

**К. В. Панин***Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ  $J$ -ИНТЕГРАЛА  
ПРИ СЛОЖНОМ СДВИГЕ**

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластического бруса с краевой трещиной в условиях сложного сдвига. Задано квазистатическое внешнее нагружение, которое приводит к процессам сложного нагружения в каждой точке бруса. Деформации считаются малыми. Предложен численный алгоритм решения задачи, основанный на применении метода конечных элементов и дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности, учитывающей микродеформации (Новожилова, Кадашевича, Чернякова). Неравномерность пластической деформации приближенно учтена путем представления тензора пластической деформации в виде суммы элементарных пластических деформаций, каждой из которых отвечает своя поверхность текучести и система внутренних микроупругих сил. Математически граничная задача сформулирована как нелинейная краевая задача и задача Коши по параметру нагружения. Для решения задачи Коши использован шаговый метод, сводящий решение исходной задачи к последовательности решений на временных слоях. На каждом шаге по времени с помощью итерационного метода нелинейная краевая задача сведена к последовательности квазилинейных, которые решены с помощью метода конечных элементов. В качестве базового для метода конечных элементов выбран четырехугольный изопараметрический конечный элемент. Для вычисления матриц жесткости конечных элементов применен алгоритм, позволяющий снизить число подлежащих вычислению кратных интегралов в определяющих соотношениях теории пластичности, учитывающей микродеформации, до размерности траектории нагружения. Для вычисления  $J$ -интеграла использован прямой метод, который основан на непосредственном его вычислении на основе расчетов по методу конечных элементов. При проведении расчетов в качестве материала бруса выбрана сталь Ст45, для которой при описании упругопластического деформирования в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, в качестве универсальных функций материала допустимо использовать константы. При различных схемах нагружения построены зоны пластичности в сечении бруса. Исследовано влияние истории нагружения как на конфигурацию зон пластичности в окрестности вершины трещины, так и на величину  $J$ -интеграла. Показано, что при принятых схемах нагружения, в рамках допустимой точности  $J$ -интеграл является инвариантным как при пропорциональном, так и при сложном нагружении, а также, что его величина зависит от истории нагружения.

**Ключевые слова:** брус с краевой трещиной, сложный сдвиг, сложное нагружение, теория пластичности, учитывающая микродеформации, метод конечных элементов, зона пластичности,  $J$ -интеграл.

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану пружно-пластичного бруса з крайовою тріщиною в умовах складного зсуву. Брус знаходиться під дією квазістатичного зовнішнього навантаження, яке призводить до процесів складного навантаження в кожній його точці. Деформації вважаються малими. Запропоновано чисельний алгоритм розв'язання задачі, заснований на застосуванні методу скінченних елементів і диференційно-нелінійного варіанту теорії пластичності, що враховує мікродеформації (Новожилова, Кадашевича, Чернякова). Нерівномірність пластичної деформації приблизно врахована шляхом представлення тензора пластичної деформації у вигляді суми елементарних пластичних деформацій, кожній з яких відповідає своя поверхня течії і система внутрішніх мікропружних сил. Математично гранична задача сформульована як нелінійна крайова задача і задача Коші по параметру навантаження. Для розв'язання задачі Коші використано кроковий метод, який зводить розв'язання початкової задачі до послідовності розв'язків на тимчасових шарах. На кожному кроці за часом за допомогою ітераційного методу нелінійна крайова задача

зведена до послідовності квазілінійних, які розв'язані за допомогою методу скінченних елементів. В якості базового для методу скінченних елементів обрано чотирикутний ізопараметричний скінченний елемент. Для обчислення матриць жорсткості скінченних елементів застосовано алгоритм, що дозволяє знизити число кратних інтегралів в визначальних співвідношеннях теорії пластичності, що враховує мікродеформації, до розмірності траєкторії навантаження. Для обчислення  $J$ -інтеграла використано прямий метод, який заснований на безпосередньому його обчисленні на основі розрахунків за методом скінченних елементів. При проведенні розрахунків в якості матеріалу бруса обрано сталь Ст45, для якої при описі пружно-пластичного деформування в рамках теорії пластичності, що враховує мікродеформації, в якості універсальних функцій матеріалу допустимо використовувати константи. При різних схемах навантаження побудовано зони пластичності в перерізі бруса. Досліджено вплив історії навантаження як на конфігурацію зон пластичності в околі вершини тріщини, так і на величину  $J$ -інтеграла. Показано, що при прийнятих схемах навантаження, в рамках допустимої точності  $J$ -інтеграл є інваріантним як при пропорційному, так і при складному навантаженні, а також, що його величина залежить від історії навантаження.

