

УДК 539.3

Л. В. Курпа, д-р техн. наук, Е. И. Любичкая, канд. техн. наук,  
И. О. Морачковская, канд. техн. наук

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Предложен метод решения нелинейных задач изгиба функционально-градиентных пластин на упругом основании типа Винклера – Пастернака. Математическая постановка выполнена в рамках классической теории пластин типа Кармана. Для линеаризации исходной нелинейной системы уравнений равновесия использованы метод последовательных нагружений и метод Ньютона. Решение последовательности линеаризованных задач выполняется с помощью метода R-функций, что позволило исследовать напряженно-деформированное состояние пластин сложной формы. Тестирование подтвердило достоверность и эффективность разработанного подхода.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные пластины, упругое основание, теория R-функций, нелинейность.

**Введение.** Широкое использование современных композитных материалов, в том числе и функционально-градиентных (FGM), для изготовления различных элементов тонкостенных конструкций, приводит к необходимости разработки эффективных методов расчета таких элементов. Особое внимание в современной литературе уделяется нелинейным задачам, к которым относятся задачи изгиба, колебаний и устойчивости пластин и оболочек, как основных элементов многих авиационных и машиностроительных конструкций. В последние годы вопросам расчета пластин и оболочек из FGM, с учетом их нелинейного деформирования посвящено огромное количество монографий и статей. Достаточно полный обзор, касающийся решения линейных и нелинейных проблем пластин и оболочек, изготовленных из FGM, представлен, например, в [1; 2].

Как следует из анализа публикаций, посвященных разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин и оболочек из FGM, предлагаемые аналитические методы позволяют исследовать в основном пластины и оболочки с прямоугольным планом. Для расчета FGM пластин с более сложной формой предлагается использовать численные методы, среди которых наиболее универсальным является метод конечных элементов (МКЭ). Тем не менее, работ, в которых бы были представлены численные результаты для FGM пластин со сложной формой плана, покоящихся на упругом основании под действием поперечной нагрузки, мы не обнаружили.

Ранее в [3 – 5] был предложен метод для исследования НДС ортотропных пластин и пологих оболочек на упругом основании при их нелинейном деформировании. В настоящей работе этот метод впервые распространен на FGM пластины. Предлагаемый алгоритм использует для линеаризации исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений метод последовательных нагружений (МПН). А через некоторое количество шагов, соответствующих определенным приращениям поперечной нагрузки, полученные результаты уточняются методом Ньютона. При этом на каждом шаге используется теория R-функций в сочетании с вариаци-

онным методом Ритца, т.е. метод R-функций (RFM). Разработанный подход позволяет изучать геометрически нелинейный изгиб FGM пластин со сложной формой и различными граничными условиями.

**Постановка задачи.** Рассмотрим FGM пластину, изготовленную из смеси керамики и металла. Свойства материала непрерывно изменяются вдоль толщины пластины. Предположим, что верхняя поверхность ( $z = h/2$ ) пластины является керамической, а нижняя ( $z = -h/2$ ) – металлической. Свойства материала являются функциями от объемной доли составляющих материалов и могут быть выражены как [7]

$$P = P_t V_c + P_b V_m,$$

где  $P_t$  и  $P_b$  характеризуют температурно-зависимые свойства верхней и нижней поверхностей пластины соответственно и могут быть выражены как функции температуры [11].

$$P_j = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3),$$

здесь  $P_0$ ,  $P_{-1}$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , и  $P_3$  являются коэффициентами температуры  $T$  и являются определенными для каждого материала;  $V_c$  и  $V_m$  – объемные доли керамики и металла, связанные соотношением  $V_c + V_m = 1$ .

Примем, что доля керамики  $V_c$  изменяется вдоль толщины пластины по степенному закону

$$V_c = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^k.$$

Показатель степени  $k$  ( $0 \leq k < \infty$ ) обозначает показатель объемной доли керамики,  $z$  – расстояние между текущей точкой и срединной плоскостью. В частном случае, когда  $k=0$ , мы получаем однородный материал – керамический, а если  $k \rightarrow \infty$  – металлический.

