required for evaporation of a given coolant flow rate and calculated from the values of thermo-physical properties of the flow at the channel entrance:

$$\Delta^{(1)} = \frac{Q^{(1-1)} - Q^{(0)}}{Q^{(1-1)}} \cdot 100\ \% \qquad (29)$$

23. If the value $\Delta^{(1)} \le 1\%$, we stop the computation process and take the values of $l^{(1)}$, $q_{av}^{(1-1)}$ and $\Delta P^{(1)}$ as final.

If the value of $\Delta^{(1)} > 1\%$, we organize the calculation at the second iteration step in the same way as the first iteration step, starting with formula (18) to formula (29), etc.

Conclusion. The above recalculating technique allows the calculation of the thermal-hydraulic characteristics of direct-flow cylindrical steam generators operating on a Freon coolant for boundary conditions of the first kind. This technique was created for the purpose of subsequent calculations of the heat-hydraulic efficiency of direct-flow cylindrical steam generators and was implemented in the form of a calculation program.

Bibliographic references

1. **Гоголин, А. А.** Интенсификация теплообмена в испарителях холодильных машин [Текст] / А. А. Гоголин, Г. Н. Данилова, В. М. Азарсков, Н. М. Медникова // Под ред. д.т.н., проф. А. А. Гоголина. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1982. – 224 с.

2. **Bo-Pierre**. Stromingsmotstand wid kokande kölmedier // Kylteknisk Tidskrift, 1959, № 5, S. 225–259; 1957, № 6, S. 231–242.

3. **Варгафтик, Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей [Текст] / Н. Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

Надійшла до редколегії 05.09.2019

УДК 539.3

Т. Д. Демченко, Е. В. Семененко

Иститут геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗНАПОРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С РАСТЕНИЯМИ, ПЛАВАЮЩИМИ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Предложена математическая модель течения жидкости в канале прямоугольного сечения и в прудке-осветлителе с растениями, плавающими на свободной поверхности. Математическая модель основана на использовании уравнения Навье-Стокса для плоской задачи медленного стационарного течения вязкой жидкости в двух областях: свободный безнапорный поток жидкости и поток жидкости в пористом слое, образованном корнями гиацинтов, плавающих на поверхности жидкости. Дано построение математической модели безнапорного течения жидкости с растениями, плавающими на свободной поверхности, и определения скорости течения воды в зависимости от параметров приповерхностного слоя, где сосредоточены корневые системы растений.

Показано, что при использовании водного гиацинта для очистки воды в прудке-отстойнике хранилища отходов обогащения параметры слоя плавающих на свободной поверхности растений не влияют на течение жидкости под ним. При этом, скорость в слое плавающих растений прямо пропорциональна порозности этого слоя и сложным образом зависит от коэффициента сопротивления слоя. Полученные формулы являются основой для проведения экспериментов по определнию зависимости коэффициента сопротивления слоя с гиацинтами от параметров слоя и геометрических характеристик используемых растений. Предлагаемые в работе математические модели впервые позволяют определить скорость жидкости через слой плавающих на свободной поверхности гиацинтов в зависимости от компактности их высадки, что позволяет выбирать параметры слоя с гиацинтами, необходимые для осветления технической оборотной воды от частиц заданной гидравлической крупности с учетом геометрических размеров пруда-отстойника или очистительного канала прямоугольного поперечного сечения.

Ключевые слова: двухслойное течение жидкости, течение в прудке-осветлителе, безнапорное течение жидкости со слоем плавающих растений.

