

УДК 533.6

В.И. Елисеєв¹, А.П. Толстопят², Л.А. Флеєр², Ю.П. Совит²,
А.Ф. Шевченко³, С.А. Шевченко³

DOI: 10.15421/372009

¹Інститут геотехнічної механіки НАНУ ім. Н. Полякова²Дніпровський національний університет ім. О. Гончара³Інститут чорної металургії НАНУ ім. З. Некрасова**ОТЗЫВ МНОГОМОДУЛЬНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
«СЛОЙ РАСПЛАВА – ФУРМА» НА ЗАДАЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ**

When a gas jet is blown into a liquid layer, a wave motion arises on its surface, which, in the case, for example, of desulfurization processes in ladles with molten cast iron, leads to increased dynamic loads on the fastening truss and to possible metal splashes. When oscillations occur, the lance and liquid metal form a single oscillatory system that reacts to disturbances. To determine the main characteristics of such a system, one can use the well-known representations in the form of a pendulum mathematical model adopted for the analysis of oscillations in tanks with liquids. Such a representation makes it possible to trace the development of the specified disturbances and determine the most dangerous frequencies leading to increased oscillation amplitudes in relation to other disturbances. Due to the fact that the surface waves, due to dispersion, have different characteristics, which are due to the moving masses of the liquid, in this work equations are written for pendulums representing different layers of liquid metal and a tuyere. It is assumed that this or that layer has its own vibration frequency and at the same time it is a component of a deeper layer that vibrates and also has its own resonant frequency. Several examples with different natural frequencies of the lance are considered. The calculation results show that at the same disturbance amplitude, its frequency affects the oscillatory system, especially when this value approaches the natural frequency of the melt. In this case, the amplitudes of vibrations of the liquid and the lance increase sharply. This indicates that under these technological conditions it is necessary that at least the dominant disturbance frequency be as far as possible from the first resonant frequency of the melt.

Key words: oscillatory system liquid-ladle, wave motion in a ladle, pendulum mathematical model, forced disturbances, natural frequency, resonance frequency.

Введение. При продувке слоя жидкости газом на поверхности возникает волнообразное движение, интенсивность которого зависит от подаваемого расхода, от конструкции емкости с жидкостью и от геометрических размеров трубки и ее упругих свойств. Ряд химико-технологических операций, включающих в себя эти элементы, имеют место в металлургии, в частности при обработке расплава чугуна в ковшах [1]. Здесь сильное волнение расплава приводит к большим динамическим нагрузкам на крепеж фурмы и к выплескам металла. Интерес к колебаниям жидкости в сосудах возник давно и связан он, как с научными наблюдениями (волны Фарадея), так и с практической деятельностью, в первую очередь с транспортными проблемами перевозок жидких сред в различных емкостях. Это относится, практически, ко всем видам перевозок железнодорожным транспортом, морскими судами и воздушным грузовым транспортом.

©Елисеєв В.И., Толстопят А.П., Флеєр Л.А., Совит Ю.П., Шевченко А.Ф.,
Шевченко С.А. 2020

При становленні ракетної техніки це направление в механіці отримало великий імпульс, т. к. коливання рідини (топлива і горючого) в баках вносили значительні порушення в динаміку ракети, що значительно ускладнювало управління її польотом. В нашому випадку, крім практичного інтересу до впливу коливань на процеси обробки рідинних серед, з'являються і теоретичні питання про виникненні цих коливань і про взаємодії коливаючої рідини з судиною і з фурмою.

Дослідження розвитку і руху поверхневих хвиль в шарах рідини є одним з основних напрямків в механіці і йому присвячено велика кількість робіт (см. наприклад [2, 3]). Актуальним розділом цього напрямку, як уже відзначалося, є хвильовий рух рідини в ємкостях. Тут були отримані важливі результати [4, 5], розкривають динамічні характеристики хвильових процесів в судинах. В основі цих досліджень покладена потенціальна теорія руху несжимаємої рідини. В наше час, ввиду того що динамічні величини при хвильовому русі в шарах, часто переважають над в'язкими ефектами, ця теорія не втратила свого значення, однак навіть при сучасному розвитку чисельних методів вона має свої складності в розгляді прикладних завдань. Принципово важливим спрощенням в розгляді динаміки тіл з рідинними шарами, яке використовується в розрахунках руху ракет, є представлення коливаючих шарів в вигляді маятників [6]. Така постановка не розкриває повністю процес взаємодії, однак на загальному фізичному рівні показує важливі деталі розвитку руху розглядаємої коливної системи. Це відзначається і в статті [7], присвяченій методіці викладання оптичних явищ. В роботі [8] був використаний цей підхід для розгляду взаємодії коливаючого шару розплаву з фурмою, при цьому фурма і шар рідини розглядалися як одночастотні маятники. Як правило, перша мода практично визначає динамічні характеристики системи і її навантаження, які розвиваються в час процесу. В нашому випадку рішення буде підказувати умови, при яких виникають найбільш напружені ситуації. Однак, для поверхні рідини характерна багатомодова (теоретично нескінченна) картина коливань. При цьому деякий інтервал частот може мати певне суттєве вплив. Так, наприклад, самі вибухи, звичайно, є наслідком коливань з низкими частотами, однак крім таких порівняльно рідких підйомів виникають локальні високі вспучування і навіть кумулятивні струйки, які породжуються вже значительно більш високими частотами [9].