Пластина находится под действием распределенной нагрузки  $q(x, y)$ , опирается на упругое основание типа Винклера – Пастернака. Предполагается, что реакция основания  $p$  выражается следующим образом

$$p(x, y) = K_1 w + K_2 \nabla^2 w,$$

где  $K_1$  и  $K_2$  – коэффициенты жесткости Винклера и Пастернака,  $w$  – прогиб пластины.

Введем в рассмотрение функцию напряжений  $F(x, y)$ , такую, что

$$N_x = F_{,yy}, \quad N_y = F_{,xx}, \quad N_{xy} = -F_{,xy}.$$

Согласно классической геометрически-нелинейной теории пластин, уравнение равновесия для FGM пластин [12] могут быть представлены следующим образом:

$$d_{11}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) + 2(d_{12} + 2d_{66})w_{,xxyy} - b_{12}(F_{,xxxx} + F_{,yyyy}) + 2(b_{66} - b_{11})F_{,xxyy} = q(x, y) - M_{x,xx}^T - M_{y,yy}^T + L(w, F), \quad (1)$$

$$a_{11}(F_{,xxxx} + F_{,yyyy}) + (2a_{12} + a_{66})F_{,xxyy} - b_{12}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) - 2(b_{11} - b_{66})w_{,xxyy} = a_{12}(N_{x,xx}^T + N_{y,yy}^T) + a_{11}N_{x,yy}^T + a_{22}N_{y,xx}^T - \frac{1}{2}L(w, w), \quad (2)$$

где нелинейные операторы  $L(R, \Psi)$  определяются как:

$$L(R, \Psi) = R_{,xx} \Psi_{,yy} - 2R_{,xy} \Psi_{,xy} + \Psi_{,xx} R_{,yy};$$

В (1),(2)  $[a_{ij}]$ ,  $[b_{ij}]$  и  $[d_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) – приведенные жесткости:

$$[a] = [A]^{-1}, \quad [b] = -[A]^{-1}[B], \quad [d] = [D] - [B][A]^{-1}[B]. \quad (3)$$

Здесь  $[A]$ ,  $[B]$  и  $[D]$  находятся так:

$$([A], [B], [D]) = \int_{-h/2}^{h/2} [Q(z)](1, z, z^2) dz, \quad (4)$$

где

$$[Q(z)] = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu(z)}{2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В настоящей работе предполагается, что температура на верхней и нижней поверхностях одинакова, коэффициенты Пуассона не зависят от температуры и совпадают для керамики и металла. Тогда постановка задачи существенно упрощается. При этом температурные усилия

$$\{N^{(T)}\} = (N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T)$$

и моменты

$$\{M^{(T)}\} = (M_x^T, M_y^T, M_{xy}^T)$$

будут равными нулю, а коэффициенты матриц  $[a]$ ,  $[b]$  и  $[d]$  вычисляются как:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu}{E_1}, \quad a_{66} = 2(1 + \nu)a_{11}, \quad (6)$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{66} = -\frac{E_2}{E_1}, \quad b_{12} = b_{21} = b_{16} = b_{26} = 0 \quad (7)$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{1}{1-\nu^2} \left( E_3 - \frac{E_2^2}{E_1} \right), \quad d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}, \quad (8)$$

$$d_{16} = d_{61} = d_{26} = d_{62} = 0, \quad d_{66} = \frac{1-\nu}{2} d_{11}.$$

В выражениях для элементов матриц  $[a]$ ,  $[b]$  и  $[d]$  значения констант  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  после вычисления интегралов определяются следующим образом:

$$E_1 = \left( E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)}, \quad (8)$$

$$E_3 = \left( \frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)} \right) \right) h^3. \quad (9)$$

Изгибающие и крутящий моменты  $\{M\} = (M_x, M_y, M_{xy})$  выражаются как

$$\{M\} = (M_x, M_y, M_{xy}) = b_{11} \{N\} + \{\chi\} [d],$$

где

$$\{N\} = (N_x, N_y, N_{xy}), \quad \{\chi\} = (-w_{,xx}, -w_{,yy}, -2w_{,xy}) \quad (10)$$

Учитывая принятые предположения, запишем систему уравнений равновесия (1) – (2) как:

$$d_{11} \Delta \Delta w = L(w, F) + q(x, y) - p(x, y), \quad (11)$$

$$a_{11} \Delta \Delta F = -\frac{1}{2} L(w, w). \quad (12)$$

Система (11) – (12) дополняется соответствующими граничными условиями. Например, для условий, соответствующих скользящему шарниру, граничные условия будут следующими:

$$W = 0, \quad M_n = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (13)$$

В случае скользящей заделки граничные условия имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (14)$$

