

В задаче рассматривались случаи, когда реализуется безотрывное обтекание тела. Однако, как видно из рис. 4, 5, при наличии только одного скоростного фактора  $U$  или  $\omega$  (а также при их совместном воздействии) на части поверхности тела значение потенциала  $\varphi > 0$ , что свидетельствует о том, что на этих участках поверхности должен возникнуть отрыв. В случае возникновения отрыва задача об ударе должна рассматриваться в другой постановке с учетом наличия точки отрыва в самой постановке.

### Библіографічні посилання

1. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи [Текст] / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. **Гоман, О. Г.** Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличии вращения [Текст] / О. Г. Гоман, В. А. Катан // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2013. – Вип. 17, т. 1. – С. 191–205.
3. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика в 2-х ч. Часть 1 [Текст] / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Гостехиздат, ч. 1. – 1948. – 536 с.
4. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
5. **Мусхелишвили, Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
6. **Седов, Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики [Текст] / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1966. – 448 с.

*Надійшла до редколегії 19.06.2018*

УДК 532.526 : 532.24

**С. В. Алексеенко**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА ONERA M6

A methodology and software-methodical support for describing the processes of flow over bodies by a viscous compressible flow in a three-dimensional formulation on the basis of Reynolds averaged Navier–Stokes equations using the Baldwin-Lomax turbulence model are developed. The discretization of the system of initial Navier–Stokes equations is performed using a finite-dimensional method for curvilinear coordinates. To calculate the convective terms, the Row scheme was used. To provide a second-order accuracy over space, extrapolation with the flow limiter, which is a function of the differences in the parameters at neighboring points proposed by Jameson, was used in the paper. The block-matrix system of algebraic equations was solved by the iterative Gauss-Seidel algorithm. In the calculations a computational grid of type "O" was used, constructed according to algebraic formulas with the use of local interpolation and the method of many surfaces. The outer boundary of the computational domain was the conjugation of a cylindrical and spherical surface. At the boundary of the calculated region coinciding with the wing surface, the conditions for adhesion, non-flow and absence of heat exchange were specified. On the outer boundary, when the boundary conditions were realized, the method of characteristics was used; to calculate the normal velocity component at the boundary, one-dimensional Euler equations in the characteristic form were used. The verification of

boundary, one-dimensional Euler equations in the characteristic form were used. The verification of the numerical algorithm is performed on the test example of the flow around the wing of the ONERA M6 corresponding to the transonic flow regime with the formation of a local shock wave on the upper part of the wing profile, by comparing the distribution of the pressure coefficient in the given sections with known experimental data. The obtained results can find application in the development of methods for modeling the processes of icing of aircraft in adverse weather conditions.

**Keywords:** numerical simulation, Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, Baldwin-Lomax turbulence model, ONERA M6 wing, icing of aircraft.

Разработана методика и программно-методическое обеспечение для описания процессов обтекания тел вязким сжимаемым потоком в трехмерной постановке на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с применением модели турбулентности Болдуина-Ломакса. Дискретизация системы исходных уравнений Навье–Стокса выполнена с помощью конечно-объемного метода для криволинейных координат. Для вычисления конвективных слагаемых использована схема Роу. Для обеспечения второго порядка точности по пространству в работе использовалась экстраполяция с ограничителем потоков, являющимся функцией разностей параметров в соседних точках, предложенным Jameson. Блочно-матричная система алгебраических уравнений решалась итерационным алгоритмом Гаусса-Зейделя. В расчетах использовалась расчетная сетка типа «О», построенная по алгебраическим формулам с применением локальной интерполяции и метода многих поверхностей. Внешняя граница расчетной области представляла собой сопряжение цилиндрической и сферической поверхностей. На границе расчетной области, совпадающей с поверхностью крыла, задавались условия прилипания, непротекания и отсутствия теплообмена. На внешней границе при реализации граничных условий использовался метод характеристик; для вычисления нормальной составляющей скорости на границе применялись одномерные уравнения Эйлера в характеристической форме. Верификация численного алгоритма выполнена на тестовом примере обтекания крыла ONERA M6, соответствующем трансзвуковому режиму обтекания с образованием местного скачка уплотнения на верхней части профиля крыла, путем сравнения распределения коэффициента давления в заданных сечениях с известными экспериментальными данными. Полученные результаты в дальнейшем могут найти применение при разработке методик моделирования процессов обледенения летательных аппаратов в неблагоприятных метеорологических условиях.