Частотний аналіз, як поверхні шару, так і прифурменної зони, зроблений в [10, 11] показує широкий спектр частот, який характерний для даного процесу. Це говорить про те, що розглядаєма модель в принципі, не може охопити багато цікавих сторін досліджуваного процесу, однак вона може бути корисною в практичних ситуаціях. Таким чином, представимо, що шар розплаву і фурма є єдиною коливної системою зі своїми динамічними характеристиками. Вона піддається впливу деяких порушень, які приводять її в рух. В розглядаємих процесах таке порушення викликає струя, виривається з фури і утворюються бульбашки

газа, которые всплывают в расплаве. В [11] показаны наблюдаемые эффекты при отрыве пузырей от прифурменного газового объема и приведены формулы для определения основной частоты отрыва. Силовое воздействие газовой составляющей оценить довольно сложно, поэтому в данной постановке будем проследивать степень восприимчивости колебательной системы к определенной частоте возмущения при постоянной его амплитуде. Понятие восприимчивости системы хорошо известно, например, в теории развития турбулентного режима движения в пограничных слоях [12]. Здесь же для нас важно определить те значения частот, которые вызывают наибольшие амплитуды колебаний системы.

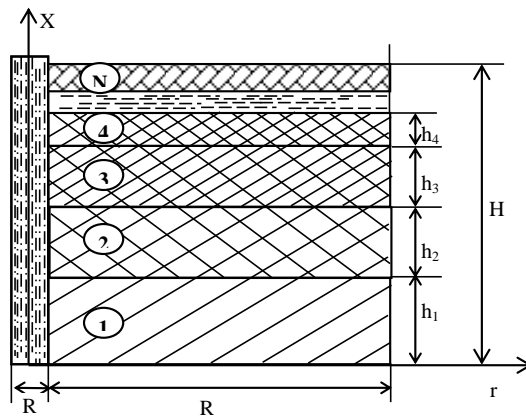


Рис. 1. Схема слоев.

Математическая постановка задачи. В классическую форму уравнения колебания маятника входит равенство сил – инерционной и упругой. В нашем случае необходимо включить еще силы взаимодействия между двумя телами: силу сопротивления и силу, связанную с присоединенной массой [13]. Учитывая многомодульность колебаний жидкости, представим, что областям с номерами 1, 2 и далее (рис. 1) соответствуют маятники с такими же номерами, обладающими резонансными частотами. Так, например, для области 1 (эта область самая глубокая с одной первой резонансной частотой f_1 , т. к. она принадлежит всему столбу жидкости, который может колебаться с этой частотой) соответствует маятник с массой M_{G1} . Для области 2 характерно две резонансные частоты: f_1 и f_2 , т.к. она одновременно является составной частью всего столба жидкости, имеющего резонансную частоту f_1 , а также принадлежит к менее глубокому столбу жидкости, который имеет свою резонансную частоту f_2 . Этому слою соответствует маятник с массой M_{G2} . Выше области 2 находится следующая область, которая принадлежит, во-первых, всему столбу жидкости; во-вторых, столбу поменьше, имеющему частоту f_2 и слою с еще меньшей глубиной, имеющему резонансную частоту f_3 и т. д. Резонансные частоты определяются из соотношения [5]:

$$(2\pi f_k) = \left\{ g \frac{\lambda_k}{R} \frac{[\exp(\chi_k) - \exp(-\chi_k)]}{[\exp(\chi_k) + \exp(-\chi_k)]} \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где $\chi_k = \frac{H}{R} \lambda_k$; H – высота слоя жидкости в сосуде; R – радиус сосуда; g – ускорение свободно падающего тела, λ_k – собственные числа. Из выражения (1) видно, что при больших величинах χ_k формула несколько упрощается –

$$(2\pi f_k) = \left\{ g \frac{\lambda_k}{R} \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

откуда следует, что резонансная частота при больших произведениях $H\lambda_k$ определяется только собственным числом. Это указывает на то, что определенная частота колебания соответствует определенной глубине слоя, что хорошо известно из литературы, например [5], при этом с увеличением частоты глубина слоя уменьшается. Примерную высоту такого слоя можно определить из условия малости величины $\exp(-2\chi_k)$ по сравнению с единицей. Например, положив

$\exp(-2\chi_k) = 0.001$, получим $\chi_k = \chi^* = -0.5 \ln(0.001)$, тогда $h_k = \frac{\chi^* R}{\lambda_k}$, т.е. получены те

глубины слоев, на которые распространяются колебания с соответствующими резонансными частотами. Воспользуемся теперь данными в [5] собственными величинами и получим значения резонансных частот и, соответственно им, глубины слоев (таблица 1)

Таблица 1.

Значения собственных чисел, резонансных частот и высот слоев для соответствующих областей

k	λ_k	f_k (Гц)	h_k (м)	$\Delta h_k = h_k - h_{k-1}$
1	1.803	0.479	3.735	2.425
2	5.140	0.809	1.310	0.488
3	8.195	1.022	0.822	0.229
4	11.355	1.203	0.593	0.133
5	14.635	1.366	0.460	0.0858
6	17.990	1.514	0.374	0.0594
7	21.384	1.651	0.315	0,030

В этой таблице первая строчка указывает на номер слоя, последняя – высоты соответствующего слоя снизу. Первому слою с высотой Δh_1 соответствует только первая резонансная частота 0.479 Гц, второму слою высотой 0.488 м соответствуют две резонансные частоты 0.479 Гц и 0.809 Гц, точнее, он участвует в колебании более глубокого слоя и имеет свою собственную частоту и т.д.

