

УДК 539.3

В. І. Кузьменко, д-р фіз.-мат. наук, **С. О. Плащенко**
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗВ'ЯЗАНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ЗА ПОСТУПАЛЬНО-ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ШТАМПА

Розглядаються контактні задачі за умови взаємного впливу деформування пружного тіла та сил і моментів, під дією яких штамп здійснює гвинтоподібний рух. Запропоновано підхід до розщеплення зв'язаної задачі на дві класичні контактні задачі. Досліджена взаємодія кругового штампів із півпростором у процесі поступально-обертального руху штампів за повного зчеплення і наявності тертя.

Ключові слова: зв'язана задача, круговий штамп, осідання, повороти, зчеплення, тертя.

Вступ. Традиційні постановки контактних задач передбачають, що сили і моменти, прикладені до штампів, заздалегідь відомі, а задача вивчення контактної взаємодії полягає в знаходженні контактних зусиль, а також переміщень та поворотів штампів [2, 5 – 7].

У даній роботі розглядаються задачі про дію штампів на пружне тіло у разі гвинтоподібного руху штампів. Тоді сили та моменти, прикладені до штампів, заздалегідь невідомі, оскільки залежать від деформування тіла. З іншого боку, деформування визначається зовнішньою дією на штамп. Виникає зв'язана задача про зворотній вплив деформування на дію зовнішніх сил. Деякі зв'язані задачі аналогічного типу розглядалися у [1, 6, 9].

Результати досліджень можуть бути використані у прогнозуванні тиску на опорні поверхні гвинтових пресів та гвинтових домкратів, а також для оцінки параметрів взаємодії бурильного інструменту із гірськими породами.

Робота має на меті розробку підходу до розщеплення зв'язаної задачі на класичні контактні задачі та аналіз особливостей взаємодії кругового штампів та пружного півпростору у процесах синхронного осідання та повороту штампів.

Постановка задачі. Штамп, зчеплений із поверхнею лінійно-пружного тіла, за допомогою гвинтового механізму (рис. 1) отримує поступальне переміщення у напрямку осі гвинта та поворот навколо цієї осі. До гвинта прикладений зовнішній крутний момент M_0 . Дія різьби на гвинт зводиться до осьової сили P_T та моменту сил тертя M_T . Як узагальнення закону тертя Амонтона – Кулона, приймаємо, що момент сил тертя пропорційний осьовій силі; подамо цю залежність у такому вигляді: $M_T = \mu P_T b$, де b – радіус різьби. Безрозмірний множник μ має сенс коефіцієнта тертя і визначається експериментально.

Контактна задача формулюється як задача визначення сил та моментів, прикладених до штампів, переміщень та поворотів штампів, а також контактних напружень.

Зауважимо, що заздалегідь невідомі ні сили, які діють на штамп, ні кінематичні параметри руху штампів. Очевидно, що зазначені величини залежать від деформування пружного тіла, тому таку задачу слід розглядати як зв'язану контактну задачу.

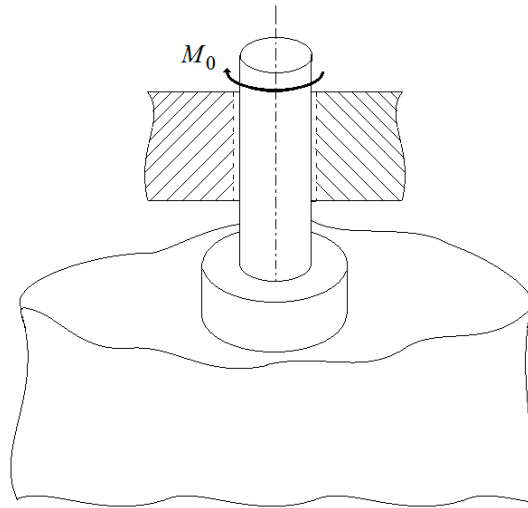


Рис. 1. – Взаємодія штампу та півпростору

Загальна схема розв'язання. Умовно відокремимо гвинт від штамп, замінивши взаємодію цих частин силою P та моментом M (рис. 2).