В соотношениях (13), (14) выражения для  $M_n, T_n, N_n$  имеют следующий вид:

$$M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + M_{xy} l m, \quad N_n = N_x l^2 + N_y m^2 + N_{xy} l m, \\ T_n = N_{xy} (l^2 - m^2) + (N_x + N_y) l m.$$

Здесь  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \cos \beta = \sin \alpha$ ,  $\alpha$  - угол между внешней нормалью  $n$  к границе области и осью  $Ox$ .

**Метод решения.** Линеаризацию нелинейных уравнений (11), (12) будем выполнять методом последовательных нагружений. Согласно этому методу исходное нагружение разбивается на  $n$  малых нагрузок  $\delta q^{(r)}$  ( $r=1,2,\dots,n$ ), соответствующих малым прогибам пластины [1]. На каждом  $r$ -м шаге нагружения для решения линеаризованной системы уравнений будем использовать RFM. Можно показать, что функционал, соответствующий линеаризованной системе уравнений, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Pi(\delta w^{(r)}, \delta \phi^{(r)}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ d_{11} (\delta w_{,xx}^{(r)})^2 - a_{11} (\delta \phi_{,yy}^{(r)})^2 + (\delta w_{,x}^{(r)})^2 \phi_{,yy}^{(r-1)} - \right. \\ & - 2\delta w_{,x}^{(r)} \delta w_{,y}^{(r)} \phi_{,xy}^{(r-1)} + (\delta w_{,y}^{(r)})^2 \phi_{,xx}^{(r-1)} + \\ & + 2(\delta w_{,y}^{(r)} \delta \phi_{,y}^{(r)} w_{,xx}^{(r-1)} + \delta w_{,x}^{(r)} \delta \phi_{,x}^{(r)} w_{,yy}^{(r-1)}) - \\ & - 2w_{,xy}^{(r-1)} (\delta w_{,x}^{(r)} \delta \phi_{,y}^{(r)} + \delta w_{,y}^{(r)} \delta \phi_{,x}^{(r)}) + K_1 (\delta w^{(r)})^2 + \\ & \left. + K_2 (\nabla \delta w^{(r)})^2 - 2\delta q^{(r)} \delta w^{(r)} \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $w^{(r-1)}$  и  $\phi^{(r-1)}$  – суммарные прогиб и функция напряжений, соответствующие нагрузке  $q^{(r)}$  на  $(r-1)$ -м шаге нагружения.

Согласно методу Ритца, неизвестные приращения  $\delta w^{(r)}$ ,  $\delta \phi^{(r)}$  представляются в виде:

$$\delta w^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_1} c_i w_i, \quad \delta \phi^{(r)} = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} c_i \phi_i, \quad (16)$$

где  $c_i$  – неизвестные коэффициенты,  $\{w_i\}$ ,  $\{\phi_i\}$  – последовательности координатных функций, удовлетворяющих, по крайней мере, кинематическим граничным условиям. Для построения таких последовательностей в работе используется теория R-функций, которая позволяет строить системы координатных функций для пластин со сложной геометрией области и различными условиями закрепления. Прогиб и функция напряжений после выполнения  $n$  шагов по нагрузке находятся суммированием полученных приращений:

$$w^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta w^{(r)}, \quad F^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta \phi^{(r)} \quad (17)$$

Чтобы уточнить решение МПН, в работе предлагается через определенное количество шагов применять метод Ньютона. Можно показать, что вариационная постановка задачи для метода Ньютона сводится к нахождению точки стационарности следующего функционала:

$$\begin{aligned}
P(w^{(s+1)}, F^{(s+1)}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ d_{11} (w_{,xx}^{(s+1)})^2 - a_{11} (F_{,yy}^{(s+1)})^2 + (w_{,x}^{(s+1)})^2 F_{,yy}^{(s)} - \right. \\
& - 2w_{,x}^{(s+1)} w_{,y}^{(s+1)} F_{,xy}^{(s)} + (w_{,y}^{(s+1)})^2 F_{,xx}^{(s)} + \\
& + 2(w_{,y}^{(s+1)} F_{,y}^{(s+1)} w_{,xx}^{(s)} + w_{,x}^{(s+1)} F_{,x}^{(s+1)} w_{,yy}^{(s)}) - \\
& - 2w_{,xy}^{(s)} (w_{,x}^{(s+1)} F_{,y}^{(s+1)} + w_{,y}^{(s+1)} F_{,x}^{(s+1)}) + K_1 (w^{(s+1)})^2 + K_2 (\nabla w^{(s+1)})^2 - \\
& \left. - 2(q^{(s+1)} + L(w^{(s)}, F^{(s)})) w^{(s+1)} + L(w^{(s)}, F^{(s)}) F^{(s+1)} \right\} d\Omega. \quad (18)
\end{aligned}$$

Сходимость итерационного процесса определяется выполнением следующего неравенства

$$\left\| \frac{w^{(s+1)} - w^{(s)}}{w^{(s)}} \right\|^2 + \left\| \frac{F^{(s+1)} - F^{(s)}}{F^{(s)}} \right\|^2 \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная величина относительной погрешности.

**Численные результаты.** Разработанный алгоритм был проверен на ряде тестовых задач и применен для решения новых.

*Задача 1.* Исследуем НДС квадратной ( $a \times a$ ) FGM пластины на упругом основании типа Винклера – Пастернака,  $h = 0,01$  м,  $a = 1$  м. Пластина подвержена действию равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q$ . Предположим, что пластина изготовлена из следующих функционально-градиентных материалов:

- 1)  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  – нитрид кремния ( $E_c = 322,2715$  ГПа,  $\nu_c = 0,24$ ) и нержавеющая сталь ( $E_m = 207,7877$  ГПа,  $\nu_m = 0,31776$ ),
- 2)  $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$  – цирконий ( $E_c = 168,063$  ГПа,  $\nu_c = 0,298$ ) и титановый сплав ( $E_m = 105,6982$  ГПа,  $\nu_m = 0,2981$ ).

Рассмотрим два вида граничных условий: CCCC – скользящая заделка по всему контуру, CSCS – скользящая заделка на сторонах  $x = \pm a/2$  и скользящий шарнир на сторонах  $y = \pm a/2$ .

Сравнение полученных зависимостей «нагрузка-прогиб в центре пластины» с результатами [13] для CCCC пластины из материала 2 представлено на рис. 1. Здесь  $k_1 = K_1 a^4 / d_{11}$ ,  $k_2 = K_2 a^2 / d_{11}$ ,  $E_0 = 207,7877$  ГПа,  $k = 3$ . Результаты практически совпадают, что подтверждает достоверность разработанного подхода.

Сравнение результатов с [13] для пластины без упругого основания и для различных граничных условий (CCCC и CSCS) показано на рис. 2. Как следует из рис. 2, полученные результаты практически совпадают с результатами [13].

*Задача 2.* Исследуем геометрически-нелинейный изгиб прямоугольной пластины с эллиптическим отверстием под действием равномерно распределенной нагрузки. Геометрические параметры пластины следующие (рис. 3):  $h = 0,02$  м,  $a = 1$  м,  $b = 0,75a$ ,  $d = 0,2a$ ,  $c = 0,4a$ . Коэффициенты упругости  $k_1 = K_1 a^4 / E_m h^3$ ,  $k_2 = K_2 a^2 / E_m h^3$ . Материал –  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ . Внешний контур может быть закреплен одним из способов: CCCC или CSCS, отверстие либо свободно, либо шарнирно оперто.

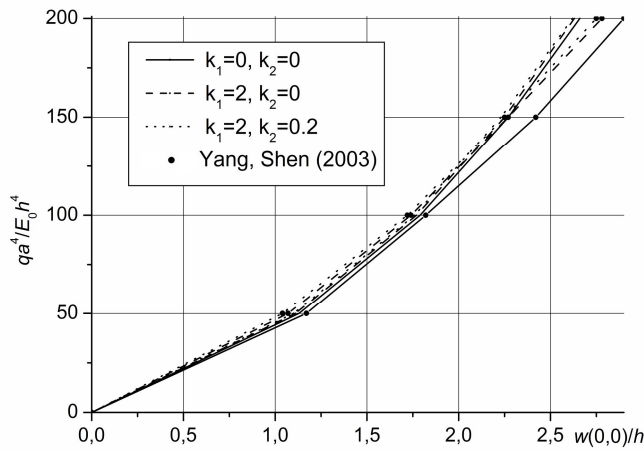


Рис. 1. - Сравнение зависимостей «нагрузка-прогиб в центре» жестко закрепленной пластины на упругом основании ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ,  $\kappa=3$ )