Выпишем теперь уравнения движения слоев, принимая их, как маятники

$$M_{Gk} \frac{d \sum_j^k U_{Gj}}{dt} = -(2\pi)^2 M_{Gk} \sum_j^k f_j^2 X_{Gj} - M_{Pk} \left(\frac{d \sum_j^k U_{Gj}}{dt} - \frac{dU_F}{dt} \right) -$$

$$- k \rho_G S_{Fk} \left(\sum_j^k U_{Gj} - U_F \right) + a_k \frac{M_{Gk}}{M_G} \sin(2\pi f_P t) \quad (3)$$

$$M_F \frac{dU_F}{dt} = -(2\pi f_F)^2 X_F + \sum_k^N M_{Pk} \left(\frac{d \sum_j^k U_{Gj}}{dt} - \frac{dU_F}{dt} \right) + k \rho_G \sum_k^N S_{Fk} \left(\sum_j^k U_{Gj} - U_F \right) \quad (4)$$

которые после несложных преобразований можно записать в более удобном для интегрирования виде:

$$\left(M_F + \sum_k^N \frac{M_{Pk} M_{Gk}}{(M_{Pk} + M_{Gk})} \right) \frac{dU_F}{dt} = -(2\pi f_F)^2 X_F - (2\pi)^2 \sum_k^N \frac{M_{Pk} M_{Gk}}{(M_{Gk} + M_{Pk})} \sum_j^k f_j^2 X_{Gj}$$

$$+ k \rho_G \sum_k^N S_{Fk} \frac{M_{Gk}}{(M_{Gk} + M_{Pk})} \left(\sum_j^k U_{Gj} - U_F \right) + \sum_k^N a_k \frac{M_{Pk}}{(M_{Gk} + M_{Pk})} \frac{M_{Gk}}{M_G} \sin(2\pi f_P t), \quad (5)$$

$$(M_{Gk} + M_{Pk}) \frac{d \sum_j^k U_{Gj}}{dt} = -(2\pi)^2 M_{Gk} \sum_j^k f_j^2 X_{Gj} + M_{Pk} \frac{dU_F}{dt} -$$

$$- k \rho_G S_{Fk} \left(\sum_j^k U_{Gj} - U_F \right) + a_k \frac{M_{Gk}}{M_G} \sin(2\pi f_P t), \quad (6)$$

где t – время; X_{Gj} , X_F – перемещения массы жидкости в j -х слоях и фурмы; U_{Gj} , U_F – скорости слоя жидкости в j -х слоях и фурмы соответственно; M_{Gj} , M_F , M_{Pj} – масса жидкости j -го слоя, фурмы и присоединенная масса; ρ_G – плотность жидкости; S_F – площадь поперечного сечения фурмы; k – коэффициент сопротивления фурмы; f_j – резонансная частота j -го слоя, f_F – резонансная частота фурмы, f_P – частота изменения возмущающей силы; a – амплитуда

возмущающей силы. В данной работе будем рассматривать колебания семи слоев ($N = 7$). Если в этой системе оставить уравнения только с $N = 1$, то будем иметь задачу, рассмотренную в [8], в которой учитывалось только взаимодействие фурмы с основным слоем жидкости. Выписанная система позволяет проследить возникновение на поверхности жидкости волн с более высокими частотами и влияние их на основную область.

Результаты расчетов. Расчеты проводились для случая, когда масса фурмы $M_F = 2100$ кг, а ее собственная частота в закрепленном состоянии, определяемая по фильму, примерно равна двум, т.е. $f_F = 2$ Гц. Покажем теперь несколько примеров с разными задаваемыми возмущающими частотами f_P .

1. $f_P = 0.5 \cdot f_1 = 0.2395$ Гц. На рис. 2 и 3 приведены кривые колебания фурмы и расплава чугуна в области 1 для указанной частоты возмущения, найденные численно по приведенным уравнениям. На рис. 4, 5, 6 показана спектральная плотность этих колебаний, вычисленная с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Здесь условная максимальная амплитуда колебаний фурмы составляет примерно 0.001, а слоя металла еще меньше. Расчет колебаний других слоев, находящихся выше показывает такую же картину колебаний с небольшими добавками. Из рисунков группы Б следует, что фурма имеет две характерные частоты, которые резко выделяются от остальных. Слой металла имеет одну характерную величину, которая совпадает с резонансной частотой этого слоя f_1 . Значительно ниже этого пика имеется несколько всплесков, заключенных в небольшом интервале частот. Для следующего слоя (на рис. не показано) этот интервал несколько расширяется, т.к. добавляются частоты, соответствующие этому слою. Высоты этих пиков близки к показанным всплескам. Такие добавки появляются и для следующих слоев. На рис. 6 приведена частотная характеристика для самого высокого седьмого слоя. На нем также хорошо виден основной пик, соответствующий f_1 и группа всплесков, соответствующих всем расчетным слоям. Другая картина наблюдается, когда возмущающая частота совпадает с резонансной частотой слоя 1.