**Ключевые слова:** численное моделирование, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель турбулентности Болдуина-Ломакса, крыло ONERA M6, обледенение летательных аппаратов.

Розроблено методику та програмно-методичне забезпечення, що дозволяють описувати процеси обтікання тіл в'язким стисливим потоком у тривимірній постановці на основі усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса із застосуванням моделі турбулентності Болдуїна-Ломакса. Дискретизація системи вихідних рівнянь Нав'є–Стокса виконана за допомогою скінченно-об'ємного методу для криволінійних координат. Для обчислення конвективних складових використана схема Роу. Для забезпечення другого порядку точності за простором у роботі застосовано екстраполяцію з обмежувачем потоків, запропонований Jameson, який є функцією різниць параметрів в сусідніх точках. Блочно-матрична система алгебраїчних рівнянь розв'язана ітераційним алгоритмом Гауса-Зейделя. У розрахунках використано розрахункову сітку типу «О», яка була побудована за алгебраїчними формулами із застосуванням локальної інтерполяції та методу багатьох поверхонь. Зовнішня границя розрахункової області являє собою сполучення циліндричної та сферичної поверхонь. На границі розрахункової області, що збігається з поверхнею крила, задано умови прилипання, непротікання та відсутності теплообміну. На зовнішній границі при реалізації граничних умов використано метод характеристик; для обчислення нормальної складової швидкості на границі застосовані одновимірні рівняння Ейлера в характеристичній формі. Верифікацію чисельного алгоритму виконано на тестовому прикладі обтікання крила ONERA M6, що відповідає трансзвуковому режиму обтікання з утворенням місцевого стрибка ущільнення на верхній частині профілю крила, шляхом порівняння розподілу коефіцієнта тиску в заданих перетинах з відомими експериментальними даними. Отримані результати в подальшому можуть знайти застосування при розробці методик моделювання процесів обмерзання літальних апаратів у несприятливих метеорологічних умовах.

**Ключові слова:** чисельне моделювання, усереднене за Рейнольдсом рівняння Нав'є–Стокса, модель турбулентності Болдуїна-Ломакса, крило ONERA M6, зледеніння літальних апаратів.

**Введение.** Необходимость обеспечения безопасности полетов, в том числе в неблагоприятных метеоусловиях, обуславливает постоянный интерес к проблеме обледенения летательных аппаратов. В современных условиях методы численного моделирования оказываются достаточно эффективным инструментом при разработке новых и усовершенствовании существующих систем защиты от обледенения.

Процесс обледенения является одним из наиболее сложных приложений вычислительной аэродинамики и тепломассообмена. В настоящее время во многих странах разрабатываются методики и специализированные пакеты программ для моделирования процессов обледенения, наиболее известными из которых являются [3; 4; 6]. Эти инструменты используют различные модели механики сплошной среды, имеют различную точность и требуют различную мощность компьютеров. Лишь немногие из них рассматривают процесс обледенения как нестационарный, используют уравнения для многофазных сред при описании движения воздуха и переохлажденных капель воды. Также в существующих методиках при описании процессов теплообмена при нарастании льда, как правило, используют одномерные интегральные соотношения, что значительно сужает границы применимости такого подхода.

Целью настоящей работы является разработка и верификация методики и численного алгоритма описания процессов аэродинамики на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке, которая могла бы в дальнейшем найти применение при разработке методик моделирования процессов обледенения летательных аппаратов.