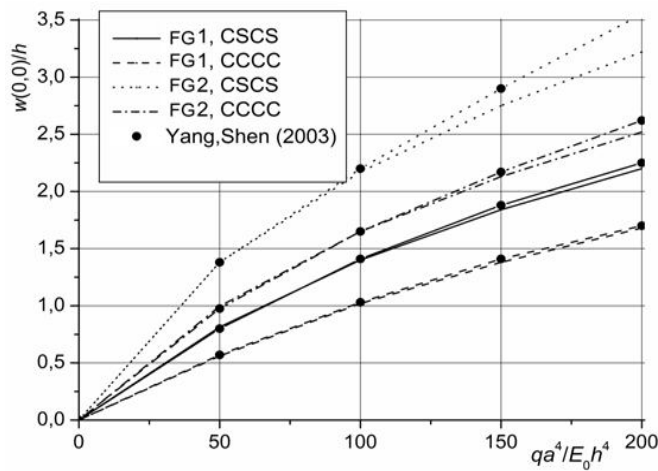


Рис. 2. - Сравнение зависимостей «нагрузка-прогиб в центре» для  $Si_3N_4/SUS304$  и  $ZrO_2/Ti-6Al-4V$  пластин без упругого основания при различных граничных условиях,  $\kappa=3$

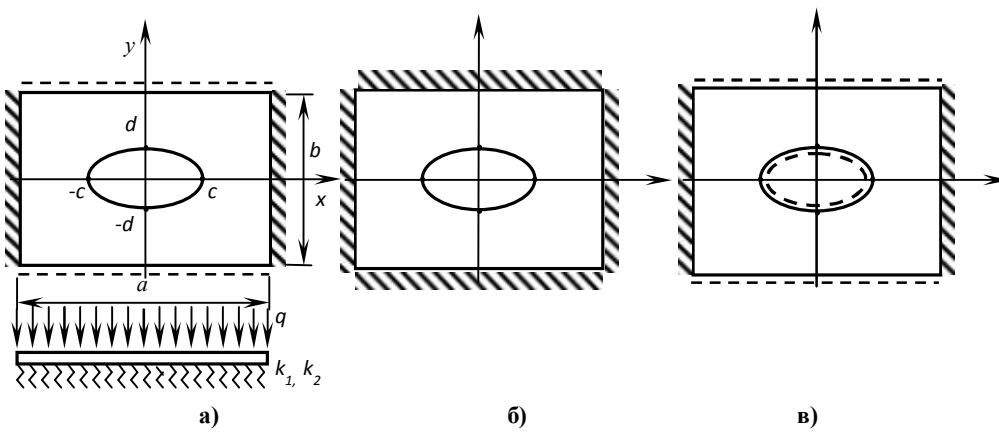


Рис. 3. – Пластина с отверстием на упругом основании

Для построения системы координатных функций согласно RFM необходимо вывести соответствующие структурные формулы. Например, для пластин, изображенных на рис. 3, штриховая линия соответствует скользящей заделке, пунктирная линия – скользящему шарниру, а участки границы без штриховки соответствуют свободному краю. Структурные формулы, удовлетворяющие только главным (кинематическим) граничным условиям, имеют следующий вид:

$$\delta w^{(r)} = \omega_1 f_2 P_1 \quad \text{– рис. 3, а; } \delta w^{(r)} = \omega_1^2 P_1 \quad \text{– рис. 3, б;}$$

$$\delta w^{(r)} = \omega f_2 P_1 \quad \text{– рис. 3, в; } \delta \phi^{(r)} = \omega^2 P_2 \quad \text{– рис. 3, а, в, б.}$$

Здесь  $P_1, P_2$  – неопределенные компоненты структурных формул, которые раскладываются в ряд по полной системе функций  $\{\phi_i\}, \{\psi_i\}$  (степенным полиномам, сплайнам, тригонометрическим функциям):

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} c_i \phi_i; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} c_i \psi_i,$$

$\omega(x, y) = f_1 \wedge_0 (f_2 \wedge_0 f_3) = 0$  – уравнение всей границы области, построенное с помощью теории R-функций;  $\omega_1(x, y) = f_2 \wedge_0 f_3 = 0$  – уравнение внешней границы, т.е. прямоугольника;  $\wedge_0$  – знак обозначает R-конъюнкцию [2].