**Ключові слова:** брус з крайовою тріщиною, складний зсув, складне навантаження, теорія пластичності, що враховує мікродеформації, метод скінченних елементів, зона пластичності,  $J$ -інтеграл.

The problem of determining the stress-strain state of an elastic-plastic beam with an edge crack under conditions of a complex shear is considered. A quasi-static external loading is given, which leads to complex loading processes at each point of the beam. Deformations are considered small. A numerical algorithm for solving the problem based on the application of the finite element method and the differential-nonlinear version of the plasticity theory taking into account microdeformation (Novozhilov, Kadashevich, Chernyakov) is proposed. The non-uniformity of plastic deformation is approximately taken into account by representing the plastic deformation tensor as a sum of elementary plastic deformations, each of which has its own yield surface and a system of internal micro-elastic forces. Mathematically, the boundary value problem is formulated as a nonlinear boundary value problem and the Cauchy problem with respect to the loading parameter. To solve the Cauchy problem, a step-by-step method that reduces the solution of the original problem to a sequence of solutions on time layers is used. At each step in time, using the iterative method, the nonlinear boundary value problem is reduced to a sequence of quasilinear problems that are solved by the finite element method. The quadrangular isoparametric finite element is chosen as the basis for the finite element method. To calculate the stiffness matrices of finite elements, an algorithm is used that makes it possible to reduce the number of multiple integrals to be calculated in the defining relations of the theory of plasticity taking into account microdeformations, up to the dimensionality of the loading trajectory. To calculate the  $J$ -integral, a direct method is used, which is based on its direct calculation on the basis of finite element method. When carrying out the calculations, St45 steel is chosen as the material of the beam, for which, when describing elastic-plastic deformation within the framework of the theory of plasticity taking into account microdeformations, it is permissible to use constants as universal material functions. Under various loading schemes, zones of plasticity in the section of the beam are constructed. The influence of the loading history on form and size of plastic zones and on the  $J$ -integral is investigated. It is shown that under the accepted loading schemes, within the admissible accuracy, the  $J$ -integral is invariant under both proportional and complex loading, and also that its magnitude depends on the loading history.

**Key words:** beam with edge crack, anti-plane deformation, complex loading, theory plasticity taking into account micro deformation, finite element method, plastic zone,  $J$ -integral.

**Введение.** В работах Черепанова [1] и Райса [2] был предложен параметр –  $J$ -интеграл, который в условиях полномасштабной текучести играет ту же роль, что и коэффициента интенсивности напряжений  $K$  в линейной механике разрушения. Он эквивалентен  $K$  в квазихрупком приближении и по аналогии может рассматриваться как усредненная характеристика сингулярности локальных полей напряжений и деформаций в упругопластических телах с трещинами.

По определению,  $J$ -интеграл выражается равенством

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma,$$

где  $\Gamma$  – контур окружающий вершину трещины,  $W$  – плотность энергии деформации,  $n_1$ ,  $n_2$  – компоненты внешней нормали к контуру.

Плотность энергии деформации определяется следующим образом:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{mn} d\varepsilon_{mn}.$$

Доказано, что величина  $J$ -интеграла не зависит от контура интегрирования, то есть он является инвариантным. Хотя это доказательство относится к упругим (линейно или нелинейно) телам, оно может считаться справедливым и в применении к телам, обладающим упругопластическими свойствами. Это следует из эквивалентности физически нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности при отсутствии разгрузки. В то же время аналитически доказать инвариантное свойство  $J$ -интеграла в рамках теории течения не удалось.

Результаты, полученные с помощью численных методов, говорят о том, что свойство независимости  $J$ -интеграла от формы и размеров контура сохраняется и в случае применения теории течения. В работе [3] с использованием теории течения было найдено, что этот интеграл не зависит от контура при пропорциональном нагружении даже в случае развитой пластической зоны. Исследование инвариантности  $J$ -интеграла при решении упругопластических задач с учетом как физической, так и геометрической нелинейности проделано в работе [4]. Найдено, что интеграл зависит от контура только в весьма малой окрестности вершины трещины с радиусом примерно в шесть раз больше раскрытия в вершине. Именно таков примерный размер зоны локализации больших деформаций.