**Постановка задачи.** При расчете внешнего потока воздуха используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, которые можно записать в векторном виде [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \zeta} \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{q}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{E}_v, \mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$  – пятикомпонентные векторы, которые имеют вид:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}}{J}, \quad q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p)U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \beta_x + \xi_y \beta_y + \xi_z \beta_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e + p)V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \beta_x + \eta_y \beta_y + \eta_z \beta_z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e + p)W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \beta_x + \zeta_y \beta_y + \zeta_z \beta_z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad (6)$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \quad (7)$$

$$W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \quad (8)$$

$$\tau_{xx} = \frac{2\mu}{3} \left[ 2(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) - (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta + \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) \right], \quad (9)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2\mu}{3} \left[ 2(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) - (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta + \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) \right], \quad (10)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3} \left[ 2(\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) - (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta + \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) \right], \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[ (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \zeta_y u_\zeta) + (\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta + \zeta_x v_\zeta) \right], \quad (12)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \left[ (\xi_z v_\xi + \eta_z v_\eta + \zeta_z v_\zeta) + (\xi_y w_\xi + \eta_y w_\eta + \zeta_y w_\zeta) \right], \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[ (\xi_x w_\xi + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta) + (\xi_z u_\xi + \eta_z u_\eta + \zeta_z u_\zeta) \right], \quad (14)$$

$$\beta_x = u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{\mu_\ell}{Pr_\ell} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \left( \xi_x \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial a^2}{\partial \zeta} \right), \quad (15)$$

$$\beta_y = u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{\mu_\ell}{Pr_\ell} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \left( \xi_y \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial a^2}{\partial \zeta} \right), \quad (16)$$

$$\beta_z = u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{\mu_\ell}{Pr_\ell} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \left( \xi_z \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial a^2}{\partial \zeta} \right). \quad (17)$$

В уравнениях (1–17) приняты следующие обозначения:  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости в направлениях  $x, y, z$ ;  $\rho, p, e$  – плотность, давление и полная энергия единицы объема газа;  $a$  – скорость звука;  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей;  $\mu_\ell, \mu_t$  – динамические коэффициенты молекулярной и

турбулентной вязкости;  $\mu = \mu_\ell + \mu_t$  – динамический коэффициент «эффективной» вязкости;  $Re$  – число Рейнольдса;  $Pr_\ell = 0.72$ ,  $Pr_t = 0.9$  – числа Прандтля для ламинарного и турбулентного режимов течения, соответственно.

Система уравнений (1) дополняется уравнением состояния:

$$e = \frac{P}{\gamma - 1} - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2), \quad (18)$$

где метрические коэффициенты и якобиан преобразования координат определяются из соотношений:

$$\xi_x = J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \quad \xi_y = -J(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta), \quad \xi_z = J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \quad (19)$$

$$\eta_x = -J(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi), \quad \eta_y = J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi), \quad \eta_z = -J(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \quad (20)$$

$$\zeta_x = J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \quad \zeta_y = -J(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi), \quad \zeta_z = J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (21)$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}. \quad (22)$$

При моделировании турбулентности использовалась алгебраическая модель турбулентности Болдуина-Ломакса. Модель является одной из наиболее популярных алгебраических моделей турбулентности, хорошо себя зарекомендовала при решении задач обтекания аэродинамических профилей, требует небольших затрат машинного времени и памяти, менее требовательна к величине минимального шага расчетной сетки у стенки.

**Расчетная сетка.** В работе, при расчете обтекания крыла ONERA M6, используется расчетная сетка типа «О», при этом внешняя граница расчетной области представляет собой сопряжение цилиндрической и сферической поверхностей (рис. 1). Сетка получена с использованием алгебраического метода как наиболее простого и быстрого, при этом имеющего прямую возможность регулировать расстановку узлов.