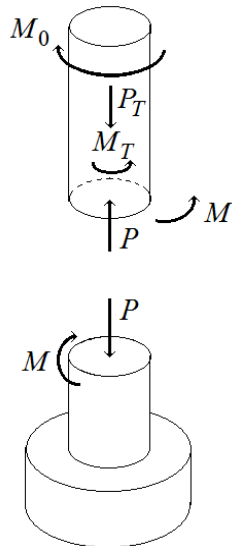


Рис. 2. – Рівновага моментів та сил

Очевидно, що осьова реакція різьби урівноважується силою P : $P_T = P$. З умови рівноваги моментів відносно осі гвинта

$$M + M_T = M_0$$

знаходимо зв'язок між моментом M та силою P

$$M = M_0 - M_T = \mu P b. \quad (1)$$

Під дією осьової сили P та крутного моменту M штамп отримує осьове переміщення δ та поворот навколо осі на кут κ . Вважається, що залежність цих

кінематичних характеристик від P та M відома як розв'язок контактної задачі теорії пружності:

$$\delta = f_1(P, M), \quad \kappa = f_2(P, M). \quad (2)$$

За поступально-обертального руху гвинта переміщення δ та поворот κ штампу пов'язані співвідношенням

$$\delta = \frac{\kappa}{2\pi} h, \quad (3)$$

де h – крок різьби.

Використовуючи співвідношення (1) та (2), із рівності (3) отримуємо таке рівняння відносно осьової сили P

$$f_1(P, M_0 - \mu Pb) = \frac{h}{2\pi} f_2(P, M_0 - \mu Pb). \quad (4)$$

Знайшовши силу P як розв'язок рівняння (2), крутний момент M обчислюємо за формулою (1). Далі розподіл контактних напружень визначається як розв'язок класичної задачі про дію на штамп заданої сили P та заданого крутного моменту M .

Викладена схема не пов'язується із певною формою штампу та пружного тіла. Однак ефективне розв'язання задачі потребує конкретних аналітичних виразів для функцій $f_1(P, M)$ та $f_2(P, M)$, що можливо лише за певних канонічних форм тіла та штампу.

Зв'язана задача про дію на пружний півпростір кругового штампу із плоскою основою. Оскільки область контакту у даному разі залишається незмінною, то виконується принцип суперпозиції. Це означає, що переміщення δ залежить лише від сили P , а поворот κ – лише від моменту M .

Розв'язок задачі про дію осьової сили на круговий штамп, зчеплений з півпростором, наводиться у [5; 7]; було встановлено такий зв'язок між переміщенням та осьовою силою

$$\delta = \theta \frac{P}{4Ga}, \quad (5)$$

де $\theta = (1 - 2\nu)/\ln(3 - 4\nu)$, G , ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона півпростору; a – радіус основи.

Задача про закручування півпростору була об'єктом дослідження у низці робіт; результати наводяться, зокрема, у монографіях [3; 4]. Отриманий зв'язок між кутом повороту штамп κ та крутним моментом має вигляд

$$\kappa = \frac{3}{16} \frac{M}{Ga^3}. \quad (6)$$

Тоді співвідношення (3) набуває вигляду лінійного рівняння відносно P

$$\theta \frac{P}{4Ga} = \frac{h}{2\pi} \frac{3}{16} \frac{M_0 - \mu Pb}{Ga^3},$$

з якого знаходимо значення осьової сили та крутного моменту

$$P = \frac{3}{8\pi} \frac{h}{a} \frac{M_0}{\theta + \frac{3}{8\pi} \mu \frac{b}{a} \frac{h}{a}}, \quad (7)$$

$$M = M_0 - \mu P b = \theta \frac{M_0}{\theta + \frac{3}{8\pi} \mu \frac{b}{a} \frac{h}{a}}. \quad (8)$$

Звернемо увагу на залежність сили P та моменту M від параметра

$$\theta = \frac{\ln(4-3\nu)}{1-2\nu},$$

тобто від коефіцієнта Пуассона матеріалу півпростору. Зрозуміло, що це є форма вияву зв'язаного характеру задачі.

Після визначення осьової сили та крутного моменту осідання та поворот штампу обчислюється за формулами (5) та (6).

Визначення нормальних контактних напружень за умови зчеплення штампу з півпростором зводиться до обчислення інтегралів, що залежать від параметра; у монографії [7] наводиться графік розподілу контактної тиску. Дотичні контактні напруження, викликані поворотом штампу, обчислюються за відомою формулою [3]

$$\tau = \frac{4\kappa G}{\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} = \frac{3}{4\pi a^3} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} M.$$

Зв'язана задача із урахуванням сил тертя. Відмовимося від вимоги повного зчеплення штампу з півпростором і вважатимемо, що внаслідок повороту штампа навколо осі виникають сили тертя, напрямком яких протилежний напрямку обертання. Тертям, викликаним дією осьової сили, нехтуємо. Розв'язок такої задачі у разі заданої сили P наводиться у монографії [2]. Було показано, що момент M , необхідний для обертання штампу зі сталою кутовою швидкістю, пов'язаний із силою P співвідношенням

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_1 P a, \quad (9)$$

де μ_1 – коефіцієнт тертя між поверхнями штампу та півпростору.

У разі поступально-обертального руху штампа розглянемо ситуацію, що передую початку проковзування штампу. Для зв'язку між кутом повороту κ та моментом M зберігається співвідношення (6), а осьове переміщення виражається через силу P за формулою [2]:

$$\delta = \frac{1-\nu}{4Ga} P = \theta_1 \frac{P}{4Ga}; \quad \theta_1 = 1-\nu.$$

Для обчислення P та M достатньо у формулах (7) та (8) замінити θ на θ_1 . Виключаючи M_0 , знаходимо зв'язок між крутним моментом та осьовою силою

$$M = \frac{8\pi}{3} \theta_1 \frac{a}{h} P a. \quad (10)$$

Порівнюючи вирази (9) та (10), отримуємо умову проковзування зі сталою кутовою швидкістю

$$\frac{8\pi}{3}\theta_1 \frac{a}{h} = \frac{\pi}{4}\mu_1,$$

тобто коефіцієнт тертя μ_1 повинен мати таке значення

$$\mu_1 = \mu_1^* = \frac{32}{3}\theta_1 \frac{a}{h} = \frac{32}{3}(1-\nu)\frac{a}{h}.$$

Якщо $\mu_1 > \mu_1^*$, то проковзування штампу відносно півпростору неможливе; у разі, коли $\mu_1 < \mu_1^*$, штамп обертається із прискоренням.

Оцінімо величину μ_1^* . Нехай $\nu = 0,3$; $\frac{a}{h} = 10$. Тоді $\mu_1^* \approx 747$. Отже, за реальних значень коефіцієнта μ_1 обертання штампу відносно півпростору при сталому значенні крутного моменту M_0 відбувається з прискоренням протягом усього процесу поступально-обертального руху. Відсутність проковзування можна забезпечити лише за використання спеціального рельєфу контактної поверхні штампу.

Висновки. Запропонована постановка зв'язаної контактної задачі у разі заздалегідь невідомих сил та моментів, прикладених до штампа. Отримані аналітичні розв'язки задач про дію кругового штампу на півпростір у процесі сумісного осідання та повороту штампа. Встановлені умови, за яких можливе проковзування штампу відносно поверхні півпростору.

Перспективним напрямком подальших досліджень є вивчення складного навантаження тіл за гвинтоподібного руху штампа, а також аналіз операції шліфування поверхні з мікронерівностями.

Бібліографічні посилання

1. **Власенко Ю. Є.** Зв'язані контактні задачі механіки деформівного тіла / Ю. Є. Власенко, В. І. Кузьменко, К. І. Шумельчик // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: сб. наук. праць – Д.: Ліра. – 2012. – Вип. 19 – С. 41–47.
2. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. **Джонсон К.** Механика контактных взаимодействий / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
4. Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М.: Наука, 2001. – 670 с.
5. **Моссаковский В. И.** Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова. – К.: Наукова думка. – 1985. – 176 с.
6. **Плашенко С. О.** Зв'язана задача деформації плоскої мембрани під дією талого снігу / С. О. Плашенко, В. І. Кузьменко // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Серія: механіка неоднорідних структур. – 2016. – Вип1(20) – С. 64–72.
7. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

8. **Martynyak R.** Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids / R. Martynyak, K. Chumak // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – Vol. 55. – No 4. – P. 1170–1178.
9. **Shumelchuk K.** Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure / K. Shumelchuk, V. Kuzmenko // *Mechanics and Control.* AGH University of Science and Technology Press: Krakow. – 2013. – Vol. 32. –No 4. – P. 136–142.

Надійшла до редколегії 13.03.2017

УДК 539.3

СВЯЗАННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ШТАМПА

В. И. Кузьменко, д-р физ.-мат. наук, **С. А. Плашенко**
*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, Украина*

Рассматриваются контактные задачи при условии взаимного воздействия упругого тела и сил с моментами, под действием которых штамп совершает винтообразное движение. Предложен подход к расщеплению связанной задачи на две классические контактные задачи. Исследовано взаимодействие кругового штампа с полупространством в процессе поступательно-вращательного движения штампа при полном сцеплении и наличии трения.

Ключевые слова: связанная задача, круговой штамп, оседание, повороты, сцепление, трение.

UDC 539.3

COUPLED CONTACT PROBLEMS IN ELASTICITY THEORY WITH TRANSLATORY AND ROTATIONAL MOTION OF THE STAMP

V. Kuz'menko, Dr. Sci. (Phis.-Math.), **S. Plashenko**
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, Dnipro, Ukraine

We consider contact problems under the condition of the mutual impact of the deformation of the elastic body and the forces and moments under which the stamp performs spiral motion. An algorithm for splitting the coupled problem into two classical contact problems is suggested. Interaction of the circular stamp and the half-space during the translatory and rotational motion of the stamp with full coupling and friction presence is investigated.

Keywords: coupled problem, circular stamp, yielding, rotations, coupling, friction.

Introduction. In classical contact problems it is presumed that forces and moments, which are applied to the stamp, are known and it is needed to find contact forces, displacements and rotations of the stamp [2; 5 – 7].

Problem about influence of the stamp on the elastic body during the spiral motion of the stamp is being considered in this work. Forces and moments, which are applied to the stamp, are not known at the beginning due to the fact that they depend on the deformation of the body. From the other side, the deformation is determined by the outer influence on the stamp. Thus, a coupled problem about reverse influence of deformation on the outer forces is considered.

Problem definition. A stamp, which is united with a surface using screw mechanism is considered. A stamp gets translation displacements in the screw axis

direction and rotation around this axis. Outer twist moment M_0 is applied to the screw. The screw-thread has axial force P_T and moment of friction forces M_T . Using the Amontons-Coulomb law, we get $M_T = \mu P_T b$, where b – screw-thread radius, μ – friction coefficient. It is needed to find forces and moments, which are applied to the stamp, its rotations and displacements and the contact stresses.

General solution scheme. Screw and the stamp interaction is replaced by force P and moment M . From the condition of the equilibrium of the moments about the screw axis, we get

$$\begin{aligned} M + M_T &= M_0, \\ M &= M_0 - M_T = M_0 - \mu P b. \end{aligned}$$

Under the influence of the force P and twist moment M , the stamp gets axial displacement δ and torsion by angle κ around the axis. It is considered that these parameters are defined as functions of M and P

$$\delta = f_1(P, M), \quad \kappa = f_2(P, M).$$

Dependence between δ and κ can be written as follows:

$$\delta = \frac{\kappa}{2\pi} h,$$

where h - thread pitch size.

Thus

$$f_1(P, M_0 - \mu P b) = \frac{h}{2\pi} f_2(P, M_0 - \mu P b),$$

P can be obtained using this formula. Using P , we can find M and as a result δ and κ .

Coupled problem about influence of the circular stamp with place foundation on elastic half space. As it is described in works [3, 4, 7, 8] displacements and torsions can be found as follows:

$$\kappa = \frac{3}{16} \frac{M}{G a^3}, \quad \delta = \theta \frac{P}{4 G a},$$

where $\theta = \frac{1-2\nu}{\ln(3-4\nu)}$, G , ν – elasticity module and Poisson coefficient correspondingly,

a – stamp foundation radius.

Using this, P and M can be found as follows

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{8\pi} \frac{h}{a} \frac{\frac{M_0}{a}}{\theta + \frac{3}{8\pi} \mu \frac{b}{a} \frac{h}{a}}, \\ M &= M_0 - \mu P b = \theta \frac{M_0}{\theta + \frac{3}{8\pi} \mu \frac{b}{a} \frac{h}{a}}. \end{aligned}$$

Coupled problem with friction. For the same problem, it is considered that friction forces appear when the stamp is rotated. Such problem was investigated in

monograph [2] and it was shown that it is necessary that the following condition is met, so the stamp is rotated with constant angular velocity.

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_1 P a .$$

In case of translatory and rotational movement of the stamp, we consider the situation, which goes before the stamp starts to slip. Displacement be found as follows [2]

$$\delta = \frac{1-\nu}{4Ga} P = \theta_1 \frac{P}{4Ga} ; \theta_1 = 1-\nu .$$

From here

$$M = \frac{8\pi}{3} \theta_1 \frac{a}{h} P a . \quad (10)$$

Thus, $\mu_1 = \mu_1^* = \frac{32}{3} \theta_1 \frac{a}{h} = \frac{32}{3} (1-\nu) \frac{a}{h}$. If $\mu_1 > \mu_1^*$, the slipping of the stamp is impossible. If $\mu_1 < \mu_1^*$, then the stamp moves with acceleration.

Conclusions. Definition of the coupled problem is suggested. Analytical solutions were obtained. Conditions when the stamp can not slip were found.

References

1. **Vlasenko U. E.** Coupled contact problems of the deformable body mechanics // U. E. Vlasenko, V. I. Kuz'menko, K. I. Shumelchik // Problems of computational mechanics and strength of structures. – D.: Lira, 2012. – Vol. 19 – P. 41–47. (in Ukrainian).
2. **Galın L. A.** Contact problems of elasticity and viscoelasticity theory / L. A. Galın. – Moscow: Nauka, – 1980. – 304 p. (in Russian)
3. **Johnson K. L.** Contact Mechanics / K. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 452 p. (in Russian).
4. Mechanics of contact interactions [edited by I. I. Vorovich, V. M. Alexandrov]. – Moscow: Nauka, – 2001. – 670 p. (in Russian).
5. **Mossakovskiy V. I.** Contact problems of the mathematical elasticity theory / V. I. Mossakovskiy, N. E. Kachalovskaya, S. S. Golikova. – Kyiv: Naukova dumka – 1985. – 176 p. (in Russian).
6. **Plashenko S. O.** Coupled problem of membrane deformation under the melted snow pressure / S. O. Plashenko, V. I. Kuz'menko // Visnik of the Dnipropetrovsk University. – 2016 — Vol. 1(20). –P. 64–72. (in Ukrainian).
7. **Uflyand Y. S.** Integral transformations in the elasticity theory problems / Y. S. Uflyand. – Leningrad: Nauka, 1967. – 402 p. (in Russian).
8. **Martynyak R.** Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids / R. Martynyak, K. Chumak // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2012. – Vol. 55. – No 4. – P. 1170–1178.
9. **Shumelchik K.** Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure / K. Shumelchik, V. Kuzmenko // Mechanics and Control. AGH University of Science and Technology Press: Krakow. – 2013. – Vol. 32. –No 4. – P. 136–142.