Следует отметить, что для решения подобных задач применялись в основном простейшие варианты теории пластичности. В связи с этим представляет интерес при решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния тела с трещиной воспользоваться дифференциально-нелинейным вариантом теории пластичности. Это дает возможность исследовать вопрос об инвариантности  $J$ -интеграла при сложном нагружении.

**Постановка задачи.** Рассматривается равновесие призматического бруса квадратного сечения ( $a \times a$ ), ослабленного краевой трещиной длины  $l = a/2$ , и находящегося под действием постоянных касательных усилий  $\tau_1 = \tau_1(t)$  и  $\tau_2 = \tau_2(t)$ , действующих по его граням (рис. 1).

Нагружение бруса – квазистатическое. Материал бруса – упругопластический упрочняющийся. Требуется определить компоненты напряженно-деформированного состояния бруса в произвольный момент времени.

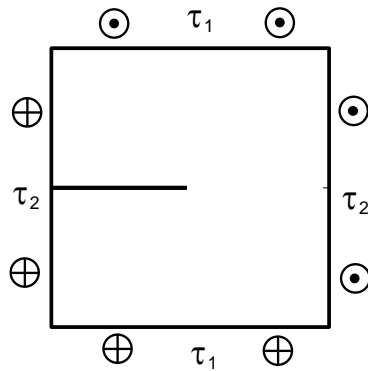


Рис. 1. Поперечное сечение бруса и схема его нагружения

Для описания процессов сложного упругопластического деформирования бруса воспользуемся уравнениями состояния теории пластичности, учитывающей микродеформации [5]. Так как в случае антиплоской деформации траектории нагружения и деформирования являются плоскими, то определяющие соотношения теории пластичности, учитывающей микродеформации, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{S}_k &= 2G(\delta_{km} - G_{km}^{(1)})\dot{\mathcal{E}}_m \quad (k, m = 1, 2), \\ G_{km}^{(1)} &= (\delta_{kn} + B_2 G_{kn}^{(2)})^{-1} G_{nm}^{(2)}, \\ G_{nm}^{(2)} &= \frac{1}{B_1} \left( G_{nm} - \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \Omega} F_n F_m \right), \\ F_k &= \int_{\Omega'} \lambda'_k d\Omega', \quad G_{km} = \int_{\Omega'} \lambda'_k \lambda'_m d\Omega', \quad \Omega = \int_{\Omega'} d\Omega'.\end{aligned}$$

Здесь  $\dot{S}_k = \dot{\sigma}_{k3}$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_k = \dot{\varepsilon}_{k3}$  – компоненты векторов скоростей напряжений и деформаций;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu_1 = B_3/B_1$ ;  $B_i$  – универсальные функции материала;  $\lambda'_1 = \cos\theta_1$ ,  $\lambda'_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2$  – направления активного микропластического деформирования;  $d\Omega' = \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2$  – дифференциальная форма «телесный угол».

Область направлений активного микропластического деформирования  $\Omega'$  строится с помощью соотношений

$$E(\lambda'_k, t) \leq \mathcal{E}_k \lambda'_k, \quad \dot{\lambda}'_k \lambda'_k - \frac{\mu}{1 + \mu \Omega} F_k \dot{\lambda}'_k > 0,$$

где  $\dot{\lambda}'_k = \dot{S}_k - B_2 G_{km}^{(1)} \dot{\mathcal{E}}_m$  – компоненты вектора активных деформаций.

Интенсивность разрешающих деформаций  $E(\lambda'_k, t)$  определяется с помощью формул

$$E(\lambda'_k, 0) = \varepsilon_o,$$

$$\dot{E}(\lambda'_k, t) = \begin{cases} \dot{\epsilon}_k \lambda'_k, & \lambda'_k \lambda_k = 1; \\ B_2 \dot{\epsilon}_k^p \lambda'_k + \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda_k = \pm 1; \\ \eta \dot{\epsilon}_k \lambda'_k + B_2 \dot{\epsilon}_k^p \lambda'_k + (1 + \eta) \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda_k = -1; \end{cases}$$

Здесь  $\dot{\chi} = \frac{\mu}{1 + \mu \Omega} F_k \dot{\epsilon}_k$ ;  $\eta$  – универсальная функция материала;  $\epsilon_0$  – начальный

предел текучести материала по деформациям.

С учетом того, что определяющие соотношения используемого варианта теории пластичности записываются в скоростях, рассматриваемая граничная задача формулируется также в скоростях. Она сводится к построению полей скоростей изменения напряжений  $\dot{\sigma}_{13}$ ,  $\dot{\sigma}_{23}$ , деформаций  $\dot{\epsilon}_{13}$ ,  $\dot{\epsilon}_{23}$  и перемещений  $v_3$  из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad \dot{\epsilon}_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2},$$

к которой необходимо добавить определяющие соотношения теории пластичности, учитывающей микродеформации, и граничные условия

$$\dot{\sigma}_{k3} = \tau_k \text{ на } S_p, \quad v_3 = v_{30} \text{ на } S_v.$$

Для решения этой задачи на каждом шаге по времени можно воспользоваться принципом максимума для скоростей деформации [6], который имеет вид

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{13} \delta \dot{\epsilon}_{13} + \dot{\sigma}_{23} \delta \dot{\epsilon}_{23}) dV + \int_{S_{p1}} \tau_1 \delta v_3 dS + \int_{S_{p2}} \tau_2 \delta v_3 dS = 0.$$

**Метод решения.** К полученной вариационной задаче применяется метод конечных элементов, и граничная задача теории пластичности приводится к задаче Коши. Она решается методом Эйлера с промежуточными итерациями. На каждом шаге метода Эйлера область направлений активного микропластического деформирования определяется методом простой итерации. Для вычисления матриц жесткости конечных элементов применяется алгоритм [7], позволяющий снизить число подлежащих вычислению кратных интегралов в определяющих соотношениях теории пластичности, учитывающей микродеформации, до размерности траектории нагружения, то есть до двух.

**Результаты расчетов.** При проведении расчетов в качестве материала бруса выбрана сталь Ст45. В [8] показано, что для описания упругопластического деформирования данного материала в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, в качестве универсальных функций материала  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $\eta$  можно использовать константы. При расчетах приняты следующие значения постоянных:  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;  $\epsilon_s = 1,31 \cdot 10^{-3}$ ;  $B_1 = 2,74$ ;  $B_2 = B_3 = 0$ ;  $\eta = 1$ .

При проведении серии из четырех расчетов нагружение в пространстве внешней нагрузки задавалось по следующим траекториям: 1 – ОА, 2 – ОВА, 3 – ОСА, 4 – ОДА (рис. 2).

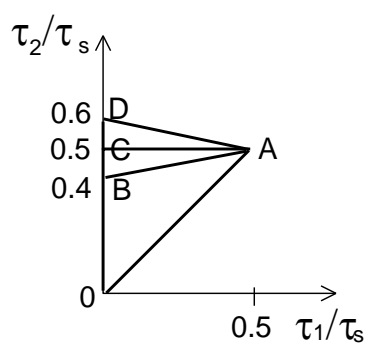


Рис.2. Схемы нагружения

При различных схемах внешнего нагружения были проведены вычисления  $J$ -интеграла по восьми контурам (рис. 3).

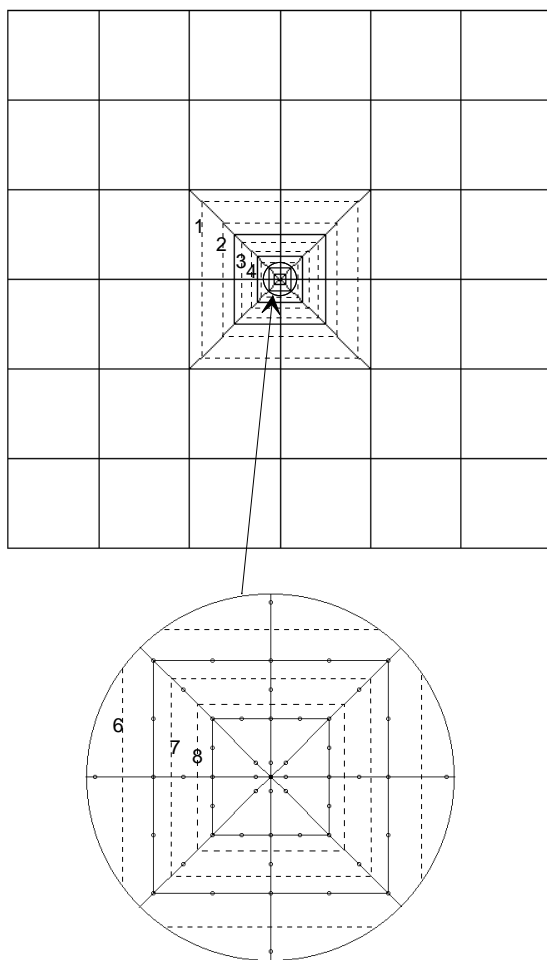


Рис.3. Контурь интегрирования для вычисления  $J$ -интеграла

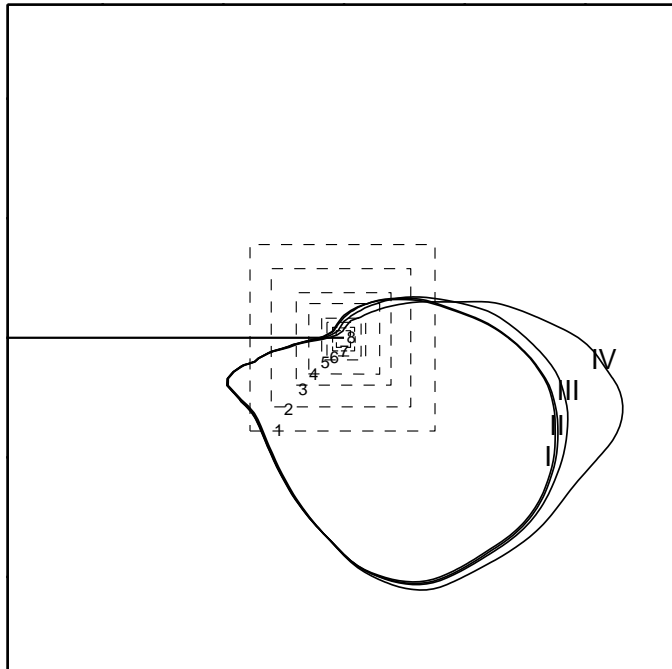
Методика вычисления  $J$ -интеграла при решении упругопластической задачи аналогична методике, применяемой в случае идеальной упругости [9]. При этом следует учесть, что плотность энергии деформации  $W$  зависит от истории нагружения. Поэтому при вычислении приращений напряжений следует накапливать тот член  $J$ -интеграла, в котором присутствует  $W$ :

$$J_W = \int_{\Gamma} W n_1 d\Gamma = \sum_i \Delta J_W^i,$$

$$\Delta J_W^i = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\{\sigma_i\} + \{\sigma_{i+1}\})^T (\{\varepsilon_{i+1}\} - \{\varepsilon_i\}) n_1 d\Gamma,$$

где индексами отмечены значения, соответствующие номеру шага.

На рис. 4 представлены зоны пластичности в сечении бруса квадратного сечения, ослабленного краевой трещиной, полученные при указанных схемах нагружения при решении задачи в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации. Там же дополнительно показаны контуры, по которым вычислялся  $J$ -интеграл. Из рисунка видно, что все контуры интегрирования пересекают пластические зоны.



**Рис. 4. Контурны интегрирования и зоны пластичности**

На рис.5 представлены результаты вычисления  $J$ -интеграла, полученные при расчетах по четырем принятым схемам внешнего нагружения. По оси ординат отложены значения  $J$ -интеграла, полученные в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, отнесенные к его значению, полученному при решении упругой задачи. Пунктирными линиями показано среднее значение  $J$ -интеграла для каждого расчета. Максимальное отклонение  $J$ -интеграла от среднего значения составляет 3,5%.

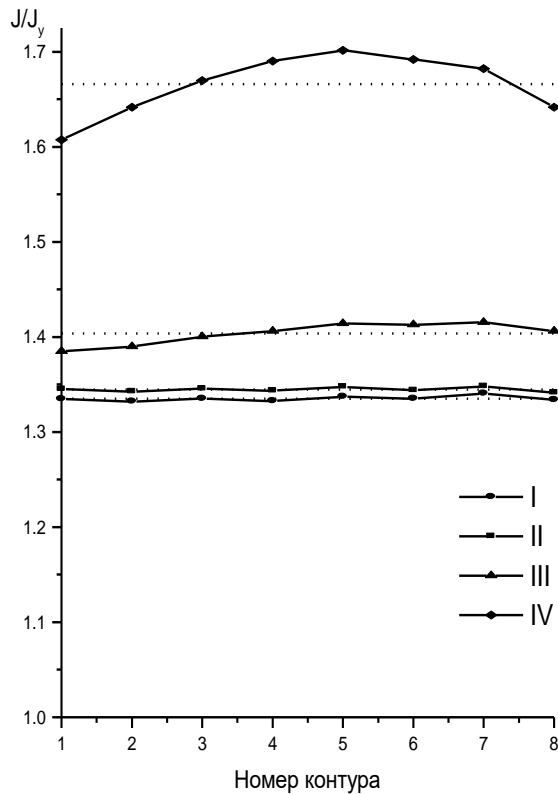


Рис.5. Результаты вычисления  $J$ -интеграла

**Выводы.** В рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, решены задачи сложного сдвига об определении напряженно-деформированного состояния упругопластического бруса квадратного сечения, ослабленного краевой трещиной. При различных схемах нагружения построены зоны пластичности в сечении бруса. Исследовано влияние истории нагружения как на конфигурацию зон пластичности в окрестности вершины трещины, так и на величину  $J$ -интеграла. Результаты проделанных расчетов свидетельствуют о том, что при принятых схемах нагружения, в рамках допустимой точности  $J$ -интеграл является инвариантным как при пропорциональном, так и при сложном нагружении, а также, что его величина зависит от истории нагружения.



### Библиографические ссылки

- Черепанов, Г.П.** О распространении трещин в сплошной среде [Текст] / Г.П. Черепанов // ПММ. – 1967. – Т. 31. – № 3. – С. 476 – 488.
- Райс, Дж.Р.** Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин [Текст] / Дж.Р. Райс // Труды амер. об-ва инж. мех. – Сер. E. – 1968. – Т. 35. – № 4. – С. 340 – 350.
- Sumpter, J.D.G.** Use of the J contour integral in elastic-plastic-fracture studies by finite-element methods [Text] / J.D.G. Sumpter, C.E. Turner // J. Mech. Eng. Sci. – 1976. – Vol. 18. – №3. – P. 97 – 112.
- McMeeking, R.M.** Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications of fracture [Text] / R.M. McMeeking // J. Mech. Phys. Solids. – 1977. – Vol. 25. – №5. – P. 357 – 387.
- Кадашевич, Ю.И.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации [Текст] / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А. Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50. – №6. – С. 821 – 823.
- Черняков, Ю.А.** Вариационные принципы решения граничных задач теории микродеформации [Текст] / Ю.А. Черняков // Вопросы прочности и пластичности. – 1997. – С. 5 – 13.
- Панин, К.В.** Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины продольного сдвига при сложном нагружении [Текст] / К.В. Панин, Ю.А. Черняков // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. – 1992. – С. 39 – 45.
- Kadashevich, Yu.I.** Theory of plasticity taking into account micro stresses [Text] / Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // Advanced in Mechanics. – 1992. – Vol.15. – №3. – P. 3 – 39.
- Морозов, Е.М.** Метод конечных элементов в механике разрушения [Текст] / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М., 1980. – 256 с.

*Надійшла до редколегії 25.05.18.*

УДК 628.3(075.8)

**M. M. Biliaiev<sup>1</sup>, T. I. Rusakova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan*

<sup>2</sup>*Oles Honchar Dnipro National University*

### PREDICTION OF MICROCLIMATE NEAR SMALL ARCHITECTURAL CONSTRUCTIONS

Создана математическая модель для прогнозирования параметров микроклимата в рабочей зоне, находящейся непосредственно вблизи автомагистрали при наличии «временного сооружения» и при его отсутствии. Разработана численная модель для определения поля скорости воздушного потока в зоне нахождения работника с учетом расположения выносного места торговли, «временного сооружения» без навеса и с навесом на основе уравнения Навье-Стокса. Для прогнозирования уровня концентрации в микроне использовано двухмерное уравнение переноса примеси в атмосферном воздухе. Численное интегрирование уравнений