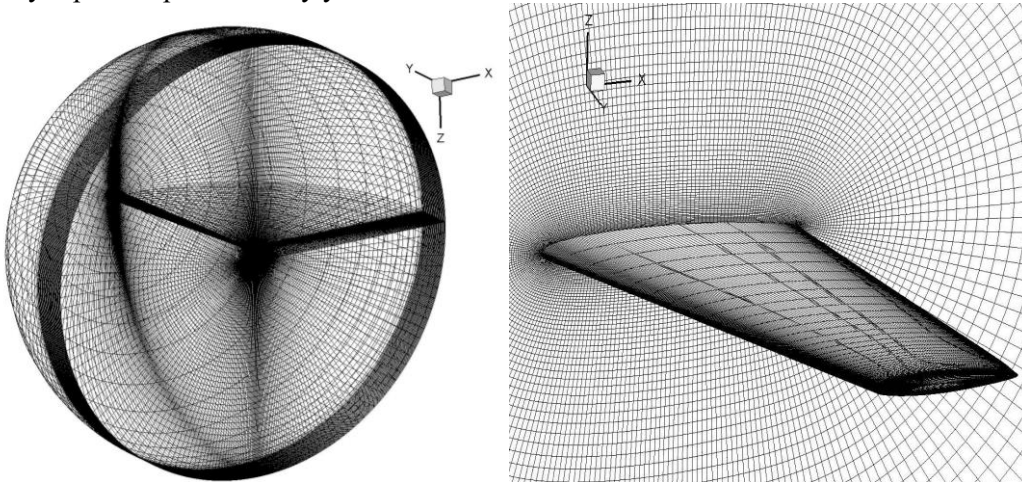


Рис. 1. Расчетная сетка, используемая при расчете обтекания крыла ONERA M6

Вероятное появление изломов координатных линий внутри области из-за изломов граничных линий, вследствие отсутствия в формулах «внутреннего механизма сглаживания», устраняется путем применения локальной интерполяции в методе многих поверхностей: вводятся две промежуточные поверхности, по одной вблизи каждой из границ; точки на этих поверхностях выбираются таким образом, чтобы линии сетки пересекали границы под прямым углом [5].

**Граничные условия.** На границе расчетной области, совпадающей с поверхностью крыла задавались условия прилипания, непротекания ( $V = 0$ ) и отсутствия теплообмена ( $\partial T / \partial n = 0$ ).

На внешней границе при реализации граничных условий использовался метод характеристик. Для вычисления нормальной составляющей скорости на границе применялись одномерные уравнения Эйлера в характеристической форме, согласно которым инварианты Римана [1]:

$$R_{\infty} = q_{\infty} n - 2 \frac{a_{\infty}}{\gamma - 1} = q_b n - 2 \frac{a_b}{\gamma - 1}, \quad R_e = q_e n + 2 \frac{a_e}{\gamma - 1} = q_b n + 2 \frac{a_b}{\gamma - 1}, \quad (23)$$

на «входящей» ( $R_{\infty}$ ) и «выходящей» ( $R_e$ ) характеристиках можно вычислить по значениям параметров невозмущенного потока и с помощью экстраполяции по их внутренним значениям соответственно. Индексом  $b$  отмечены значения параметров на границе, индексом  $\infty$  – значения в невозмущенном потоке, а индексом  $e$  – значения, получаемые экстраполяцией.

Нормальная составляющая скорости и скорость звука на внешней границе вычислялись по формулам:

$$q_b n = \frac{1}{2}(R_e + R_{\infty}), \quad a_b = \frac{1}{4}(\gamma - 1)(R_e - R_{\infty}). \quad (24)$$

В качестве двух недостающих граничных условий использовались условия фиксации тангенциальной составляющей скорости и энтропии, значения которых полагались равными значениям параметров невозмущенного потока в случае входной границы и вычислялись с помощью экстраполяции по значениям параметров внутри рассматриваемой области в случае выходной границы.