Запропоновано математичну модель течії рідини в каналі прямокутного перерізу чи в прудку-освітлювачу з рослинами, що плавають на вільній поверхні. Математична модель заснована при використанні рівняння Нав'є-Стокса для плоскої задачі повільної стаціонарної течії в'язкої рідини в двох областях: вільний безнапірний потік рідини і потік рідини в пористому шарі, утвореному корінням гіацинтів, що плавають на поверхні рідини. Побудована математична модель безнапірної течії рідини з рослинами на вільній поверхні, що визначає швидкість течії води в залежності від параметрів приповерхового шару, де зосереджені кореневі системи рослин. Показано, що при використанні водного гіацинту для очищення води в прудку-відстійнику сховища відходів збагачення, параметри шару плаваючих на вільній поверхні рослин не впливають на перебіг рідини під ним. При цьому, швидкість у шарі плаваючих рослин прямо пропорційна порозності цього шару і складним чином залежить від коефіцієнта опору шару. Отримані формули є основою для проведення експериментів щодо визначення залежності коефіцієнта опору шару з гіацинтами від параметрів шару і геометричних характеристик використовуваних рослин. Запропоновані в роботі математичні моделі вперше дозволяють визначити швидкість рідини через шар плаваючих на вільній поверхні гіацинтів в залежності від компактності їх висадки, що дозволяє вибрати параметри шару з гіацинтами необхідного для освітлення технічної оборотної води від частинок заданої гідравлічної крупності з урахуванням геометричних розмірів ставка-відстійника або очисного каналу прямокутного поперечного перерізу.

Ключові слова: двохшарова течія рідини, течія в прудку-освітлювачу, безнапірна течія рідини з шаром плаваючих рослин.

A mathematical model of a fluid flow in the rectangular channel or in the illuminator with plants floating on the free surface is proposed, based on the use of the Navier-Stokes equations for the plane problem of a slow stationary flow of a viscous fluid in two areas: a free pressureless flow of fluid and a fluid flow in a porous layer formed with the roots of hyacinths floating on the surface of the liquid. The mathematical model of the non-pressure flow of the fluid with plants floating on the free surface is made and give the determination of the water flow speed depending on the parameters of the surface layer, where the plants root systems are concentrated. It is shown that when using water hyacinth for water purification in a settling pond of the enrichment waste storage, the parameters of the layer floating on the free surface of plants do not affect the fluid flow under it. Moreover, the speed in the layer of floating plants is directly proportional to the porosity of this layer and in a complex way depends on the resistance coefficient of the layer. The formulas obtained are the basis for experiments to determine the dependence of the resistance coefficient of the layer with hyacinths on the parameters of the layer and the geometric characteristics of the plants used. The mathematical models proposed in this work for the first time make it possible to determine the fluid velocity through a layer of hyacinths floating on the free surface, depending on the compactness of their upsetting, which makes it possible to choose the parameters of a layer with hyacinths necessary for clarifying technical water from particles of the given hydraulic size, taking into account the geometric dimensions of the settling pond or cleaning channel of rectangular cross section.

Key words: two-sheet fluid flow, fluid flow in an illuminator, pressureless flow of fluid with a sheet of plants floating on the free surface.

Введение. Продукция железно-рудных комбинатов является одной из главных составляющих экспортного потенциала Украины, а сами предприятия рассматриваются как градообразующие и социально значимые, поскольку обеспечивают работой значительную часть населения Кривбасса [1–3]. Стабильность и рентабельность работы этих предприятий обеспечивают устойчивое развитие как данного промышленного региона, так и соседствующих с ним [4]. Одним из факторов, грозящих остановкой данным предприятиям, является неспособность существующих систем осветления оборотной воды обеспечить требуемую степень ее очистки [5, 6]. Эксплуатируемая с середины прошлого века система складирования отходов обогащения железных руд предполагает укладку частиц гравийных и песчаных фракций на пляжи намыва, а частицы пылеватых, глинистых и меловых фракции, для предотвращения их пыления, складировать под слой воды в ядро хранилища. При этом защитный слой воды образует прудок-отстойник, в котором осветляется оборотная вода, и из которого она поступает обратно в технологический процесс. Эффективность процесса осветления обеспечивалась большими геометрическими размерами прудка-отстойника и малой скоростю течения воды в нем. Однако в процессе эксплуатации дамбы хранилища отходов наращивались многократно, и, учитывая существенный возраст железно-рудных комбинатов Кривбасса, достигли таких высот, что геометрические размеры прудов-отстойников уже не обеспечивают эффективного осветления оборотной воды [1]. Одним из возможных способов восстанволения эффективной работы существующих прудков-отстойников может быть применение растений, плавающих на свободной поверхности водоемов, например, водных гиацинтов, корневая система которых располагается в приповерхностном слое (рис. 1) [7]. Одним из самых быстрорастущих существующих растений, способных за 2 недели удваивать зелёную массу, является водный гиацинт или эйхорния (лат. Eichhornia crassipes) (рис. 2), многолетнее тропическое быстрорастущее растение, способное подниматься на 1 м над поверхностью воды, имеющее корни длиной до 0,5 м, полностью погруженные в воду. Корни этих растений представляют собой густую естественную сеть, способную задерживать и связывать частицы пылеватых, глинистых и меловых фракции, предотвращая их попадание в технологический процесс. Однако для применения такой технологии необходимо выбрать и обосновать параметры приповерхностного слоя с растенимями, рассчитать соответствующие скорости течения воды и пр.

Рис. 1. Пример популяции водных гиацинтов в одном из водоемов Африки

Рис. 2. Водный гиацинт или эйхорния (лат. Eichhornia crassipes)

Целью данной статьи является построение математической модели безнапорного течения жидкости с растениями, плавающими на свободной поверхности, и определение скорости течения воды в зависимости от параметров приповерхностного слоя, где сосредоточены корневые системы растений.

Учитывая особенности рассматриваемого процесса было использовано уравнение Навье-Стокса для плоской задачи медленного стационарного течения вязкой жидкости в двух областях (рис. 3) [8]: свободный безнапорный поток жидкости (область 1) и поток жидкости в пористом слое, образованном корнями плавающих на поверхности жидкости гиацинтов (область 2).

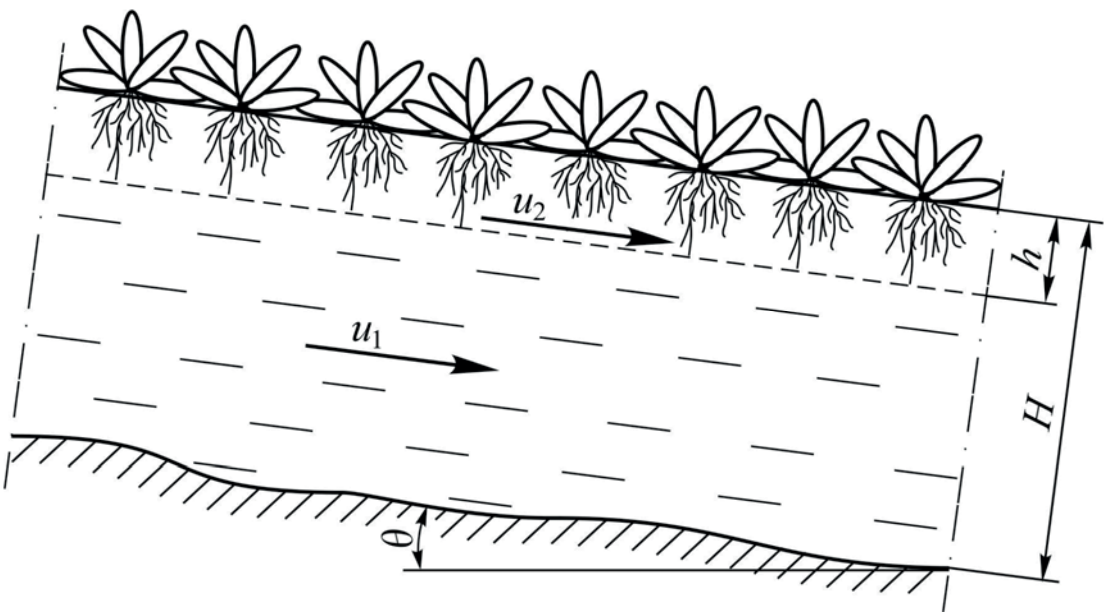

Рис. 3. Схема безнапорного течения в канале жидкости с растениями, плавающими на свободной поверхности

При этом ось ординат предполагается направленной вверх, а ось абцисс – вдоль дна канала. Наличие гиацинтов на свободной поверхности моделируется введением в соответствующие уравнение для области 2 коэффициентов сопротивления и порозности, которые для области 1 равны нулю и единице, соответственно. Переходя к безразмерным координатам и отбросив поперечные скорости, после всех преобразований получим [8]:

$$0 = -\frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} - \rho g H \cos\theta,$$

$$0 = -\frac{\partial p_1}{L\partial \varsigma} - \frac{\partial H}{L\partial \varsigma}\eta_1 \rho g \cos\theta + \rho g \sin\theta + \mu \frac{\partial^2 u_1}{H^2 \partial {\eta_1}^2},$$

$$\varepsilon \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} = -\varepsilon \rho g h \cos\theta,$$

$$0 = -\frac{\varepsilon \partial p_2}{L \partial \varsigma} - \varepsilon \rho g \frac{\partial H}{L \partial \varsigma} \cos\theta + \varepsilon \rho g \sin\theta - k \rho u_2 + \mu \frac{\partial^2 u_2}{h^2 \partial \eta_2{}^2},$$

$$\varsigma = \frac{x}{L}, \quad \eta_1 = \frac{y}{H}, \qquad \eta_2 = \frac{y-H}{h},$$

где p_1 – давление; ρ – плотность; u_1, u_2 – скорости в слоях; g – ускорение свободно падающего тела; k – коэффициент сопротивления слоя с гиацинтами; μ – коэффициент динамической вязкости; θ – угол наклона дна канала к горизонту; ε – порозность слоя с гиацинтами; L – длина канала с сопротивлением; h – толщина слоя с гиацинтами; H – высота слоя от дна канала до слоя с гиацинтами.

Полученная система дифференциальных уравнений рассматривается при следующих граничных условиях. На границе между областями задаются условия равенства давлений, скоростей и их первых производных по продольной координате, а на свободной поверхности – значения давления и скорости жидкости:

$$\text{при } \eta_1 = 1 \text{ и } \eta_2 = 0 - p_1 = p_2, \varepsilon u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{h \partial \eta_1} = \frac{\partial u_2}{H \partial \eta_2},$$

$$\text{при } \eta_2 = 1 - p_2 = p_A, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta_2} = 0;$$

кроме того, учитывается условие сохранения массы:

$$Q = H \int_0^1 u_1 \, d\eta_1 + h \int_0^1 u_2 d\eta_2 = Const,$$

где Q – объемный расход жидкости через канал.

Эти уравнения можно проинтегрировать, представив u_2 в виде комбинации экспоненциальных функций [8], в результате чего будем иметь:

$$p_2 = \rho g h (1 - \eta_2) \cos\theta + p_A, \qquad p_1 = \rho g H (1 - \eta_1) \cos\theta + p_A + \rho g h,$$

$$u_2 = -\frac{\varepsilon}{k\rho} \left[\frac{\partial p_2}{L \partial \varsigma} + \frac{\partial H}{L \partial \varsigma} \rho g \cos\theta - \rho g \sin\theta \right] + a_2 \exp(\lambda \eta_2) + b_2 \exp(-\lambda \eta_2),$$

$$u_1 = b_1 \eta_1 + \frac{1}{2} \frac{H^2}{\mu} \left(\frac{\partial p_1}{L \partial \varsigma} - \rho g \sin\theta \right) \eta_1{}^2 + \frac{1}{6} \frac{H^2}{\mu} \frac{\partial H}{L \partial \varsigma} \eta_1{}^3 \rho g \cos\theta,$$

$$\lambda = \frac{k H^2}{\nu},$$

где b_1, a_2, b_2 – параметры интегрирования, которые определяются из граничных условий.

После соответствующих преобразований формулы для расчета скоростей в каждом из рассматриваемых слоев можно записать в следующем виде:

$$u_1 = \frac{\dfrac{2\left(1+e^{2\lambda}\right)-\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}}{\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}-\left(1+e^{2\lambda}\right)}\left(\dfrac{1}{2}\rho g\dfrac{H^2}{\mu}+\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{2}\rho g\dfrac{H^2}{\mu}\eta_1}{H\dfrac{\Lambda_1}{2}\left[\dfrac{1}{k}+\left(1+\dfrac{2}{3\Lambda_1}\right)\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}\right]+h\Lambda_2\left[\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{\varepsilon}{\Lambda_2 k}\right]}\eta_1 Q,$$

$$u_2 = \frac{\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\rho g\dfrac{H^2}{\mu}-\dfrac{1}{k}\right)\left(e^{\lambda\eta_2}+e^{2\lambda}e^{-2\lambda\eta_2}\right)}{\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}-\left(1+e^{2\lambda}\right)}-\dfrac{\varepsilon}{k}}{H\dfrac{\Lambda_1}{2}\left[\dfrac{1}{k}+\left(1+\dfrac{2}{3\Lambda_1}\right)\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}\right]+h\Lambda_2\left[\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{\varepsilon}{\Lambda_2 k}\right]}Q,$$

$$\Lambda_1 = \frac{2\left(1+e^{2\lambda}\right)-\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}}{\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}-\left(1+e^{2\lambda}\right)},\quad \Lambda_2 = \frac{1}{\left(1-e^{2\lambda}\right)\dfrac{h\lambda}{H}-\left(1+e^{2\lambda}\right)}.$$

Для расчета расходно-напорных хараткеристик канала необходимо знать зависимости средних скоростей в каждом из рассмтариваемых слоев:

$$\overline{u}_1 = \frac{1}{H}\int_0^1 u_1 d\eta,\qquad \overline{u}_2 = \frac{1}{h}\int_0^1 u_2 d\eta_2,$$

для чего, после выполнения всех преобразований, можно рекомендовать следующие формулы:

$$\overline{u}_1 = \frac{\dfrac{\Lambda_1}{2}\left[\dfrac{1}{k}+\left(1+\dfrac{2}{3\Lambda_1}\right)\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}\right]\dfrac{Q}{H^2}}{\dfrac{\Lambda_1}{2}\left[\dfrac{1}{k}+\left(1+\dfrac{2}{3\Lambda_1}\right)\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}\right]+\dfrac{h}{\lambda H}\lambda\Lambda_2\left[\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{\varepsilon}{\Lambda_2 k}\right]}$$

,

$$\overline{u}_2 = \frac{\dfrac{\Lambda_2}{\lambda}\dfrac{\dfrac{1}{h}}{\lambda H}\left[\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{\varepsilon}{\Lambda_2 k}\right]\dfrac{Q}{H^2}}{\dfrac{\Lambda_1}{2}\left[\dfrac{1}{k}+\left(1+\dfrac{2}{3\Lambda_1}\right)\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}\right]+\dfrac{h}{\lambda H}\lambda\Lambda_2\left[\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{\varepsilon}{\Lambda_2 k}\right]}.$$

Полученные формулы для расчета скорости и давления жидкости в обеих областях для случая течения по прямоугольному каналу конечной глубины позволяют получить решение задачи в такой постановке для случая течения в прудке-отстойнике хранилища отходов обогащения (рис. 4).

На основе полученных решений, путем предельного перехода были определены зависимости для осредненных скоростей жидкости в каждой области, для которых был осуществлен предельный переход при соотноошении толшин областей, стремящемся к единице:

$$\lim_{\frac{h\lambda}{H}\to 0}\overline{u}_1 = \frac{Q}{H^2}, \qquad \lim_{\frac{h\lambda}{H}\to 0}\overline{u}_2 = \frac{H}{h}\frac{\dfrac{\varepsilon}{k}+\dfrac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}-3}{\lambda\left(1+e^{2\lambda}\right)}\left(\rho g\dfrac{H^2}{2\mu}-\dfrac{1}{k}\right)}{\dfrac{1}{k}+\rho g\dfrac{H^2}{3\mu}}\frac{Q}{H^2}.$$

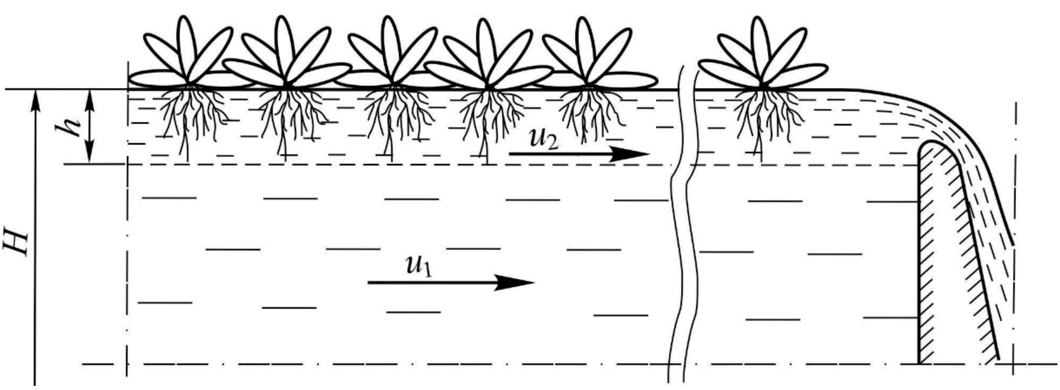

Рис. 4. Схема безнапорного течения жидкости с растениями, плавающими на свободной поверхности в прудке-отстойнике хранилища отходов обогащения

После несложных преобразований, в том числе аппроксимации с точностью, допустимой для инженерных расчетов, получены выражения для средних скоростей в слоях для расчета параметров течения в прудке-отстойнике хранилища отходов обогащения, которые могут быть представлены следующими формулами:

$$\bar{u}_1 = \frac{Q}{H^2}, \qquad \bar{u}_2 = \frac{3\varepsilon}{2\eta}\frac{2K+\lambda}{(3+\lambda)(1+K)}\frac{Q}{H^2}, \qquad K = \varepsilon\left(\eta\sqrt{\lambda} - 0{,}0112\right) - 1,$$
$$\eta = \frac{h}{H}.$$

Выводы. Из приведенных формул видно, что при использовании водного гиацинта для очистки воды в прудке-отстойнике хранилища отходов обогащения, параметры слоя плавающих на свободной поверхности растений не влияют на течение жидкости под ним. При этом, скорость в слое плавающих растений прямопропорциональна порозности этого слоя и сложным образом зависит от коэффициента сопротивления слоя.

Полученные формулы являются основой для проведения экспериментов по определнию зависимости коэффициента сопротивления слоя с гиацинтами от параметров слоя и геометрических характеристик используемых растений.

Предлагаемая в работе математическая модель впервые позволяет определить скорость жидкости через слой плавающих на свободной поверхности гиацинтов в зависимости от компактности их высадки, что позволяет выбрать параметры слоя с гиацинтами, необходимые для осветления технической обортной воды от частиц заданной гидравлической крупности с учетом геометрических размеров пруда-отстойника или очистительного канала прямоугольного поперечного сечения.

Библиографические ссылки

1. Медведева, О. А. Проблемы дальнейшей эксплуатации хранилищ отходов обогащения Кривбасса и теоретические предпосылки их решения [Текст] / О. А. Медведева // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. трудов.- Днепропетровск. – 2012. – №97. С. 155–161.

2. Блюсс, Б. А. Проблемы гравитационного обогащения титан-цирконовых песков [Текст] / Б. А. Блюсс, А. М. Сокил, О. Г. Гоман. – Днепропетровск: Полиграфист, 1999. – 190 с.

3. Семененко, Е. В. Проблемы разработки россыпных месторождений [Текст] / И. Л. Гуменик, А. М. Сокил, Е. В. Семененко, В. Д. Шурыгин. – Днепропетровск: Січ, 2001. – 224 с.

4. Лавникевич, Д. Странная рента [Текст] / Д. Лавникевич // Деловая столица. – № 36, 2019.

5 Ялтанец, И. М. Гидромеханизированные и подводные горные работы: в 2 Т. [Текст] / И.М. Ялтанец. – М.: МИР ГОРНОЙ КНИГИ, 2006. – Т. 1. – Разработка пород гидромониторами и землесосными снарядами. – 2006. – 516 с.

6. Семененко, Е. В. Научные основы технологий гидромеханизации открытой разработки титан-цирконовых россыпей [Текст] / Е. В. Семененко. – Киев: Наукова думка, 2011. – 232 с.

7. Флюрик Е. А. Использование водного гиацинта (эйхорния, лат. Eichhornia crassipes) для очистки сточных вод и получения кормовой добавки [Текст] / **Е. А. Флюрик** // Научные инновационные проекты и инициативы молодежи Белоруссии и Китая: Сб. мат. конф. В рамках Белорусско-Китайского молодежного инновационного форума «Новые горизонты – 2014», 3 – 4 декабря 2014 г. – Минск: БНТУ, 2014. – С. 101 – 102.

8 Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: «Наука», 1978. – 736 с..

Надійшла до редколегії 15.11.2019