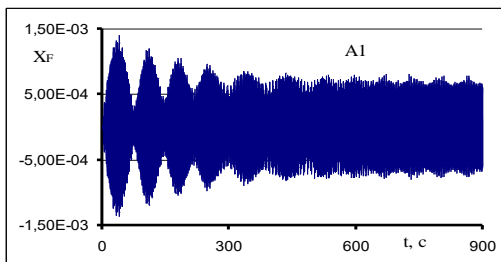


Рис. 2. Колебание фурмы

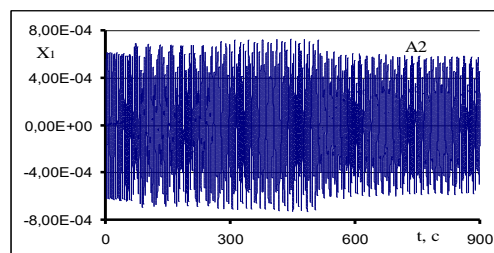


Рис. 3. Колебание первого слоя

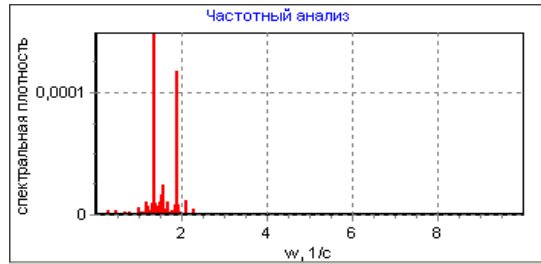


Рис. 4. Спектральная плотность колебаний фурмы

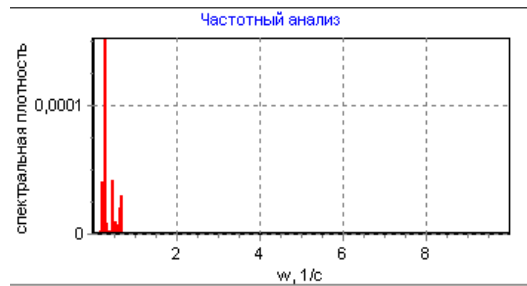


Рис. 5. Спектральная плотность колебаний первого слоя

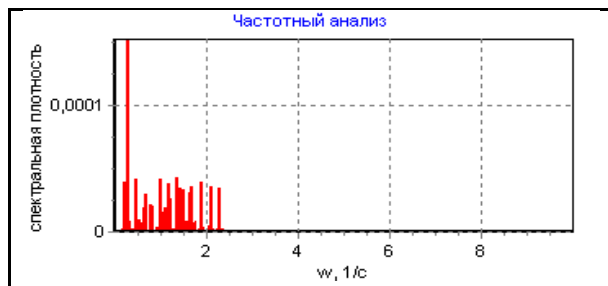


Рис. 6. Спектральная плотность колебаний сьомого слоя.

2. $f_P = f_1 = 0.479$ Гц. Из рис. 7 и 8 видно, что колебания фурмы и слоя жидкости по форме похожи друг на друга, при этом амплитуды этих колебаний более чем на порядок больше предыдущего случая. Для следующих слоев кривые колебания (они не показаны) слабо отличаются от приведенных. На рис. 9 – 10 хорошо выделяется полоса частот в районе резонансной частоты слоя жидкости f_1 . Для следующих слоев добавки импульсов, видимо, незначительны по сравнению с основными, вследствие чего на графиках в данном масштабе они не видны, т.е. спектральные плотности для всех остальных слоев примерно такие же, как на рис. 10 (рисунок не приведен).

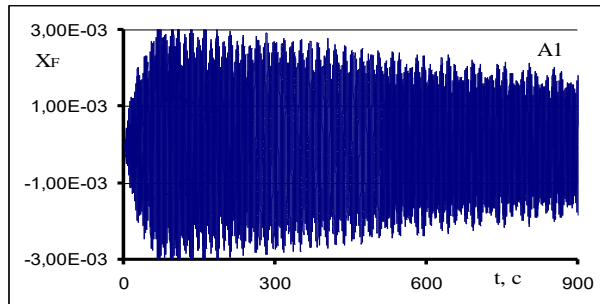


Рис. 7. Колебания фурмы

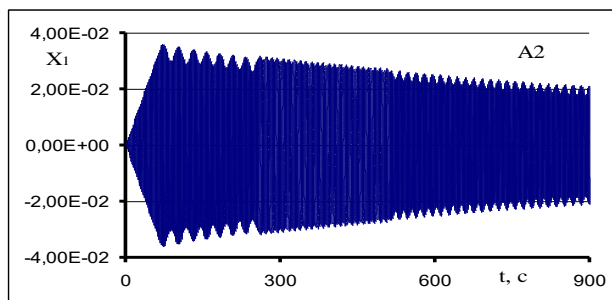


Рис.8. Колебания первого слоя

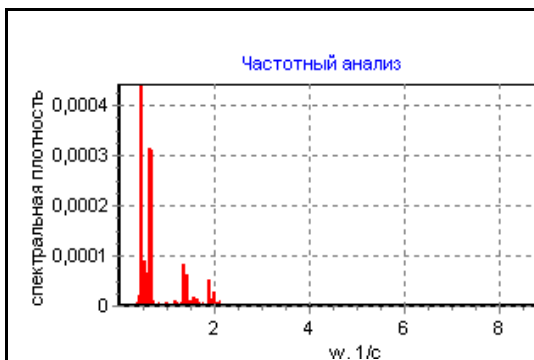


Рис. 9. Спектральная плотность колебаний фурмы.