На разрезе при реализации граничных условий использовался метод контрольных объемов.

**Численный алгоритм.** Дискретизация системы исходных уравнений Навье–Стокса выполнена с помощью конечно-объемного метода для криволинейных координат [1]:

$$\frac{3\Delta \mathbf{q}^n - \Delta \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{R}^{n+1} = 0, \quad (25)$$

где  $n$  – номер временного слоя;  $\Delta \mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n$ ;  $\Delta \mathbf{q}^{n-1} = \mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{n+1} = & \frac{\mathbf{E}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{\mathbf{G}_{k+1/2}^{n+1} - \mathbf{G}_{k-1/2}^{n+1}}{\Delta \zeta} - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\mathbf{E}_{v,i+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_{v,i-1/2}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\mathbf{F}_{v,j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{v,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{v,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta \zeta} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для вычисления конвективных слагаемых используется схема Роу [1], согласно которой потоки через грань ячейки  $i+1/2$  контрольного объема определяются:

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{E}(\mathbf{q}_R) - |\tilde{\mathbf{A}}| \cdot (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)], \quad (27)$$

где  $q_L, q_R$  – параметры потоков слева и справа от грани соответственно.

Для обеспечения второго порядка точности по пространству в настоящей работе использовалась следующая экстраполяция:

$$q_L = q_i + \psi(\Delta q_{i-1/2}, \Delta q_{i+3/2}), \quad (28)$$

$$q_R = q_{i+1} - \psi(\Delta q_{i-1/2}, \Delta q_{i+3/2}), \quad (29)$$

где  $\psi$  – ограничитель потоков, являющийся функцией разностей параметров в соседних точках, предложенный Jameson [1]:

$$\psi = \frac{(\Delta \mathbf{q}_{i-1/2} + \Delta \mathbf{q}_{i+3/2})}{4} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta \mathbf{q}_{i-1/2} - \Delta \mathbf{q}_{i+3/2}}{|\Delta \mathbf{q}_{i-1/2}| + |\Delta \mathbf{q}_{i+3/2}| + \varepsilon} \right)^2 \right], \quad \varepsilon = 10^{-3}. \quad (30)$$

В формуле для  $\mathbf{E}_{i+1/2}$   $\tilde{\mathbf{A}}$  – матрица Якоби конвективных потоков, вычисленных по параметрам осредненным по Роу. Матрицы Якоби  $A, B$  и  $C$  имеют вещественные собственные числа и могут быть представлены как:

$$A = T_\xi \Lambda_\xi T_\xi^{-1}, \quad B = T_\eta \Lambda_\eta T_\eta^{-1}, \quad C = T_\zeta \Lambda_\zeta T_\zeta^{-1}, \quad (31)$$

где  $T_\xi, T_\eta, T_\zeta, T_\xi^{-1}, T_\eta^{-1}, T_\zeta^{-1}$  – матрицы левых и правых собственных векторов, соответственно;  $\Lambda_\xi, \Lambda_\eta, \Lambda_\zeta$  – диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц  $A, B$  и  $C$ .

Для вычисления матриц  $A, B$  и  $C$  на гранях контрольных объемов согласно Роу производится осреднение переменных по следующим соотношениям [1]:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \tilde{u} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{v} = \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (32)$$

$$\tilde{w} = \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{h} = \frac{h_L \sqrt{\rho_L} + h_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{a}^2 = (\gamma - 1) \left[ \tilde{h} - (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2)/2 \right]. \quad (33)$$

Здесь  $h = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$  – энтальпия.

Вязкие слагаемые в уравнениях (1), аппроксимировались по трехточечному шаблону со вторым порядком точности.

