

Выводы. Разработана и верифицирована методика и численный алгоритм описания процессов аэродинамики на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке. Полученные результаты в дальнейшем могут найти применение при разработке методик моделирования процессов обледенения летательных аппаратов в неблагоприятных метеоусловиях.

Библиографические ссылки

1. **Приходько, А.А.** Компьютерные технологии в аэродинамике и тепломассообмене [Текст] / А.А. Приходько. – Киев: Наукова думка, 2003. – 380 с.
2. **Седов, Л.И.** Механика сплошной среды. В 2-х томах.[Text] / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.; Т. 2. – 560 с.
3. **Fortin, G.** A new roughness computation method and geometric accretion model for airfoil icing [Text] / G.Fortin, A.Ilinca, V.Brandi // J. Aircraft. – 2004. – Vol. 41. – No. 1. – P. 119 – 127.
4. **Guffond, D.** Overview of Icing Research at ONERA, Advisory Group for Aerospace Research and Development [Text] / D.Guffond, T. Hedde, R. Henry // Fluid Dynamics Panel (AGARD/FDP) Joint International Conference on Aircraft Flight Safety. – Actual Problems of Aircraft Development, Zhukovsky, Russia. – 1993. – 7 p.
5. **Ives, D.C.** Conformal Grid Generation. [Text] / D.C. Ives. – New York: North-Holland Publishing Co. – 1981.
6. **Wright, W.B.** Users Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6 [Text] / W.B. Wright. – National Aeronautical and Space Administration (NASA), Contractor Report. – May, 1995. – 95 p.
7. Experimental data base for computer program assessment: Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04 [Text] / AGARD-AR-138, Technical Report. – May, 1979. – 624 p.

Надійшла до редколегії 26.04.2018

УДК 539.3

O.S. Filipova

Oles Honchar Dnipro National University

ON THE PROBLEM OF AN EXTERNAL INTERFACE CRACK IN A PIEZOMAGNETIC BIMATERIAL

In this paper, some aspects of external interphase cracks deformation in piezomagnetic materials are investigated. Nowadays functional elements based on the use of piezomagnets have important practical applications in various fields of engineering, automation and computer technology. Under deformation, these materials produce a magnetic field that is proportional to the deformation. Moreover, when such materials are placed under a magnetic field, they start to show deformation. In other words, piezoelectric and piezomagnetic materials are widely used. The latter have many similar properties with piezoelectric materials. During manufacturing and operation, cracks occur at the interface between different components. Hence, external interfacial cracks are particularly dangerous. Currently, there has been very little research done for the interface cracks between heterogeneous components in piezomagnetic materials. In this paper, we investigate how a mechanical load applied to the external interface crack affects a piezomagnetic bimaterial. Expressions for stress-strain states are obtained by means of piecewise holomorphic vector functions which are convenient for formulating linear conjugation problems for external interface cracks in such piezomagnetic materials. In this paper, we consider the case of the oscillation model, which leads to a physically impossible

interpenetration of the crack edges in the vicinity of its tips. Effects of mechanical loading on the main magneto-mechanical characteristics in the vicinity of the outer interfacial crack tip are also demonstrated. In particular, the obtained results clearly demonstrate that mechanical stress causes a sufficiently significant magnetic induction. Furthermore, both stress and magnetic induction have an oscillating behavior in the vicinity of the crack tip.

Key words: fracture mechanics, interface crack, external crack, piezomagnetic materials.

У роботі розглянуто особливості деформування зовнішніх міжфазних тріщин в п'єзомагнітних матеріалах. Відзначено, що у наш час в різних областях машинобудування, автоматики та обчислювальної техніки важливе прикладне значення мають функціональні елементи, які ґрунтуються на використанні п'єзомагнетиків; такі матеріали характеризуються тим, що при їх деформуванні виникає магнітне поле, яке пропорціонально деформації. Наголошено, що також виникає і протилежна ситуація: виникнення деформації під дією магнітного поля; інакше кажучи, п'єзоелектричні та п'єзомагнітні матеріали є широко розповсюдженими. Останні мають багато спільних рис з п'єзоелектричними: при їх виготовленні та подальшій експлуатації виникають тріщини в області поділу різних компонент. Таким чином зроблено висновок, що, зовнішні міжфазні тріщини є особливо небезпечними, але на даний час для п'єзомагнітних матеріалів дослідження тріщин між різнорідними складовими практично відсутні. В даній роботі розглянуто випадок механічного навантаження на зовнішню міжфазну тріщину в п'єзомагнітному біматеріалі. Знайдено вирази для компонент напружено-деформованого стану через кусково-голоморфні вектор-функції, які є зручними для формулювання задач лінійного сопряження для зовнішніх міжфазних тріщин в таких п'єзомагнітних матеріалах. В роботі досліджено випадок осциляційної моделі, в припущенні, що тріщина повністю відкрита. Відзначено, що така модель є класичною та приводить до фізично нереального взаємопроникнення берегів тріщини в околі її вершин. Також проілюстровано ефекти щодо впливу механічного навантаження на основні магніто-механічні характеристики в околі міжфазної тріщини. З одержаних результатів висвітлено, що механічне напруження спричиняє досить значну магнітну індукцію; крім того, як напруження, так і магнітна індукція мають осцилюючу особливість біля вершин тріщини.

Ключові слова: механіка руйнування, міжфазна тріщина, зовнішня тріщина, п'єзомагнітні матеріали.

В работе рассмотрены особенности деформирования внешних межфазных трещин в пьезомагнитных материалах. Отмечено, что в наше время в разных областях машиностроения, автоматики и вычислительной техники важное прикладное значение имеют функциональные элементы основанные на использовании пьезомагнетиков; такие материалы характеризуются тем, что при их деформации возникает магнитное поле, которое пропорционально деформации. Выявлено, что также имеет место и противоположная ситуация: возникновение деформации под действием магнитного поля; другими словами, пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы широко распространены. Последние имеют много сходных свойств с пьезоэлектрическими: при их изготовлении и дальнейшей эксплуатации возникают трещины в области разделения разных компонент. Таким образом, сделан вывод, что внешние межфазные трещины являются особенно опасными, но на данный момент для пьезомагнитных материалов исследования трещин между разнородными составляющими практически отсутствуют. В данной работе рассмотрен случай механической нагрузки на внешнюю межфазную трещину в пьезомагнитном биматериале. Найдены выражения для компонент напряжено-деформированного состояния через кусочно-голоморфные вектор-функции, которые удобны для формулирования задач линейного сопряжения для внешних межфазных трещин в таких пьезомагнитных материалах. В работе исследован случай осциляционной модели, предполагая трещину полностью открытой. Отмечено, что данная модель является классической и приводит к физически нереальному взаимопроникновению берегов трещины в окрестности ее вершин. Также проиллюстрированы эффекты, которые обусловлены механическим нагружением на основные магнито-механические характеристики в окрестности вершины внешней межфазной трещины. На полученных результатах показано, что механическое напряжение вызывает достаточно значимую магнитную индукцию; кроме того, как напряжение, так и магнитная индукция имеют осциллирующую особенность в области вершины трещины.

Ключевые слова: механика разрушения, межфазная трещина, внешняя трещина, пьезомагнитные материалы.

Introduction. Functional elements based on the use of piezomagnetic materials have important applications in various fields of machine building, automation, and computing. Piezo-magnetics are materials that are characterized by the fact that when they are deformed, a magnetic field appears. It is proportional to the deformation [1]. The opposite also stands, under the influence of the magnetic field such materials exhibit deformations.

Piezoelectric and piezoelectric materials have many similarities. During the manufacture and operation cracks develop at the interface of various components. External interfacial cracks are dangerous in particular. This type of cracks for piezoelectric materials have been studied in details in [3, 5]. However, there were almost no studies done of cracks between heterogeneous piezomagnetic components. In this paper, external interface cracks between two piezomagnetic materials is investigated.

Basic equations for a piezomagnetic material. In the absence of mass forces, the constitutive equations for linear piezomagnetic materials, based on [2], can be represented as:

$$\Pi_{iJ} = E_{iJKL}, \Pi_{iJ,i} = 0, \quad (1)$$

where
$$V_k = \begin{cases} u_k, K = 1, 2, 3 \\ \omega, K = 4 \end{cases}, \quad (2)$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, i, J = 1, 2, 3 \\ B_i, i = 1, 2, 3; J = 4 \end{cases}, \quad (3)$$

$$H_{iJKL} = \begin{cases} C_{ijkl}, J, K = 1, 2, 3 \\ h_{lij}, J = 1, 2, 3; K = 4 \\ h_{ikl}, K = 1, 2, 3; J = 4 \\ -\gamma_{il}, J = K = 4 \end{cases}. \quad (4)$$

In equations (2) – (3) u_k , ω , σ_{ij} , B_i are elastic displacement, magnetic potential, stress and magnetic displacement, respectively. In equations (4) C_{ijkl} , h_{lij} , γ_{ij} are elastic modules, piezomagnetic constants and magnetic permeability, respectively.

In the equations above, small indexes vary between 1 and 3, and capital indexes vary between 1 and 4. Moreover, there is a summing up of repeating indices.

We assume that all components are not dependent on the coordinate x_2 . In this case the solution of equations (1), according to the method proposed in [4], is

$$V = af(z), \quad (5)$$

where $z = x_1 + px_3$, $V = [u_1, u_2, u_3, \omega]^T$, f is an arbitrary four-component vector-function.

Vector $a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ can be derived from:

$$\left[M + p \left(R + R^T \right) + p^2 T \right] a = 0. \quad (6)$$

Matrix elements M , R , T which has 4×4 dimensions are defined as:

$$M_{JK} = H_{1JK1}, R_{JK} = H_{1JK3}, T_{JK} = H_{3JK3}. \quad (7)$$

The non-trivial solution of the system of equations (6) exists if p is a root of the equation:

$$\det \left[\mathbf{M} + p \left(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T \right) + p^2 \mathbf{T} \right] = 0. \quad (8)$$

Since equation (8) has imaginary roots [1], the roots of equation (8) with positive imaginary parts are denoted as p_α , and eigen-vectors of the system are denoted as \mathbf{a}_α and $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

The most general solution of equations (1) can be represented as [1]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (9)$$

where $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ is a matrix which columns are the eigenvectors of the system (6), $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T$ is an arbitrary vector-function of a complex variable $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$.

By introducing the vector:

$$\mathbf{t} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, B_3]^T \quad (10)$$

and using the first relation (1), this vector can be written as:

$$\mathbf{t} = \mathbf{K} \mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (11)$$

where

$$K_{KL} = (H_{3KJ1} + p_L H_{3KJ3}) A_{JL}, \quad (12)$$

and

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^T. \quad (13)$$

We now consider the bi-material space consisting of two different anisotropic piezomagnetic half-spaces $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, with properties defined by matrices $H_{iJKL}^{(1)}$ i $H_{iJKL}^{(2)}$ respectively. We consider the vector \mathbf{t} to be continuous along the entire interface, and part $\tilde{L} = \{(-\infty; c_1) \cup (b_1; c_2) \cup \dots (b_n; \infty)\}$ of the interface $-\infty < x_1 < \infty$, $x_3 = 0$ is in an ideal magnetic-mechanical contact, i.e.,:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ for } x_1 \in (-\infty; \infty), \quad (14)$$

$$V^{(1)}(x_1, 0) = V^{(2)}(x_1, 0) \text{ for } x_1 \in \tilde{L}. \quad (15)$$

According to equations (9) and (11) the solution of equations (1) can be written in the form:

$$\mathbf{V}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \overline{\mathbf{A}}^{(j)} \overline{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (16)$$

$$\mathbf{t}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{K}^{(j)} \mathbf{f}'^{(j)}(z) + \overline{\mathbf{K}}^{(j)} \overline{\mathbf{f}}'^{(j)}(\bar{z}), \quad (17)$$

where $j=1$ for $x_3 > 0$ and $j=2$ for $x_3 < 0$; vector-function $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ and $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ are analytical at the upper ($x_3 > 0$) and lower ($x_3 < 0$) half-planes, respectively.

Equation (17) and boundary condition (14) yields:

$$\mathbf{K}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \overline{\mathbf{K}}^{(2)} \overline{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \overline{\mathbf{K}}^{(1)} \overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1), \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (18)$$

The left part of equation (18) is the boundary value of the analytic function in the region $x_3 > 0$, and the right part of equation (18) is also the boundary value of the analytic function in the region $x_3 < 0$.

Equation (18) shows that both functions can be analytically extended to the entire plane. Therefore they are equal to some function $M(z)$ that is analytic in the whole plane.

By taking into account that the stresses are limited at the infinity, equation (17) results:

$$M(z)|_{z \rightarrow \infty} = M^{(0)} = const,$$

where $M^{(0)}$ is an arbitrary constant vector.

The relation $M(z) = M^{(0)}$ is valid for the entire plane. Hence (18) yields:

$$\begin{aligned} K^{(1)} f'^{(1)}(z) - \bar{K}^{(2)} \bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) &= M^{(0)}, \quad x_3 > 0, \\ K^{(2)} f'^{(2)}(z) - \bar{K}^{(1)} \bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) &= M^{(0)}, \quad x_3 < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

The matrices in equation (19) are not singular. By taking into account that the eigenvalue is found, we conclude that:

$$\begin{aligned} \bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{K}^{(2)})^{-1} K^{(1)} f'^{(1)}(z) - (\bar{K}^{(2)})^{-1} M^{(0)}, \quad x_3 > 0, \\ \bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{K}^{(1)})^{-1} K^{(2)} f'^{(2)}(z) - (\bar{K}^{(1)})^{-1} M^{(0)}, \quad x_3 < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Since $f'^{(1)}(z)$ i $f'^{(2)}(z)$ are arbitrary functions, by equating $M^{(0)} = 0$, equation (20) transforms into:

$$\bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) = (\bar{K}^{(2)})^{-1} K^{(1)} f'^{(1)}(z), \quad x_3 > 0, \quad \bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) = (\bar{K}^{(1)})^{-1} K^{(2)} f'^{(2)}(z), \quad x_3 < 0. \quad (21)$$

By introducing the following vector:

$$[V'(x_1)] = V'^{(1)}(x_1, 0) - V'^{(2)}(x_1, 0) \quad (22)$$

and based on equations (16) and (21), we can derive the following:

$$[V'(x_1)] = B f'^{(1)}(x_1) - \bar{B} \bar{f}'^{(1)}(x_1), \quad (23)$$

where $B = A^{(1)} - \bar{A}^{(2)} (\bar{K}^{(2)})^{-1} K^{(1)}$.

Hence based on relation (17), vector $t^{(1)}$ at the interface can be written as:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = K^{(1)} f'^{(1)}(x_1) + \bar{K}^{(1)} \bar{f}'^{(1)}(x_1). \quad (24)$$

Let's introduce a vector -function $W(z)$ as:

$$W(z) = \begin{cases} BN(z), & x_3 > 0, \\ -\bar{B}\bar{N}(z), & x_3 < 0, \end{cases} \quad (25)$$

where $N(z) = [f_1'^{(1)}(z), f_2'^{(1)}(z), f_3'^{(1)}(z), f_4'^{(1)}(z)]^T$.

We obtain the following equations for the derivative of displacements jumps and for the stress vector:

$$[V'(x_1)] = W^+(x_1) - W^-(x_1), \quad (26)$$

$$t^{(1)}(x_1, 0) = G W^+(x_1) - \bar{G} W^-(x_1), \quad (27)$$

where $G = K^{(1)} B^{-1}$, $W^+(x_1) = W(x_1 + i0)$, $W^-(x_1) = W(x_1 - i0)$.

Equations (25), (26) and (15) yield that the vector-function $W(z)$ is analytic in each half-plane including the part of interface areas \tilde{L} .

We shall now consider transversally isotropic piezomagnetic materials with an isotropic plane orthogonal to the axis x_3 . In this case, for all fields that are independent of coordinate x_2 , the component V_2 of the vector -function V becomes independent of components (V_1, V_3, V_4) in the plane (x_1, x_3) . In order to obtain a solution for V_2 , a rather simple antiplane problem needs to be solved. Therefore, we will focus our attention on the solution for the components (V_1, V_3, V_4) .

Let's introduce the following notions:

$$\begin{aligned} H_{1111} = C_{11}, \quad H_{1133} = C_{13}, \quad H_{3333} = C_{33}, \quad H_{1313} = C_{44}, \quad H_{1143} = h_{31}, \\ H_{3343} = h_{33}, \quad H_{1341} = h_{15}, \quad H_{1441} = -\gamma_{11}, \quad H_{3443} = -\gamma_{33}. \end{aligned} \quad (28)$$

Matrix G has the following structure :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix},$$

moreover, as numerical analysis shows, all g_{ij} are real.

Problem statement and its solution. There are two heterogeneous piezoelectric half-planes $x_3 \geq 0$ and $x_3 \leq 0$ with characteristics $H_{ijkl}^{(1)}$ i $H_{ijkl}^{(2)}$ respectively, that are bonded at the section (c, a) of the interface of the materials. There are two external cracks $x_1 < c$ and $x_1 > a$ at the remaining part of the interface (fig. 1).

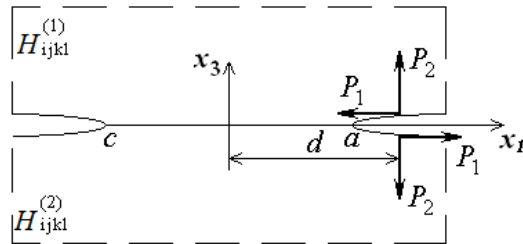


Fig. 1. Problem statement

Conditions at the interface are:

$$u_1^+ = u_1^-, \quad u_3^+ = u_3^-, \quad \sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-, \quad \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-, \quad \omega^+ = \omega^-, \quad B_3^+ = B_3^-, \quad x_1 \in (c, a), \quad (29)$$

$$\sigma_{13}^\pm = P_1 \delta(x_1 - d), \quad \sigma_{33}^\pm = -P_2 \delta(x_1 - d), \quad \omega^+ = \omega^-, \quad B_3^+ = B_3^-, \quad x_1 \notin (c, a). \quad (30)$$

Let's introduce new vectors:

$$S(x_1) = \left\{ [u_1'(x_1)], [u_3'(x_1)], B_3^{(1)}(x_1, 0) \right\}^T, \quad P(x_1) = \left\{ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), [\omega'(x_1)] \right\}^T.$$

Based on equations (26) – (27):

$$S(x_1) = MW^+(x_1) - \overline{MW}^-(x_1), \quad (31)$$

$$P(x_1) = NW^+(x_1) - \overline{NW}^-(x_1), \quad (32)$$

where

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

By introducing the new vector-function:

$$\mathbf{R}(z) = \begin{cases} \mathbf{NW}(z), & x_3 > 0 \\ \overline{\mathbf{NW}}(z), & x_3 < 0 \end{cases}, \quad \mathbf{R}(z) = \{R_1(z), R_3(z), R_4(z)\}^T,$$

we can derive:

$$\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R}^+(x_1), \quad \mathbf{W}^-(x_1) = \overline{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{R}^-(x_1).$$

Equations (31) – (32) results:

$$\mathbf{P}(x_1) = \mathbf{R}^+(x_1) - \mathbf{R}^-(x_1), \quad (33)$$

$$\mathbf{S}(x_1) = \mathbf{QR}^+(x_1) - \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^-(x_1), \quad (34)$$

where $\mathbf{Q} = \mathbf{MN}^{-1}$, and matrix \mathbf{Q} has the following structure:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} iq_{11} & q_{13} & q_{14} \\ q_{31} & iq_{33} & q_{34} \\ q_{41} & iq_{43} & iq_{44} \end{bmatrix}$$

As the analysis shows all q_{ij} are real.

From (33) it is evident that $\mathbf{R}(z)$ is analytical on those sections of the interface on which $\mathbf{P}(x_1) = 0$.

Given that $[\omega'] \equiv 0$, the 3rd relation of (33) yields: $R_4^+(x_1) - R_4^-(x_1) \equiv 0$ for $x_1 \in (-\infty, +\infty)$. Based on this $R_4(z) \equiv R_4^0 = \text{const}$. However, since all factors are equal to zero at infinity, then $R_4^0 = 0$.

By taking into account that $R_4(x) \equiv 0$, (34) can be re-written as:

$$\begin{aligned} [u'_1(x_1)] &= iq_{11} R_1^+(x_1) + q_{13} R_3^+(x_1) + iq_{11} R_1^-(x_1) - q_{13} R_3^-(x_1), \\ [u'_3(x_1)] &= q_{31} R_1^+(x_1) + iq_{33} R_3^+(x_1) - q_{31} R_1^-(x_1) + iq_{33} R_3^-(x_1), \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) &= q_{41} R_1^+(x_1) + iq_{43} R_3^+(x_1) - q_{41} R_1^-(x_1) + iq_{43} R_3^-(x_1). \end{aligned} \quad (35)$$

By combining the first and second equations (35), we can derive:

$$[u'_3(x_1)] + i m_j [u'_1(x_1)] = \vartheta_j \left[F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) \right] \quad (36)$$

where

$$\begin{aligned} F_j(z) &= R_1(z) + i S_j R_3(z), \quad j = 1, 2, \quad m_j = \pm \sqrt{-\frac{q_{31} q_{33}}{q_{11} q_{13}}}, \quad \gamma_j = -\frac{q_{31} + m_j q_{11}}{\vartheta_j}, \\ S_j &= \frac{q_{33} + m_j q_{13}}{q_{31} - m_j q_{11}}, \quad (S_j = -m_j), \quad \vartheta_j = q_{31} - m_j q_{11}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (37)$$

Equations (33) and (37) yield:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + iS_j \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (38)$$

From equations (33) and (35), the following expression can be derived for the normal component of the magnetic induction vector at the interface:

$$B_3^{(1)}(x_1, 0) = \left(q_{34} - \frac{q_{43} q_{31}}{q_{33}} \right) \sigma_{13}(x_1, 0) + \frac{q_{43}}{q_{33}} u_3'(x_1, 0)$$

By taking into account conditions (29) and (30) as well as equations (36), (38), we arrive to the following problem for the function $F_1(z)$:

$$\begin{aligned} F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) &= 0, \quad x_1 \in (c, a), \\ F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) &= g(x_1), \quad x_1 \notin (c, a), \end{aligned} \quad (39)$$

where $g(x_1) = (P_1 - iS_1 P_2) \delta(x_1 - d)$.

Note that in equations (36), (38) we used only equations with the index $j = 1$, which are sufficient for the next analysis.

Based on [3] and taking into account the zero conditions for the function $F_1(z)$ at the infinity the problem (39) can be written in the form:

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{x \notin (c, a)} \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt,$$

where $X(z) = (z-c)^{-0.5+i\varepsilon} (z-a)^{-0.5-i\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}$.

The calculation of the last integral leads to:

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \frac{P_1 - iS_1 P_2}{X^+(d)(d-z)}, \quad (40)$$

Subsequently equation (36) and condition $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ for $x_1 \notin (c, a)$ yields:

$$\begin{aligned} [u_3'(x_1)] + i m_1 [u_1'(x_1)] &= \vartheta_1 (1 + \gamma_1) F_1(x_1) = \\ &= \vartheta_1 (1 + \gamma_1) \frac{X(x_1)}{2\pi i} \frac{P_1 - iS_1 P_2}{X^+(d)(d-x_1)} \quad \text{for } x_1 \notin (c, a). \end{aligned} \quad (41)$$

Taking also into consideration that according to the first equation (39)

$F_1^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_1} F_1^+(x_1)$, we can derive:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + iS_1 \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} F_1(x_1) = \\ &= \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \frac{X(x_1)}{2\pi i} \frac{P_1 - iS_1 P_2}{X^+(d)(d-x_1)} \quad \text{for } x_1 \in [c, a]. \end{aligned} \quad (42)$$

Analysis of the results. Numerical analysis was performed for the CoFe_2O_4 / Al bimaterial, the parameters of the material are given in Table 1. In this case, in calculations, aluminum was considered as a piezomagnetic material with piezo-magnetic constants close to zero. We assumed that $c = -10\text{mm}$, $a = 10\text{mm}$, and d is a variable.

Table 1

Material properties CoFe_2O_4 and Al

Constants	CoFe_2O_4	Al	Constants	CoFe_2O_4	Al
c_{11} , GPa	274	178,0	h_{31} , N/A·m	522,3	58,03
c_{13} , GPa	161	87,2	h_{33} , N/A·m	629,7	69,97
c_{33} , GPa	259	172,8	h_{15} , N/A·m	495,0	55,00
c_{44} , GPa	45	43,2	$\gamma_{11} \cdot 10^{-6}$, N·c ² /C ²	531,5	63,5
			$\gamma_{33} \cdot 10^{-6}$, N·c ² /C ²	142,3	24,7

Results of calculations $\sigma_{33}(x_1, 0)$ and $B_3(x_1, 0)$ at (c, a) are shown in figures 2 and 3 respectively for $d=11$ mm (line I) and $d=13$ mm (line II). The load was $P_1 = 10^6$ N/m, $P_2 = 10^4$ N/m.

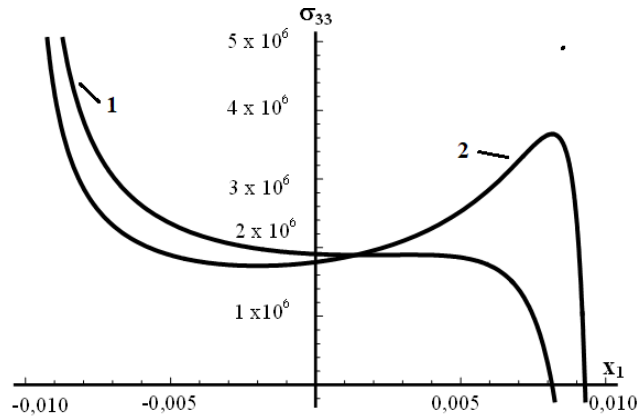


Fig. 2. Distribution of the normal stresses at the interface

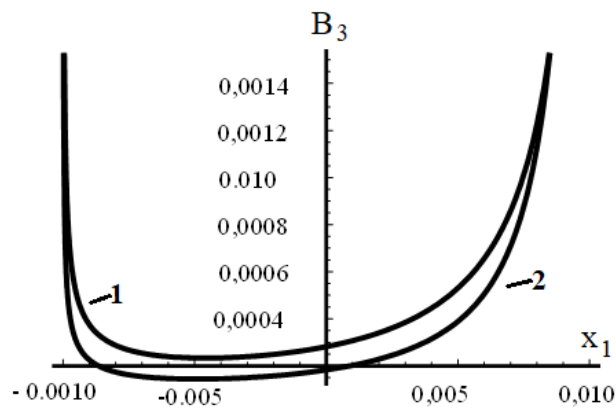


Fig. 3. Distribution of magnetic displacements at the interface

Based on the obtained results, it can be seen that the applied mechanical stress causes a rather significant magnetic induction. It is also evident that both the stress and the magnetic induction have an oscillating singularity at the ends of (c, a) . However, because the bimetal constant ε for the chosen material is relatively small ($\varepsilon = 0,0406509$), and the applied load is close to tension/compression, the visual oscillation is not observed.

Bibliographic references

1. **Sturla, F.A.** Thermal stresses due to a plane crack in general anisotropic material [Text] / F.A. Sturla, J.R. Barber // J. of Appl. Mech. – 1988. – Vol. 65. – P. 372 – 376.
2. **Suo, Z.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [Text] / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol. 40. – N 4. – P. 739 – 765.
3. **Лобода, В. В.** Контактна модель зовнішньої електро-проникної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі [Текст] / В. В.Лобода, О. С.Філіпова // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Вип. 49. – № 3. – С. 77 – 85.
4. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. **Филиппова, О. С.** Контактная модель краевой электроизолированной трещины в пьезоэлектрическом биматериале [Текст] / О. С. Филиппова // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2005. – Т. 2. – Вип. 10. – С. 159 – 168.

Надійшла до редколегії 24.05.2018

УДК 536.2:621.078

В. Ю. Клим

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ УТОМЛЕНОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ПРОСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА НАЯВНОСТІ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Запропоновано оцінку утомленої довговічності за визначенням зміни температури дисипативного розігріву простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, і основних показників їх напруженого стану із врахуванням відповідної зміни характеристик матеріалу. Оцінка утомленої довговічності складається з послідовного розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності та визначення числа циклів навантаження до моменту досягнення граничного напруженого стану. В роботі постановка задачі містить рівняння нелінійної нестационарної теплопровідності із розподіленими джерелами тепла. Вказано на особливості граничних умов. Наведено розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності, виходячи з залежності від температури і характеристик матеріалу і внутрішніх джерел енергії, для оцінки утомленої довговічності простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, за наявності дисипативного розігріву. Викладено розв'язання поставленої нелінійної задачі, яке відбувається з використанням методу послідовних інтервалів та просторово-часових квадрантів і дозволяє звести розв'язання до послідовності розв'язків лінійних задач. Отриманий структурний розв'язок нелінійних задач нестационарної теплопровідності дозволяє враховувати дисипативний розігрів циклічно навантаженого стержня та оцінити вплив температури саморозігріву на довговічність простого елемента конструкції. Побудовано алгоритм визначення температури дисипативного розігріву стержня при циклічному деформуванні. Для однорідного стержня, що знаходиться під дією циклічного деформування за різними частотами та амплітудами напруження, проведено розрахунки числа циклів навантаження до моменту досягнення в стержні граничного напруженого стану.

Ключові слова: циклічне навантаження, дисипація енергії, задача нелінійної нестационарної теплопровідності, джерела тепла

Предложена оценка усталостной долговечности по определению изменения температуры дисипативного разогрева простых элементов конструкций, находящихся под действием