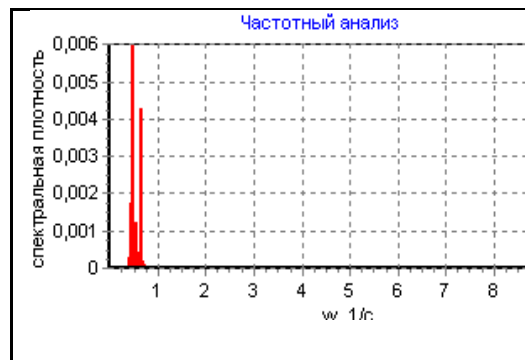


Рис. 10. Спектральная плотность колебаний первого слоя.

3. $f_P = 0.5 \cdot (f_1 + f_2) = 0.644$ Гц. Как показывают рис. 11, 12, 13 амплитуды этих колебаний по сравнению со вторым примером небольшие, но вид кривой колебания первого слоя довольно интересен. Кривая колебания седьмого слоя (13) похожа на кривую нижнего слоя, но вследствие дополнительных степеней свободы имеет

более «растрепанный» вид. Частотный анализ показывает два больших пика в колебании фурмы (рис. 14), компактную группу пиков в колебании основного слоя и, как уже отмечалось выше дополнительные всплески, следующих более высоких слоев.