При построении неявного алгоритма дискретный аналог исходных уравнений Навье–Стокса записывается относительно искомого приращения переменных  $\Delta \mathbf{q}^n$  на новом временном слое  $n+1$

$$\Delta \mathbf{q}^n + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{R}^{n+1} = \frac{1}{3} \Delta \mathbf{q}^{n-1}. \quad (34)$$

Вектор невязки  $\mathbf{R}^{n+1}$  линеаризується відносно часового шару  $n$  з допомогою рядів Тейлора до другого порядку точності  $O(\Delta \mathbf{q}^n)^2$ :

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n + \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right)^n \Delta \mathbf{q}^n. \quad (35)$$

Після підстановки співвідношень в ліву частину рівнянь з'являється неявний оператор:

$$\left( \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right)^n \Delta \mathbf{q}^n = \frac{1}{3} \Delta \mathbf{q}^{n-1} - \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{R}^n, \quad (36)$$

де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця. Блочно-матрична система алгебраїчних рівнянь розв'язувалася ітерационним алгоритмом Гаусса-Зейделя.

**Результати розрахунків.** Верифікація методики була виконана на відомому тестовому прикладі обтікання крила *ONERA M6* під кутом атаки  $\alpha = 3.06^\circ$  з параметрами потоку:  $M_\infty = 0.84$ ,  $Re = 11.72 \times 10^6$ , відповідними тестовому випадку 2308 [7]. Випадок відповідає трансзвуковому режиму обтікання, на верхній частині профілю крила утворюється місцевий скачок ущільнення (в корневому перерізі), що переходить в пару послідовних скачків в середній частині крила і об'єднуються в один – в дальній частині крила, утворюючи  $\lambda$ -подібний малюнок на картині розподілу коефіцієнта тиску по верхній поверхні крила (рис. 2, а). На рис. 2, б представлено розподіл ліній потоку в околицях верхньої частини обтіканого профілю, спостерігається згин потоку в області передньої кромки крила, потім викривлення ліній потоку в протилежну сторону вздовж поверхні крила і вирівнювання потоку за задньої кромки крила; також виникає «закрутка» потоку в області закінчення крила внаслідок різниці тисків на нижній і верхній поверхнях крила.

