

Bibliographic references

1. **Sturla, F.A.** Thermal stresses due to a plane crack in general anisotropic material [Text] / F.A. Sturla, J.R. Barber // J. of Appl. Mech. – 1988. – Vol. 65. – P. 372 – 376.
2. **Suo, Z.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [Text] / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol. 40. – N 4. – P. 739 – 765.
3. **Лобода, В. В.** Контактна модель зовнішньої електро-проникної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі [Текст] / В. В.Лобода, О. С.Філіпова // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Вип. 49. – № 3. – С. 77 – 85.
4. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. **Филиппова, О. С.** Контактная модель краевой электроизолированной трещины в пьезоэлектрическом биматериале [Текст] / О. С. Филиппова // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2005. – Т. 2. – Вип. 10. – С. 159 – 168.

Надійшла до редколегії 24.05.2018

УДК 536.2:621.078

В. Ю. Клим

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ УТОМЛЕНОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ПРОСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА НАЯВНОСТІ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Запропоновано оцінку утомленої довговічності за визначенням зміни температури дисипативного розігріву простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, і основних показників їх напруженого стану із врахуванням відповідної зміни характеристик матеріалу. Оцінка утомленої довговічності складається з послідовного розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності та визначення числа циклів навантаження до моменту досягнення граничного напруженого стану. В роботі постановка задачі містить рівняння нелінійної нестационарної теплопровідності із розподіленими джерелами тепла. Вказано на особливості граничних умов. Наведено розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності, виходячи з залежності від температури і характеристик матеріалу і внутрішніх джерел енергії, для оцінки утомленої довговічності простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, за наявності дисипативного розігріву. Викладено розв'язання поставленої нелінійної задачі, яке відбувається з використанням методу послідовних інтервалів та просторово-часових квадрантів і дозволяє звести розв'язання до послідовності розв'язків лінійних задач. Отриманий структурний розв'язок нелінійних задач нестационарної теплопровідності дозволяє враховувати дисипативний розігрів циклічно навантаженого стержня та оцінити вплив температури саморозігріву на довговічність простого елемента конструкції. Побудовано алгоритм визначення температури дисипативного розігріву стержня при циклічному деформуванні. Для однорідного стержня, що знаходиться під дією циклічного деформування за різними частотами та амплітудами напруження, проведено розрахунки числа циклів навантаження до моменту досягнення в стержні граничного напруженого стану.

Ключові слова: циклічне навантаження, дисипація енергії, задача нелінійної нестационарної теплопровідності, джерела тепла

Предложена оценка усталостной долговечности по определению изменения температуры дисипативного разогрева простых элементов конструкций, находящихся под действием

циклического нагружения, и основных показателей их напряженного состояния с учетом соответствующего изменения характеристик материала. Оценка усталостной долговечности состоит из последовательного решения нелинейной нестационарной теплопроводности и определения числа циклов нагружения к моменту достижения предельного напряженного состояния. В работе постановка задачи содержит уравнение нелинейной нестационарной теплопроводности с распределенными источниками тепла. Указаны особенности граничных условий. Приведено решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности, исходя из зависимости от температуры как характеристик материала, так и внутренних источников энергии для оценки усталостной долговечности простых элементов конструкций, находящихся под действием циклического нагружения при диссипативном разогреве. Решение поставленной нелинейной задачи выполняется с использованием метода последовательных интервалов и пространственно-временных квадрантов и позволяет свести решение к последовательности решений линейных задач. Полученное структурное решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности учитывает диссипативный разогрев циклически нагруженного стержня и дает сделать качественную оценку влияния температуры саморазогрева на долговечность элемента конструкций. Построен алгоритм определения температуры диссипативного разогрева стержня при циклическом деформировании. Для однородного стержня при действии циклического нагружения с различными частотами и амплитудами напряжения проведены расчеты числа циклов нагружения к моменту достижения в стержне предельного напряженного состояния.

Ключевые слова: циклическое нагружение, диссипация энергии, задача нелинейной нестационарной теплопроводности, источники тепла.