Функции  $f_i(x, y), (i = 1, 2, 3)$  определяются следующим образом:

- $f_1 = (x^2 / c^2 + y^2 / d^2 - 1) \geq 0$  – для внешней части эллипса с центром в начале координат;
- $f_2 = (a^2 / 4 - x^2) / a \geq 0$  – для внутренней части вертикальной полосы, ограниченной прямыми  $x = \pm a / 2$ ;
- $f_3 = (b^2 / 4 - y^2) / b \geq 0$  – для внутренней части горизонтальной полосы, ограниченной прямыми  $y = \pm b / 2$ .

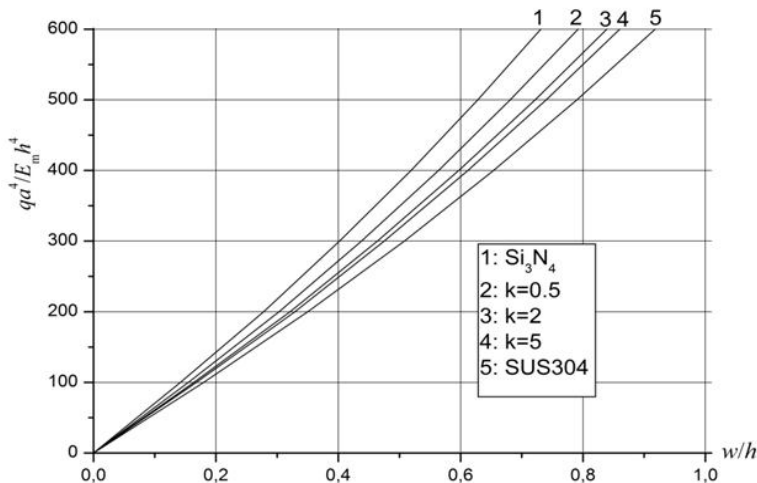


Рис. 4. - Зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» для пластины (рис. 3,б) на упругом основании для различных значений параметра  $k$



На рис. 4 представлена зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» пластины для различных значений параметра  $k$ . Расчет выполнялся для пластины, защемленной (СССС) по внешнему контуру, на упругом основании с коэффициентами жесткости  $k_1 = 50$ ,  $k_2 = 5$ .

Влияние упругого основания и способа закрепления на максимальный прогиб пластины можно проследить с помощью кривых, представленных на рис. 5. Для пластин со свободным отверстием (рис. 3, а, б), соответствующие кривые изображены на рис. 5, а. Для пластин с шарнирно-опертым отверстием (рис. 3, в) аналогичные кривые представлены на рис. 5, б. Из рисунка видно, что наличие данного упругого основания заметно уменьшает прогиб пластины. Также отметим, что из рассмотренных способов опирания наименьшие прогибы возникают в случае закрепления СССС, что соответствует физическому смыслу.

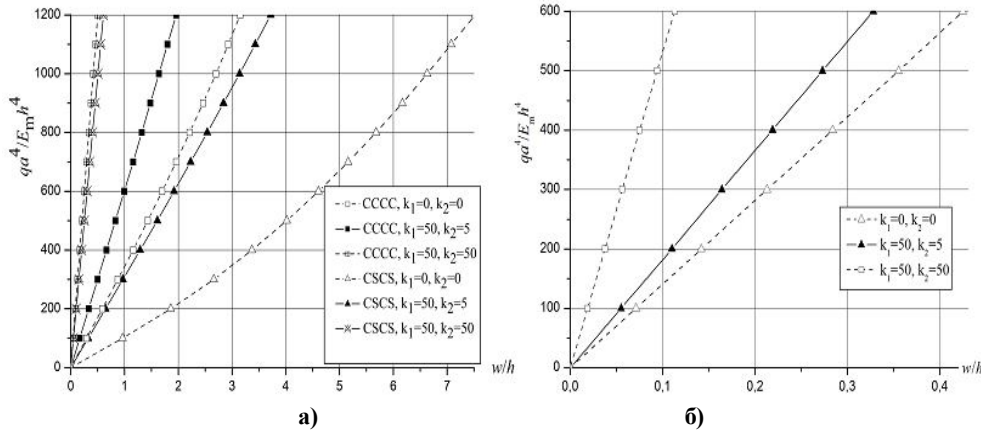


Рис. 5. - Зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» для пластины при различных граничных условиях и коэффициентах упругости

**Выводы.** Предложен численно-аналитический метод для исследования изгиба FGM пластин под действием поперечной нагрузки со сложной геометрией и покоящихся на упругом основании типа Винклера – Пастернака. Разработанный метод базируется на совместном применении вариационного метода Ритца, теории R-функций, методах последовательного нагружения и Ньютона. Описанный метод и созданное программное обеспечение позволяют проводить широкий вычислительный эксперимент для пластин различной формы и различных видов краевых условий, что весьма важно при проектировании конструкций. Хорошее согласование между полученными результатами и имеющимися в литературе данными показывает эффективность предложенного метода.

### Библиографические ссылки

1. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек / В. В. Петров. – Саратов, 1975. – 119 с.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. –К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

3. **Awrejcewicz J.** Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, T. Shmatko // *Int. J. Composite Structures*, 2015. – Vol. 125. – P. 575–585.
4. **Kurpa L. V.** Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with a Symmetric Structure and Complicated Form of the Plan / L. V. Kurpa // *J. Mathem. Sciences.* – 2009. – 162(1). – P. 85–98.
5. **Kurpa L. V.** The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // *Int. J. Applied Mech.* – 2010. – No 6. – P. 660–668.
6. **Praveen G. N.** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates/ G. N. Praveen, J. N. Reddy.// *Int. J. Solid and Structures.* – 1998. – No 35. – P. 4457–4476.
7. **Reddy JN.** Analysis of functionally graded material / JN. Reddy // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2000. – No 47. – P. 663–684.
8. **Shen H.-S.** Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments/ H.-S. Shen // *Int. J. Mech. Sci.* – 2002. – No 44. – P. 561–584.
9. **Shen H.-S.** Functionally Graded Materials / H.-S. Shen // *Nonlinear Analysis of Plates and Shells.* – CRC Press, Florida, 2009. – 268 p.
10. **Shen H.-S.** Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations/ H.-S. Shen, Z.-X. Wang // *Compos. Struct.* – 2010. – No92. – P. 2517–2524.
11. **Touloukian Y. S.** Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. / Y. S. Touloukian. – MacMilan, New York, 1967.
12. **Woo J.** Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / J. Woo, S. A. Meguid, // *Int. J. Solid and Structures.* – 2001. – No 38. – P. 7409–7421.
13. **Yang J.** Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads / J. Yang, H.-S. Shen // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2003. – No 38. – P. 467–482.
14. **Zhang Da-Guang.** Nonlinear bending analysis of FGM elliptical plates resting on two-parameter elastic foundations / Da-Guang Zhang. // *Applied Mathematical Modelling.* – 2013. – No 37. – P. 8292–8309.

*Надійшла до редколегії 14.05.2017*

**УДК 539.3**

## **ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ ЗГИН ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИН НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ**

**Л. В. Курпа**, д-р техн. наук, **К. І. Любицька**, канд. техн. наук,  
**І. О. Морачковська**, канд. техн. наук

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,  
Харків, Україна*

Запропоновано метод розв'язання нелінійних задач згину функціонально-градієнтних пластин на пружній основі типу Вінклера – Пастернака. Математична постановка виконана в рамках класичної теорії пластин типу Кармана. Для лінеаризації використані метод послідовних навантажень і метод Ньютона. Розв'язання послідовності лінеаризованих задач виконується за допомогою методу R-функцій, що дало змогу дослідити напружено-деформівний стан пластин складної форми. Тестування підтвердило достовірність та ефективність розробленого підходу.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні пластини, пружня основа, теорія R-функцій, нелінійність.

UDC 539.3

## GEOMETRICALLY NONLINEAR BENDING OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES ON ELASTIC FOUNDATION

L. V. Kurpa, Dr. Sci. (Tech.), K. I. Lyubitska, PhD (Tech.),  
I. O. Morachkovska, PhD (Tech.)

*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
Kharkiv, Ukraine*

The method of solving nonlinear bending problem for plates under lateral loading and resting on elastic foundation of the Winkler-Pasternak's type is proposed. Mathematical statement is based on classical plate theory in Von Karman sense. The increment loading method, Newton-Raphson iteration scheme and Ritz's method in conjunction with the R-functions theory are employed in the present analysis. It made possible to investigate a stress-strain state of complex form plates. Investigation of rectangular plate with elliptical free and simply supported cuts is fulfilled. A comparison of the obtained results with available is carried out, what confirms the validation of the proposed method.

**Keywords:** functionally graded plates, elastic foundation, R-functions theory, nonlinear bending.

Nonlinear bending of functionally graded plates subjected to transverse load and resting on two-parameter elastic foundations (Winkler – Pasternak's type) is investigated. Mathematical statement of the problem is based on classical plate theory taking into account geometrical nonlinearity in the Von Karman sense and plate-foundation interaction. Material properties are assumed to be temperature dependent and varied in the thickness direction according to Voigt's law.

The developed approach is based on combined the Ritz variational method, the R-functions theory, methods of step-by-step loading (or the incremental loading method) and the Newton – Raphson method.

Application of the R-functions theory allows to study geometrically nonlinear bending of FGM plates with complex shapes and different boundary conditions. A comparison of the presented results with available findings is carried out for rectangular plates with two types of boundary fixing.

Good agreement between our results and the available data shows effectiveness of the proposed method. The load-deflection dependences for rectangular plates with elliptical cutouts and different boundary conditions are obtained. From computation results it follows that the foundation modulus and type of the plate's fixing show essential influence on the plate behavior. Application of the proposed method matched with the variation of geometric and physical characteristics allows for choosing the optimal parameters of structural elements and for controlling their strength.

### References

1. **Petrov V. V.** Method of incremental loading in the theory of plates and shells / V. V. Petrov. – Saratov, 1975. – 119 p. (in Russian).
2. **Rvachev V.L.** Theory of R-functions and some of its applications / V. L. Rvachev. – Kyiv: Naukova Dumka, 1982. – 552 p. (in Russian).
3. **Awrejcewicz J.** Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory/ J. Awrejcewicz, L. Kurpa, T. Shmatko // Int. J. Composite Structures, 2015. – Vol. 125. – P. 575–585.

4. **Kurpa L. V.** Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with a Symmetric Structure and Complicated Form of the Plan / L. V. Kurpa // *J. Mathem.Sciences.* – 2009. – 162(1). – P. 85–98.
5. **Kurpa L. V.** The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // *Int. J.Applied Mech.* – 2010. – No 6. – P. 660–668.
6. **Praveen GN.** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates/ GN.Praveen, JN. Reddy.// *Int. J. Solid and Structures.* – 1998. – No 35. – P. 4457–4476.
7. **Reddy JN.** Analysis of functionally graded material / JN.Reddy // *Int. J. Numer Meth. Eng.* – 2000. – No 47. – P. 663–684.
8. **Shen H.-S.** Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments/ H.-S. Shen // *Int. J. Mech. Sci.* – 2002. – No 44. – P. 561–584.
9. **Shen H.-S.** *Functionally Graded Materials* / H.-S. Shen // *Nonlinear Analysis of Plates and Shells.* – CRC Press, Florida, 2009. – 268 p.
10. **Shen H.-S.** Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations / H.-S. Shen, Z.-X. Wang // *Compos. Struct.* – 2010. – No 92. – P. 2517–2524.
11. **Touloukian Y. S.** *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials.* / Y. S. Touloukian. – MacMilan, New York, 1967.
12. **Woo J.** Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / Woo J., S. A. Meguid, // *Int.J.Solid and Structures.* – 2001. – No 38. – P. 7409–7421.
13. **Yang J.** Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads / J. Yang, H.-S. Shen // *Int.J.Nonlinear Mech.* – 2003. – No 38. – P. 467–482.
14. **Zhang Da-Guang.** Nonlinear bending analysis of FGM elliptical plates resting on two-parameter elastic foundations / Da-Guang Zhang // *Applied Mathematical Modelling.* – 2013. – No 37. – P. 8292–8309.