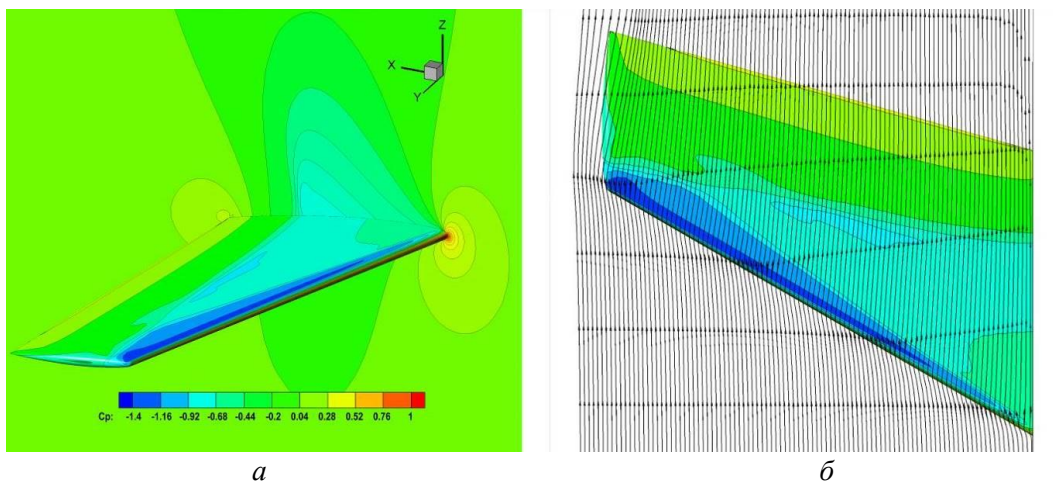
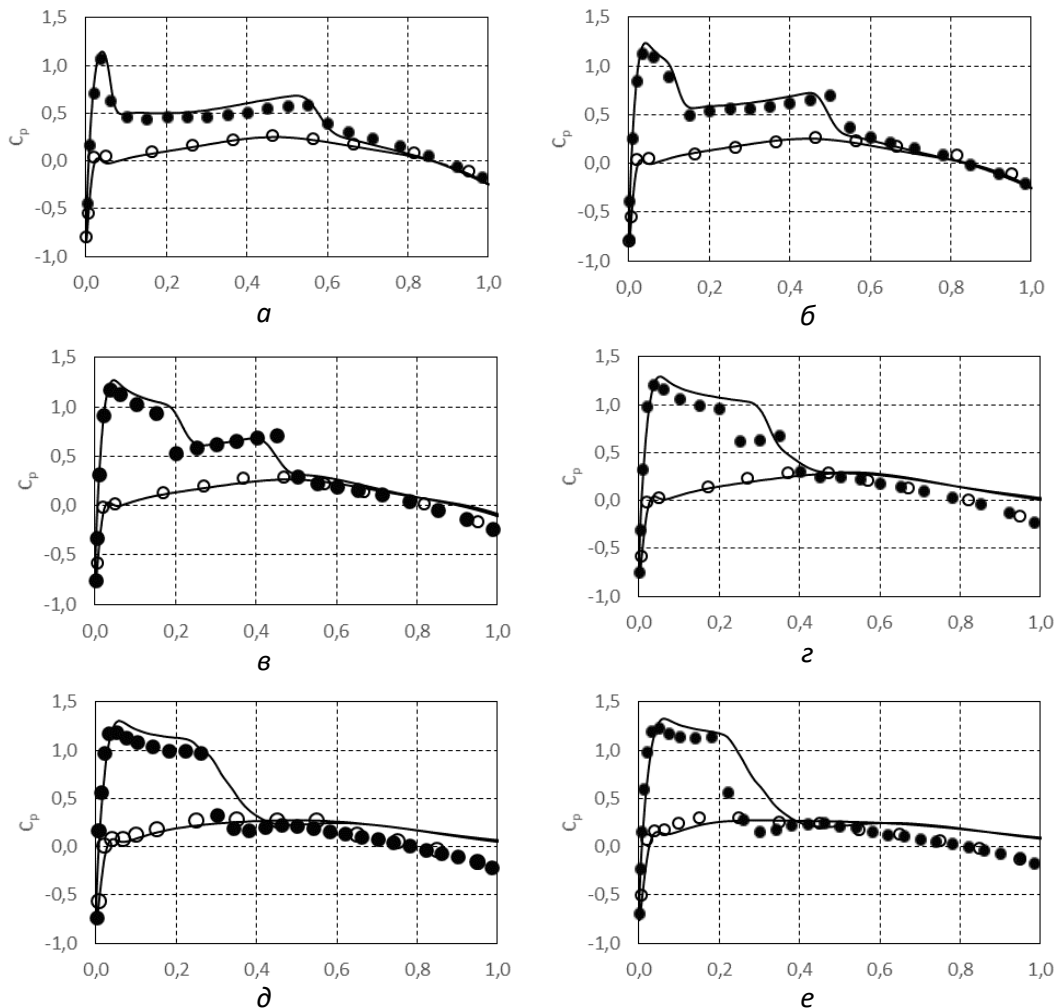


Рис. 2. Основні розподілені характеристики обтікання крила *ONERA M6*, отримані на поверхні крила і в перерізі  $y/b = 0$  при заданих значеннях розрахункових параметрів  $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.06^\circ$ ,  $Re = 11.72 \times 10^6$ :

а – розподіл коефіцієнта тиску; б – розподіл ліній потоку



Распределение коэффициента давления в различных сечениях с относительной координатой  $y/b$  вдоль размаха крыла *ONERA M6* приведено на рис. 3, где  $b$  – длина полуразмаха крыла. В целом наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных, однако в сечениях на удалении свыше  $y/b = 0,44$  по размаху наблюдаются более пологие кривые в области скачков уплотнения (особенно в сечении  $y/b = 0,48$ ), что может быть обусловлено недостаточной степенью сгущения расчетной сетки в этих областях, а также недостатками используемой алгебраической модели турбулентности.



**Рис. 3. Распределение коэффициента давления в сечениях  $y/b$  вдоль размаха крыла *ONERA M6* при заданных значениях расчетных параметров  $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.06^\circ$ ,  $Re = 11.72 \times 10^6$ :**  
 а – сечение  $y/b = 0,2$ ; б – сечение  $y/b = 0,44$ ; в – сечение  $y/b = 0,65$ ;  
 г – сечение  $y/b = 0,8$ ; д – сечение  $y/b = 0,9$ ; е – сечение  $y/b = 0,96$ ;  
 — — расчетные данные, ● — экспериментальные данные (верхняя часть крыла),  
 ○ — экспериментальные данные (нижняя часть крыла) [7]

**Выводы.** Разработана и верифицирована методика и численный алгоритм описания процессов аэродинамики на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке. Полученные результаты в дальнейшем могут найти применение при разработке методик моделирования процессов обледенения летательных аппаратов в неблагоприятных метеоусловиях.

### Библиографические ссылки

1. **Приходько, А.А.** Компьютерные технологии в аэродинамике и тепломассообмене [Текст] / А.А. Приходько. – Киев: Наукова думка, 2003. – 380 с.
2. **Седов, Л.И.** Механика сплошной среды. В 2-х томах.[Text] / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.; Т. 2. – 560 с.
3. **Fortin, G.** A new roughness computation method and geometric accretion model for airfoil icing [Text] / G.Fortin, A.Ilinca, V.Brandi // J. Aircraft. – 2004. – Vol. 41. – No. 1. – P. 119 – 127.
4. **Guffond, D.** Overview of Icing Research at ONERA, Advisory Group for Aerospace Research and Development [Text] / D.Guffond, T. Hedde, R. Henry // Fluid Dynamics Panel (AGARD/FDP) Joint International Conference on Aircraft Flight Safety. – Actual Problems of Aircraft Development, Zhukovsky, Russia. – 1993. – 7 p.
5. **Ives, D.C.** Conformal Grid Generation. [Text] / D.C. Ives. – New York: North-Holland Publishing Co. – 1981.
6. **Wright, W.B.** Users Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6 [Text] / W.B. Wright. – National Aeronautical and Space Administration (NASA), Contractor Report. – May, 1995. – 95 p.
7. Experimental data base for computer program assessment: Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04 [Text] / AGARD-AR-138, Technical Report. – May ,1979. – 624 p.

*Надійшла до редколегії 26.04.2018*

УДК 539.3

**O.S. Filipova**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## ON THE PROBLEM OF AN EXTERNAL INTERFACE CRACK IN A PIEZOMAGNETIC BIMATERIAL

In this paper, some aspects of external interphase cracks deformation in piezomagnetic materials are investigated. Nowadays functional elements based on the use of piezomagnets have important practical applications in various fields of engineering, automation and computer technology. Under deformation, these materials produce a magnetic field that is proportional to the deformation. Moreover, when such materials are placed under a magnetic field, they start to show deformation. In other words, piezoelectric and piezomagnetic materials are widely used. The latter have many similar properties with piezoelectric materials. During manufacturing and operation, cracks occur at the interface between different components. Hence, external interfacial cracks are particularly dangerous. Currently, there has been very little research done for the interface cracks between heterogeneous components in piezomagnetic materials. In this paper, we investigate how a mechanical load applied to the external interface crack affects a piezomagnetic bimaterial. Expressions for stress-strain states are obtained by means of piecewise holomorphic vector functions which are convenient for formulating linear conjugation problems for external interface cracks in such piezomagnetic materials. In this paper, we consider the case of the oscillation model, which leads to a physically impossible