The fatigue durability of definition the temperature of dissipative heating process in simple structur's elements due to cyclic loading taking into account the influence of main cyclic loading parameters, changes of material's characteristics has been showed. The fatigue durability consists of set of nonlinear nonstationary heat conduction problem's solves and definition of cycle's number at the yield stress moment. Problem statement contains the nonlinear nonstationary of heat conduction equation with distributional heat generations. The characteristics of boundary conditions are determined. The solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction which allows to taking into account the temperature dependences for properties of material and internal heat generations for definition of fatigue durability in simple structur's elements due to cyclic loading with dissipative heating process is given. Solution of nonlinear problem is to determine from using method of successive intervals and three-dimensional time- depended squear's method and allows reducing the solution to the sequence of linear nonstationary problems. Structural solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction takes into account a dissipative heating process in a rod due to cyclic loading and gives qualitative estimation of temperatures influence on structure elements fatigue durability. The algorithm of determining the dissipation heat temperature in a rode due to cyclic loading has been built. Number of cycles computing for homogeneous rode under cyclic loading with difference frequencies and stress amplitudes at the moment of the yield stress stay is presented. appears importance in taking into account the dissipative heating process in determination of temperature fields for elements of construction due to cyclic loading are given.

Key words: cyclic loading, dissipative heating, nonlinear nonstationary problem of heat conduction, internal heat generation.

Для багатьох видів сучасної техніки, обладнання спеціального призначення, окремих деталей транспорту характерним є робочий режим циклічного навантаження із невеликою амплітудою, але з великим числом циклів, порядок якого становить 10^7 . Відомо, що циклічне навантаження елементів конструкцій обов'язково супроводжується дисипацією енергії деформування в більшій або в меншій мірі. Для металів, як найпоширеніших конструкційних матеріалів, результати експериментальних досліджень останніх років довели, що за деяких значень параметрів циклічного навантаження дисипація енергії викликає розігрів досліджуваного об'єкта. Зміна величин теплофізичних та механічних характеристик матеріалу в залежності від температури є одним із чинників, який впливає на довговічність елементів конструкцій. Таким чином, виникає

необхідність врахування впливу дисипативного розігріву на величину утомленої довговічності елементів конструкцій при циклічному навантаженні [1 – 5].

Запропоновано оцінку утомленої довговічності за визначенням зміни температури дисипативного розігріву простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, і основних показників їх напруженого стану із врахуванням відповідної зміни характеристик матеріалу. Це забезпечується, по-перше, розв'язанням нелінійної нестационарної задачі теплопровідності, та, по-друге, визначенням числа циклів навантаження до моменту досягнення граничного напруженого стану. Такий підхід до оцінки утомленої довговічності добре узгоджується з термодинамічною теорією міцності та руйнування твердих тіл, яку запропоновано В.В.Федоровим, який показав в своїх роботах, що відповідальними за руйнування твердого тіла є не тільки накопичені пошкодження в об'ємі матеріалу, але й розміцнення матеріалу за рахунок розігріву, і вважав за необхідне розв'язання лінійних задач нестационарної теплопровідності із внутрішніми джерелами енергії [6]. В роботі наведено розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності, виходячи з залежності від температури і характеристик матеріалу і внутрішніх джерел енергії, для оцінки утомленої довговічності простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, за наявності дисипативного розігріву.

Постановка задачі. Розглянуто циклічне навантаження простого елемента конструкцій – однорідного циліндричного стержня обмеженої довжини – за умов нестационарного теплообміну з навколишнім середовищем. Температура стержня змінюється тільки по довжині. Теплообмін між боковою поверхнею стержня та навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона. Теплообмін із іншими елементами конструкції враховується граничними умовами 1, 2 або 3 роду на торцях стержня. Отже рівняння нелінійної нестационарної теплопровідності для однорідного стержня обмеженої довжини l має вигляд [7 – 9]:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} \right] - \frac{\alpha(T)}{h} [T(x,\tau) - T_c] + q(T),$$

$$0 \leq x \leq l, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

із початковими і граничними умовами

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_1 \lambda(T) \left. \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} \right|_{x=l} = \varepsilon_2 \alpha_2(T) [f(\tau) - \varepsilon_3 T(x,\tau)]_{x=l}, \quad (3)$$

де $c(T)$, $\lambda(T)$ и $\rho(T)$ – коефіцієнти питомої теплоємності, теплопровідності та щільності матеріалу стержня; $T(x,\tau)$ – температура стержня, що залежить від координати x та часу τ ; T_c – температура навколишнього середовища; $\alpha(T)$, $\alpha_2(T)$ – коефіцієнти тепловіддачі із бокової поверхні і з торців стержня в навколишнє середовище; h – відношення площі перетину стержня до периметра перетину; $\varphi(z)$ – початковий розподіл температури; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – коефіцієнти, що приймають значення ± 1 або 0 ; $f(\tau)$ – функція, яка приймає значення температури поверхні торця стержня, теплового потоку або температури навколишнього середовища в залежності від сполучень значень ε_i , коли задаються граничні умови 1, 2 і 3 роду.

У рівнянні (1) теплоутворення в процесі циклічного навантаження враховано введенням розподілених джерел тепла, наявність яких є результат перетворення частини енергії деформування в тепло. Вираз для джерел тепла, визначений через їх інтенсивність, при циклічному навантаженні за час τ з частотою ν для одновимірного випадку (по координаті x) має наступний вигляд [9]:

$$q(T) = \tau \nu q^*(T), \quad \nu q^*(T) = \begin{cases} \nu \sigma_a^2 \psi(T)/(2E(T)), \\ \nu \sigma_a^2 \delta(T)/(E(T)), \end{cases}$$

де T – температура; $\psi(T)$ та $\delta(T)$ – відносне розсіяння енергії та декремент коливань відповідно, які визначаються з експерименту; $E(T)$ – модуль пружності при температурі T ; $\sigma_a(x, \tau)$ – амплітуда напружень, що отримана із розв'язку задачі про вимушені моногармонічні коливання стержня.

Постановка проблеми оцінки утомленої довговічності циклічно деформованого стержня за наявності його дисипативного розігріву передбачає за отриманим розв'язком задачі нелінійної нестационарної теплопровідності визначити кількість циклів навантаження стержня, коли буде досягнуто граничний напружений стан.

Розв'язання задачі. Результати розрахунків. Розв'язання поставленої нелінійної задачі відбувається з використанням методу послідовних інтервалів та просторово-часових квадрантів, що дозволяє звести розв'язання до послідовності розв'язків лінійних задач [8 – 9].

Якщо весь час циклічного навантаження стержня поділити на M інтервалів $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j=1, 2, \dots, M$, а довжину l стержня поділити на N інтервалів $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, N$, то потрібно розв'язати $M \times N$ лінійних задач теплопровідності з відповідними початковими і граничними умовами. При цьому між інтервалами за координатою виконуються умови ідеального теплового контакту (безперервність функцій температури і теплових потоків), між інтервалами за часом – наступні умови:

$$\varphi^{j+1}(x) = T^j(x, \tau_j).$$

Надалі перехід до лінійних задач теплопровідності здійснюється із використанням безрозмірних змінних. В результаті маємо структурний розв'язок нелінійних задач нестационарної теплопровідності, який складається з низки розв'язків лінійних задач теплопровідності, і набуває наступного вигляду:

$$T_i^j(z_i, Fo_i) = \sum_{l=1}^{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,i}^l \left[\mu_{n,i}^l(z_i), \varphi_{n,i} \right] g_{l,i}^{(n)}(Fo_i) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{l,i}^j(z_i, p_k) \cdot \exp(p_k Fo_i) \right\} + \Gamma_i^{*j}(z_i, Fo_i), \quad (4)$$

де $T_i^j(z_i, Fo_i)$ – температура стержня; $z_i = x/l_i$ – безрозмірна координата; $l_i = x_i - x_{i-1}$; $Fo_i = a\tau/l_i^2$ – безрозмірний час (критерій Фур'є); τ – час; a – коефіцієнт теплопровідності;

$$E_{l,i}^j(z_i, p_k) = E_{l,i}^{j-1}(z_i, p_k) \cdot \exp(p_k \cdot \Delta Fo_i^{j-1}) + \frac{\overline{g_{l,i}^j(p_k)}}{\psi'_{N,j}(p_k)} \cdot Q_{l,i}^j(z_i, p_k);$$

$$\Gamma_i^{*j}(z_i, Fo_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_i^n \frac{Fo_i^n}{n!} \varphi_i^{j(2n)}(z_i) + \beta_i^* \sum_{n=0}^{\infty} \beta_i^n \frac{Fo_i^n}{n!} w_i^{j(2n)}(z_i);$$

$$\varphi_i^j(z_i) = \Gamma_i^{*j-1}(z_i, \Delta Fo_i^{j-1}) + \sum_{l=1}^{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,j-1}^l [\mu_{n,l}(z_i), \varphi_n] \times g_{l,i}^{j-1(n)}(Fo_i) \mid_{Fo_i = \Delta Fo_i^{j-1}} \right\};$$

$$\Omega_n [\mu_{n,i}(z_i), \varphi_n] = \frac{\mu_{n,i}(z_i)}{\varphi_0} - \sum_{j=1}^n \Omega_{n-1} [\mu_{n,i}(z_i), \varphi_n] \frac{\varphi_j}{\varphi_0};$$

$$Q_i(z_i, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n,i}(z_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,i}(z_i) \cdot p^n; \psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^*(p+L)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cdot p^n;$$

C_j^n – біноміальні коефіцієнти; $L = Bi_1 l^2 / h^2$, $Bi_1 = \alpha_1 h / \lambda$, $Bi_2 = \alpha_2 h / \lambda$ – критерії Біо; вирази для ω_n^* , φ_n та $\mu_{n,i}(z_i)$ наведені в роботі [9].

До розв'язку (4) входять похідні функції $\psi(p)$ при значеннях $p = p_k = -\gamma_k^2 - L$, де p_k – полюси трансцендентної функції

$$\frac{Q_i(z, p)}{\psi(p)} = \frac{Q_i(z, p)}{\varepsilon_1 \sqrt{p+L} \cdot sh \sqrt{p+L} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 Bi_2 ch \sqrt{p+L}},$$

а γ_k – корені характеристичного рівняння: $\varepsilon_2 \varepsilon_3 ctg \gamma = \varepsilon_1 \cdot \frac{\gamma}{Bi_2}$.

Введені в структуру розв'язку компоненти впливу $g_i(Fo_i)$ на граничних поверхнях залежать від граничних функцій теплообміну та від часткових розв'язків задачі $\Gamma_i^*(z_i, Fo_i)$. Для найбільш характерних змін компонент впливу $g(Fo)$ і функцій $\varphi(z)$, $w(z, Fo)$ отримані аналітичні вирази [8 – 9].

Для оцінки утомленої довговічності простих елементів конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження, за наявності дисипативного розігріву температура дисипативного розігріву стержня при циклічному деформуванні визначається за наступним алгоритмом.

Весь час навантаження розбивається на M скінчених часових інтервалів $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$.

За координатою стержень довжиною l розбивається на N скінчених інтервалів $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Для інтервалу часу $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ на кожному інтервалі за координатою $[x_{i-1}, x_i]$ виконується послідовність дій:

1. Теплофізичні та механічні характеристики матеріалу приймають значення згідно виразу:

$$char(T) = \left(char(T(x_{i-1}, \tau_{j-1})) + char(T(x_i, \tau_{j-1})) \right) / 2.$$

2. Розв'язується задача про вимушені коливання. При цьому розглядаються коливання в резонансній зоні, передбачається виконання правила Відлера, тобто вважається, що розсіяння механічної енергії не впливає на форму коливань. Визначаються форми коливань, деформації і напруження по довжині стержня для

будь-якого моменту часу $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$.

3. Перевіряється умова для амплітудних напружень в небезпечному перетині, тобто максимальне значення амплітудних напружень по довжині стержня порівнюється із заданим значенням границі текучості $\sigma_a(x, \tau) < \sigma_T(T)$. У разі невиконання умови попереднє значення кількості циклів навантаження N^* приймається за $N_{пред}$.

4. Визначається кількість циклів навантаження N^* .

5. Визначається розподіл інтенсивності внутрішніх джерел тепла по довжині стержня.

6. Розв'язується лінійна задача теплопровідності для визначення температурного поля $T(x, \tau)$.

7. Розподіл температури по координаті $T(x, \tau_j)$ є початковим для наступного інтервалу по часу.

Проведені розрахунки для оцінки досягнення в циклічно навантаженому стержні граничного напруженого стану за наявності дисипативного розігріву згідно наведеного вище алгоритму. Результати для однорідного стержня із сталі 45 круглого поперечного перетину із розмірами $2l=0,13\text{м}$ и $h=R/2=0,00375\text{м}$, що знаходиться під дією циклічного чистого згину за різними амплітудами напружень σ_a та частотах навантаження ν наведено в табл.1.

Таблиця 1

**Кількість циклів $N_{пред}$ навантаження стержня
за досягненням граничного напруженого стану**

σ_a , МПа	ν , Гц	$N_{пред}$
200	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^7$
300	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^6$
200	10^5	10^7
300	10^5	$1,5 \cdot 10^6$

Висновки. Отриманий розв'язок дозволяє враховувати дисипативний розігрів циклічно навантаженого стержня та оцінити вплив температури саморозігріву на довговічність простого елемента конструкцій. В перспективі розвитку методів розв'язання нелінійних задач нестационарної теплопровідності для процесу циклічного навантаження елементів конструкцій довільної геометричної форми ставиться завдання отримувати не тільки залежності температури елементів за часом, але й оцінити вплив різних чинників, що спричиняють різке підвищення температури при гігациклових навантаженнях.

Бібліографічні посилання

1. Ботвина, Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности [Текст] / Л.Р. Ботвина. – М.: Наука, 2008. – 334с.
2. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности [Текст] / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416с.
3. Писаренко, Г. С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов:

Справочник. / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К.: Наук. думка, 1971. – 375с.

4. **Плехов, О.** Экспериментальное исследование закономерностей диссипации энергии при динамическом деформировании нанокристаллического титана [Текст] / О. Плехов, В. Чудинов, В. Леонтьев и др. // Письма в ЖТФ, 2009. – Т. 35. – Вып. 2. – С. 82 – 89.

5. **Веселовский, В.Б.** Решение задач теплопроводности для определения долговечности элементов конструкций, разогревающихся вследствие циклического нагружения [Текст] / В.Б.Веселовский, Н.И. Войцеховский // Гидрогазомеханика и теплообмен летательных аппаратов. К.: Наук.думка, 1988. – С.142 – 149.

6. **Федоров, В.В.** Термодинамические представления о прочности и разрушении твердого тела [Текст] / В.В. Федоров// Проблемы прочности. – 1971. – №11. – С. 32 – 34.

7. **Веселовский, В. Б.** Разогрев ограниченного стержня при высокочастотном нагружении [Текст] / В. Б. Веселовский, В. Ю. Клим // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2002.– Вип. 6.– Т. 2. – С.27 – 34.

8. **Клим, В. Ю.** Математическая модель разогрева элементов конструкций при циклическом деформировании [Текст] / В. Ю. Клим // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2010. – Вип. 14(1). –Т. 18. – № 5. – С. 181 – 191.

9. **Клим, В. Ю.** Диссипативный разогрев стержневых элементов конструкций при высокочастотном циклическом деформировании [Текст] / В. Ю. Клим // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2014. – Вип. 18(1). – Т.22.– № 5. – С. 78 – 86.

Надійшла до редколегії 25.06.2018

УДК 532.516

В.И.Елисеєв, Ю.П.Совит

Днепро́вский национальный университет имени Оле́ся Гонча́ра

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕНИСКА

В работе представлены результаты исследований в одном из важнейших направлений современной науки, к которому относятся поверхностные и приповерхностные физико-химические явления. Определена основная проблема в задачах электрокапиллярности: на границах сред вследствие поляризации различной физической и химической природы возникают разности электрических потенциалов. Рассмотрены сравнительно простые задачи ионообмена в слое жидкости с плоским мениском при наличии приложенного внешнего напряжения, действующего вдоль капилляра. В качестве объекта численного исследования взята область, состоящая из различных подобластей, имеющих различные электрофизические характеристики. В работе показано, что такое рассмотрение является необходимым ввиду того, что условия на контактных поверхностях являются чрезвычайно важными для получения величин потенциалов на этих границах, по которым возможно оценить электрические силы, действующие на слой жидкого электролита. Расчеты проведены с использованием метода введения искусственного релаксационного коэффициента в уравнение для потенциала. В результате решения стационарных и нестационарных задач массообмена выявлены особенности распределения потенциалов как внутри областей, так и на границах. Показано, что даже для электропроводящих стенок капилляра при диффузии компонентов, отличающихся друг от друга коэффициентами диффузии, возникают участки свободных поверхностей со сравнительно большими потенциалами, которые могут быть использованы для управления менисками в капиллярных трубках. Сделан вывод о том, что в случае, если стенками