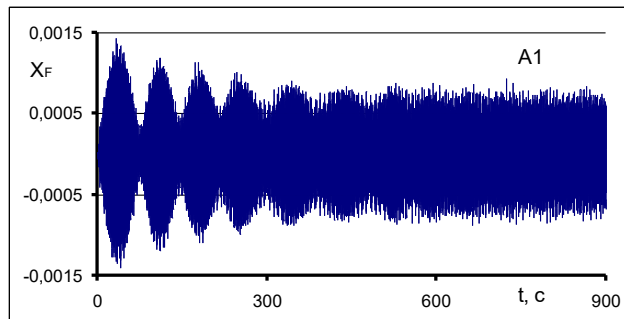


Рис. 11. Колебания фурмы

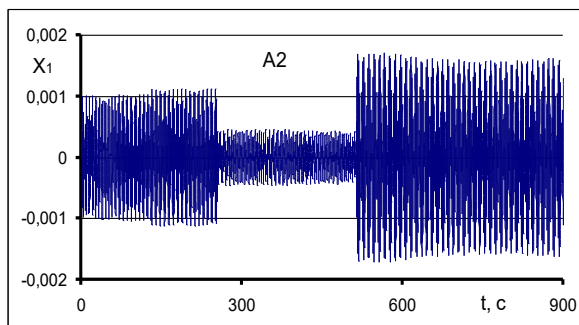


Рис.12. Колебания первого слоя

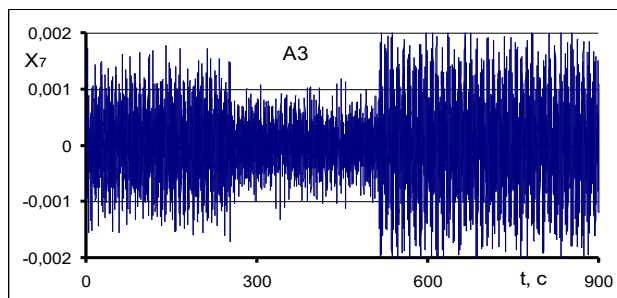


Рис.13. Колебания седьмого слоя

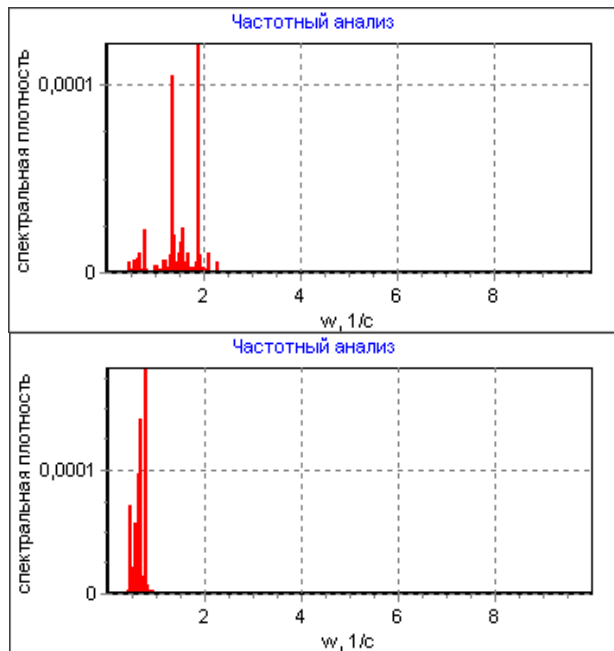


Рис. 14. Спектральная плотность колебаний фурмы

Рис. 15. Спектральная плотность колебаний первого слоя

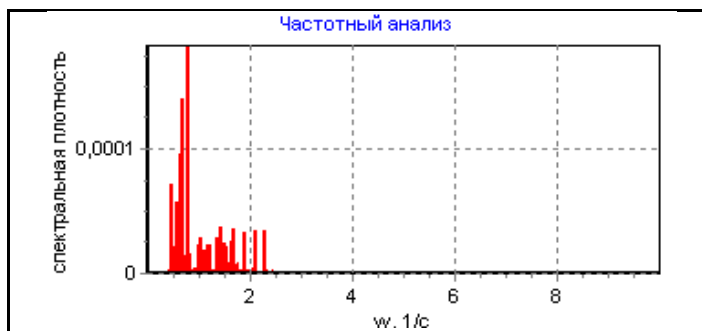


Рис. 16. Спектральная плотность колебаний седьмого слоя

4. $f_p = f_2 = 0.809$ Гц. Для этой возмущающей частоты кривая колебания фурмы в масштабах показанных рисунков практически не отличается от предыдущего (рис.11), это относится также и к спектральной плотности (они не показаны). Кривые колебания первого и седьмого слоев показаны на рис. 17 и 18, из которых видно, что амплитуды этих колебаний также малы по сравнению со вторым случаем. Сравнивая их друг с другом, можно заметить, что дополнительные степени свободы слоев вносят свои изменения, добавляют

какую-то «ворсистость» в картину, в результате чего структура размазывается, при этом амплитуда верхнего слоя увеличивается раза в 2–3. Спектральные плотности колебаний первого слоя и последнего (рис. 19 и 20) отличаются дополнительными всплесками, при этом сами значения пиков заметно отличаются от предыдущих случаев.

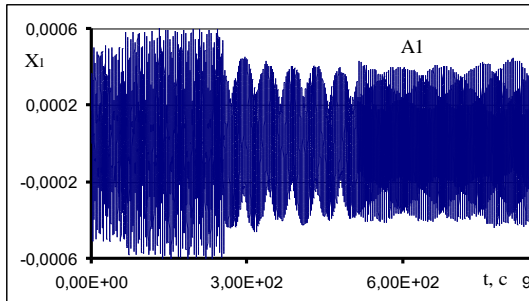


Рис. 17. Колебания первого слоя

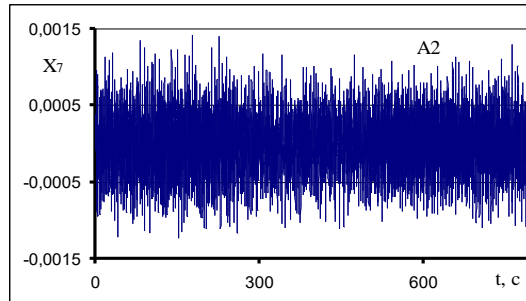


Рис. 18. Колебания седьмого слоя

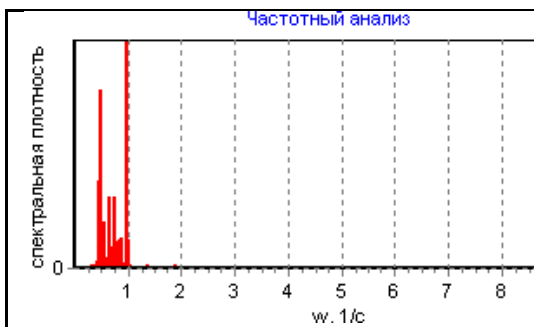


Рис. 19. Спектральная плотность колебаний первого слоя

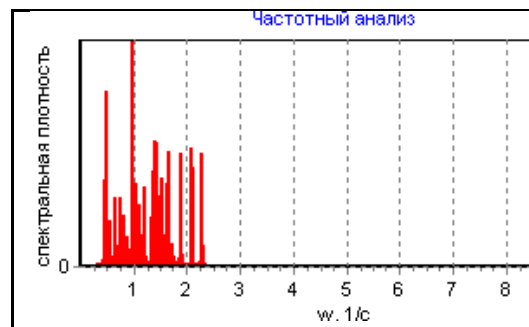


Рис. 20. Спектральная плотность колебаний седьмого слоя

5. $f_P = f_3 = 1.022$ Гц. Кривые колебания фурмы, первого и седьмого слоев показаны на рис. 21 – 23. Сравнивая кривые, показанные на рис. 21 и 11, можно отметить, что визуально в масштабах рисунков они практически не отличаются друг от друга. Слабое отличие наблюдается и в спектральных характеристиках (рис. 24 и 14). При сравнении рис. 22 и 23 видно, что верхний слой колеблется практически хаотично. Отличие в спектральных характеристиках колебаний слоев (рис. 25 и 26) состоит в добавлении к характерным частотным пикам первого слоя нескольких частотных дополнительных пиков, амплитуда верхнего слоя также в отдельных случаях увеличена раза в 2–3.

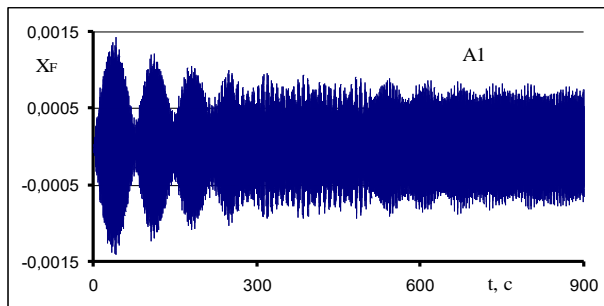


Рис. 21. Колебания фурмы

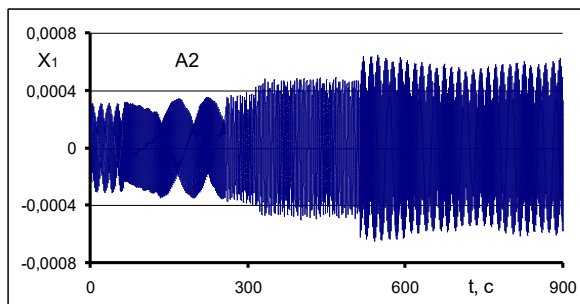


Рис.22. Колебания первого слоя

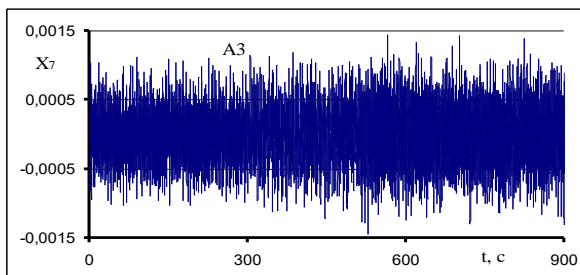


Рис.23. Колебания седьмого слоя

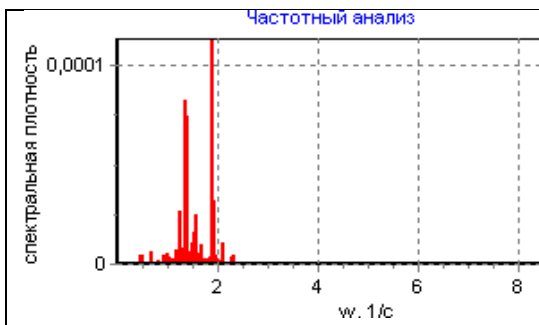


Рис. 24. Спектральная плотность колебаний фурмы

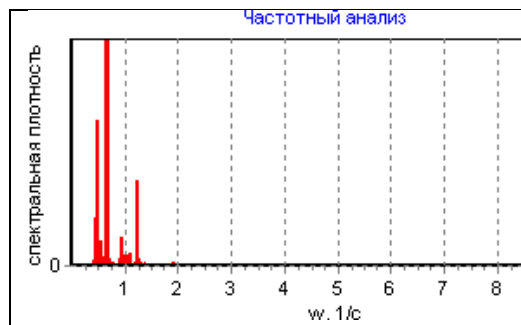


Рис. 25. Спектральная плотность колебаний первого слоя

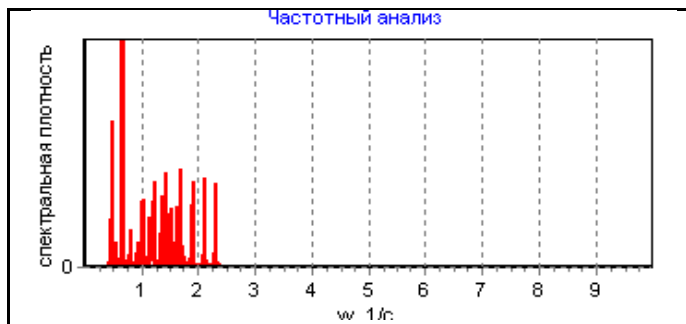


Рис. 26. Спектральная плотность колебаний седьмого слоя

Из приведенных примеров видно, что близость возмущающей частоты к резонансной частоте основного слоя приводит систему в сильное возбуждение, в результате чего амплитуда колебаний значительно возрастает, при этом форма практически следует за слоем жидкости. С ростом возмущающей частоты силовое воздействие возмущений как бы ослабевает. Интересно отметить, что в тех масштабах рисунков, можно увидеть некоторые как – бы структуры колебаний. Это хорошо просматривается в кривых колебания фурмы, а также для первого слоя. Например, на рис. 3, 8, 12, 17, 22 можно заметить некоторые повторяющиеся структуры, которые либо меняются с другими, либо исчезают в более беспорядочном характере колебаний.

6. $f_p = 0.538$ Гц. Подобная структура колебаний была найдена в [8], когда частоты фурмы и слоя жидкости были близки друг к другу, а задаваемая частота была в середине этого отрезка. Здесь ситуация несколько иная – частоты фурмы и первого слоя достаточно далеки друг от друга, однако картина колебаний близка к той, показанной в [8]. Этот случай довольно интересен и требует дополнительного рассмотрения. Здесь видно, что довольно длительное время система синхронизируется. На этом отрезке времени амплитуды колебаний малы, а затем идет резкий рост амплитуды колебания всех слоев расплава. Для всех остальных

слоев картины колебания практически одинаковы, т.е. все слои колеблются, как один слой с амплитудой, даже большей, чем в резонансном случае, вследствие этого и спектральная плотность колебания седьмого слоя не отличается от рис 30. Представляет ли этот пример реальный эффект – не ясно, однако хорошо известно, что эффект биения часто наблюдается в нелинейных системах и в, частности, он проявляется даже в прокатных станах [14].

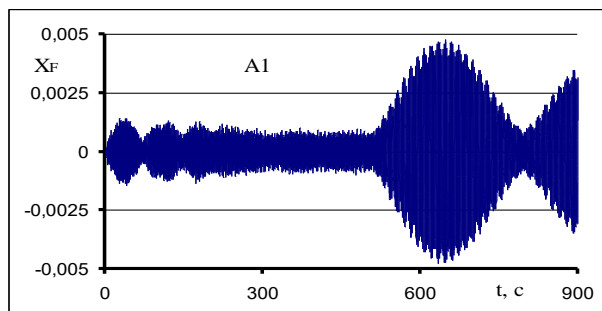


Рис. 27. Колебания фурмы

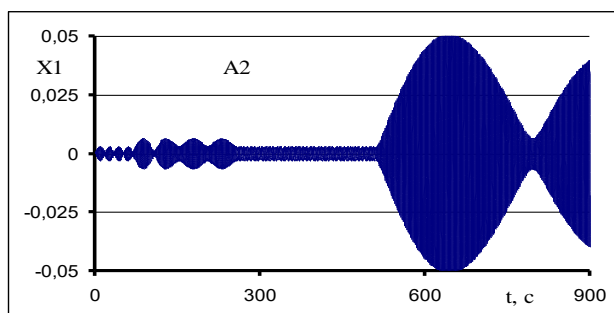


Рис. 28. Колебания первого слоя

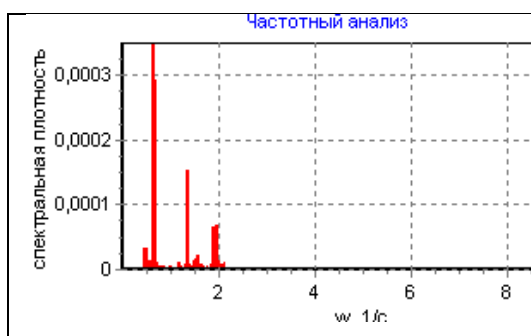


Рис. 29. Спектральная плотность колебаний фурмы

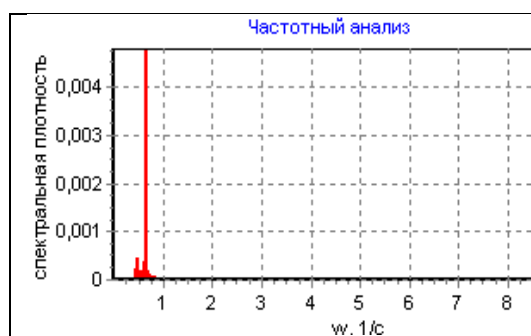


Рис. 30. Спектральная плотность колебаний первого слоя

Выводы. На основе математической модели колебаний маятников рассмотрена система, состоящая из слоев жидкости (семи) и фурмы. Ввиду того, что масса расплава значительно больше массы фурмы частота, близкая к резонансной частоте основного слоя практически определяет поведение системы при ее возмущении, т.е. система со значительно большей энергией откликается на возмущения, у которых частота близка к собственной частоте основного слоя жидкости. Однако в отличие от работы, в которой участвовали две резонансные частоты, здесь картина колебаний сложнее, т.к. каждый слой вносит свою добавку в общее колебание системы. В результате этого спектральная плотность колебаний более высокого слоя несколько богаче. Она содержит всплески более низких слоев и дополняется своими импульсами с более высокими частотами. Здесь еще раз можно подчеркнуть на примере рис. 12 и 13, что сравнительно четкая структура колебания первого глубокого слоя в верхнем седьмом слое размывается и приобретает более хаотичный характер. Однако влияние основной резонансной частоты, т.е. частоты основного слоя, является преобладающим. Помимо этого выявлен еще один интересный режим колебаний, похожий на биение в нелинейных системах, при этом амплитуда колебаний слоев, практически одинаковая для всех, начиная с некоторого момента времени, резко возрастает и достигает величины даже большей, чем в резонансном случае. Этот интересный случай требует своего более подробного изучения.

Бibliографические ссылки

1. **Шевченко А. Ф.** Внепечная десульфурация чугуна в ковшах. Технология, исследования, анализ, совершенствование [Текст] / А. Ф. Шевченко, И. А. Маначин, А. С. Вергун, Б. В. Двоскин, В. Г. Кисляков, С. А. Шевченко, А. В. Остапенко. – Днепр. Дніпро – VAL. 2017. – 253 с.
2. **Черкесов Л. В.** Гидродинамика поверхностных и внутренних волн [Текст] / Л. В. Черкесов. – Киев: Наукова думка. 1976. – 304с.
3. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. – М.: Мир. 1977. – 622 с.
4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости [Текст] / Л. Н. Сретенский. – М., 1977. – 816 с.
5. **Моисеев Н.Н.** Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости [Текст] / Н. Н. Моисеев, А. А. Петров. – Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 3. – М. Вычислит. Центр АН СССР. 1966. – 269 с.
6. **Колесников К. С.** Динамика ракет: Учебник для вузов [Текст] / К. С. Колесников. – М. Машиностроение. 2003. – 520 с.
7. **Зельдович Б.Я.** Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений [Текст] / