.
2. **Колодяжный А. П.** Напряженное состояние цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием при кручении / А. П. Колодяжный, М. А. Медникова // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер.: Механіка. –Т. 2. – 2015. – Вип. 19. – С. 64–76.
3. **Лурье А. И.** Концентрация напряжений в области кругового отверстия на поверхности кругового цилиндра / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1946. – Т. 10. – №3. – С. 307–406.
4. **Пирогов И. М.** Кручение цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием / И. М. Пирогов // Изв. вузов, Машиностроение. – 1960. – № 9. – С. 78–82.
5. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
6. **Шевляков Ю. А.** Кручення полого циліндра з отвором на боковій поверхні / Ю. А. Шевляков, Ф. С. Зигель // ДАН УРСР, Сер. А. – 1954. – No1. – С. 41–44.
7. **Adams N. J. I.** Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole / Adams N. J. I. // Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry. November 1971. – P. 953–961.
8. **Bapurao M. N.** On the stresses in the vicinity of an elliptic hole in a cylindrical shell under torsional loading / M. N. Bapurao, M. V. Murthy // Nuclear Engineering and Design. – 1971. – Vol. 16. – P. 309–321.
9. **Bull J. W.** Stresses around Large Circular Holes in Uniform Circular Cylindrical Shells / J. W. Bull // Journal of Strain Analysis. – 1982 – Vol. 17. – No16. – P. 9–12.
10. **Chandra R.** Stresses around a circular hole in a shallow conical shell with torsional loading / R. Chandra, B. B. Raju // Int. J. Solids Structures. – 1970 – Vol. 6. – P. 1389–1401.
11. **Chou S. I.** Stress State Around a Circular Cylindrical Shell With an Elliptic Hole Under Torsion / S. I. Chou // Transactions of ASME. *J. Appl. Mech* 38(2). – June 1971 –P.534–539.
12. **Eringen A. C.** State of stress in a circular cylindrical shell with a circular hole / A. C. Eringen, A. K. Naghdi, C. C. Thiel // General Technology Corp Torrance Calif, Rpt. – No. 3–6 – Aug 1964.
13. **Houghton D. S.** The effects of curvature on the stress concentration around holes in shells / D. S. Houghton and A. Rothwell // College of Aeronautics, Rpt., 1962. – No. 156. – 20 p.
14. **Kamalarajah R.** Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes / R. Kamalarajah, W. Stoffberg, J. W. Bull, M. Chizari // Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol II WCE 2015, July 1–3, 2015, London, U.K.
15. **Lekkerkerker J. G.** On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole / J. G. Lekkerkerker // Ph.D. Dissertation, Technological University, Delft, The Netherlands, 1965. – 78 p.
16. **Van Dyke P.** Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell / P. Van Dyke // AIAA Journ. – 1965. – Vol. 3. – No 9. – P. 1733–1742.
17. **Withum D.** Die Kreiszyllinderschale mit Kreisformigen Ausschnitt unter Schubbeanspruchung / D. Withum // Ingenieur-Archiv. – Heft 26. – 1958. – P. 435–446.

УДК 539.3

## НАПРУЖЕННЯ В ТОНКІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ПРИ КРУЧЕННІ

А. П. Колодяжний<sup>1</sup>, канд. техн. наук, М. А. Меднікова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,  
<sup>2</sup>Державне підприємство конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля  
Дніпро, Україна

Приведені результати лінійного скінченно-елементного аналізу напружень в недовгих тонких оболонках з невеликим отвором на бічній поверхні при дії крутного моменту. Показано, що коефіцієнти концентрації напружень швидко убувають зі зменшенням довжини оболонки, до того ж цей важливий для проектування ефект починає проявлятися, починаючи з довжини, котра в десятки разів перевищує радіус отвору. Досліджені поля напружень в зонах між отвором і торцями оболонки та їх взаємовплив.

Ключові слова: циліндрична оболонка, круговий отвір, кручення, напружений стан, метод скінченних елементів.

UDC 539.3

## STRESSES OF THIN CYLINDRICAL SHELL WITH CIRCULAR CUTOUT UNDER TORSION

A. P. Kolodiaznyi<sup>1</sup>, PhD (Tech.), M. A. Mednikova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipropetrovsk National University,  
<sup>2</sup>Yuzhnoe State Design Office named after M.K. Yangel,  
Dnipro, Ukraine

The results of linear Finite-Elements analysis of stresses in non-long shells with non-large cutout on side surface under torsion are presented. It was shown that stress concentration coefficients rapidly decrease with simultaneous decreasing length of shell, besides this effect, which is important for design engineering, starts to appear from lengths that are ten times exceeding the radius of cutout. Stress fields are analyzed in areas between the cutout and shell ends and their interaction.

Key words: cylindrical shell, circular cutout, torsion, stress state, Finite-Element Method.

**Introduction.** A theoretical solution of strength problem of shells with cutout will entail great difficulties, due to the fact that according edge problems shall become multiple connected. The first mathematical model was offered by Lurie [3], he has applied it for the cylindrical shells with small cutout for the action cases of tension and pressure. Basic limiting assumptions, lying in the basis of model, concern the linearity of considering problems and shells length, which were taken as infinite. The second assumption on infinity of shell length, gives opportunity to divide stress state and edge conditions on basic state, corresponding to solid shell, and disturbance one that is extinguishing at moving away from cutout. It will be shown further, that this assumption does not have the absolute character, and extent of attenuation region may be highly significant even for non-large cutouts. The first research on torsion performed by Shevlyakov and Zigel [6] followed directly to the methodology that has been given in [3]. Then appeared list of researches, based on the same model [4; 8 – 13; 15 – 17], but with the different variations of the solution algorithms and range expansion of cutout dimension. Fundamental research of stresses concentration performed by Savin [5] presents the concrete result of this cycle of works. Systematic presentation of problems about influence of cutouts with different shapes on stress-strain state of shell with arbitrary curvature is given in [1].

Simplified variation method and Bubnova – Galerkina method are applied in the [7]. During recent years the researches [2; 14], which are using Finite-Element Method for solution, have been appeared. In [2] is shown that even within the geometrically linear problem for the shell with relatively small cutout, the loaded ends may have the significant supporting influence that leads to the decreasing of concentration coefficient. The paper presents estimation of cutout influence on shell stress-strain state and length finiteness influence on stress fields in the zones of stresses concentration in cutout areas and in segments, which are adjacent to the ends, for the thin cylindrical shell under the torsion. The discovered mechanism of nonlocal interaction between cutout and edge conditions for the shells with different lengths is researched.

**Problem formulation.** Thin isotropic cylindrical shells with relative thickness  $R/h = 1200$ , length  $L/R = 0.5; 2; 3.9$  and parameter of radius  $r_0/R = 0.08$ , where  $L, R, h$  – length, radius and thickness of shell accordingly,  $r_0$  – radius of cutout are considered. Coefficient of Poisson's is  $\nu = 0.3$ .

Linear static analysis of MSC.NASTRAN was used for determining stress-strain state. Boundary conditions are given in fixed form for the low edge – displacements and angles of rotations for three axes are equal to zero.

Rigid-element on the upper edge was simulated, in its center the torsion  $M_t$  was applied, at the same time the edge is free from displacements and rotates in all directions.

For the analyzing of stresses level changing along all shell length, three sections in its upper half that are perpendicular to  $z$  axis were chosen. These sections were chosen in such way that describes the changing of stresses state: section 1 is the upper edge of shell, section 2 and 3 are with coordinates  $z = 1/8L$  and  $1/4L$  accordingly.

**Numerical results and their analyses.** Stress concentration coefficients  $k_t$  were defined in wide range of shell lengths ( $L/R$  is from 0.5 up to 20.7). The value of  $L^*/R$ , which is the conditional validity range of the model [3], which overrates  $k_t$  for shorter shells, was found. This result indicates the necessity prudent approach for using the assumption on rapidly extinguishing of disturbance part of total field of stress, which is caused by the appearance of a cutout in shell.

The comparative data on stresses  $\tau_\varphi, \sigma_v^{top}, \sigma_v^{bot}, \sigma_u^{top}, \sigma_u^{bot}, \sigma_1$  and  $\sigma_2$  in sections 1 – 3 between cutout and end for the shells with  $L/R = 0.5; 2; 3.86$ , where  $\sigma_v^{top}$  and  $\sigma_v^{bot}, \sigma_u^{top}$  and  $\sigma_u^{bot}$  are the circular and axial normal stresses on the external and internal surfaces of the shell accordingly,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  are membrane stresses on the principal planes are given. All stresses are related to  $\tau_0$ .

**Conclusion.** The high-precision Finite-Elements model for the problem solution of definition of rapidly changing stress-strain states in cylindrical shells with cutout was developed. This model is based on the application of the adaptive mesh together with the special formulated methods of the accuracy control. The problems of stress concentrations in the area of cutout for cylindrical shells of finite length are solved. It was shown that the value of the stress concentration coefficients may significantly decrease, if the shell length is less than the one defined by analysed. The reasons of this decreasing were analyzed for the different fields of shear and normal stresses.

## References

1. **Guz A. N.** The Theory of thin shells weakened by holes / A. N. Guz, I. S. Chernishenko, V. N. Chechov and others. – Kyiv: Naukova dumka, 1980. – 636 p. (in Russian).

2. **Kolodiaznyi A. P.** Stress state of cylindrical shell weakened by circular hole under torsion / A. P. Kolodiaznyi, M. A. Mednikova // Bulletin of Dnepropetrovsk University. Ser.: Mechanic. T.2. – Dnipropetrovsk: DNU. – 2015. – Vol.19 – P.64–76. (in Russian).
3. **Lurie A. I.** Stress concentration in the region of circular hole on surface circular cylinder / A. I. Lurie // Appl. Math. and Mech. – 1946. – V. 10. – No 3. – P. 307–406. (in Russian).
4. **Pirogov I. M.** Torsion of cylindrical shell weakened by hole / I. M. Pirogov // Izv. vuzov, Mashinostroenie, – 1960. –No 9. – P. 78–82. (in Russian).
5. **Savin G. N.** Distribution of stresses around holes. / G. N. Savin – Kyiv: Naukova dumka, 1968. – 888 p. (in Russian).
6. **Shevlyakov Y. A.** Torsion of hollow cylinder with hole on side surface / Y. A. Shevlyakov, F. S. Zigel // DAN U.S.S.R., Ser.: A. – 1954. – No 1. – P. 41–44. (in Russian).
7. **Adams N. J. I.** Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole / Adams N. J. I. // Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry. November 1971. – P953–961.
8. **Bapurao M. N.** On the stresses in the vicinity of an elliptic hole in a cylindrical shell under torsional loading / M. N. Bapurao, M. V. Murthy // Nuclear Engineering and Design. – 1971. – Vol. 16. – P. 309–321.
9. **Bull J.W.** Stresses around Large Circular Holes in Uniform Circular Cylindrical Shells / J. W. Bull // Journal of Strain Analysis. – 1982 – Vol. 17. – No 16. – P. 9–12.
10. **Chandra R.** Stresses around a circular hole in a shallow conical shell with torsional loading / R. Chandra, B. B. Raju // Int. J. Solids Structures. – 1970 – Vol. 6. – P. 1389–1401.
11. **Chou S. I.** Stress State Around a Circular Cylindrical Shell With an Elliptic Hole Under Torsion / S. I. Chou // Transactions of ASME. – June 1971 –P. 534–539.
12. **Eringen A. C.** State of stress in a circular cylindrical shell with a circular hole / A. C. Eringen, A. K. Naghdi, C. C. Thiel // General Technology Corp Torrance Calif, Rpt. – No. 3–6 – Aug 1964.
13. **Houghton D. S.** The effects of curvature on the stress concentration around holes in shells / D. S. Houghton and A. Rothwell // College of Aeronautics, Rpt., 1962. – No. 156– 20 p.
14. **Kamalarajah R.** Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes / R. Kamalarajah, W. Stoffberg, J. W. Bull, M. Chizari // Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol II WCE 2015, July 1–3, 2015, London, U.K.
15. **Lekkerkerker J. G.** On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole /J. G. Lekkerkerker // Ph.D. Dissertation, Technological University, Delft, The Netherlands, 1965. – 78 p.
16. **Van Dyke P.** Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell / P. Van Dyke // AIAA Journ. – 1965. – Vol. 3. – No 9. – P. 1733–1742.
17. **Withum D.** Die Kreiszyllinderschale mit Kreisformigen Ausschnitt unter Schubbeanspruchung / D. Withum // Ingenieur–Archiv. – Heft 26. – 1958. – P. 435–446.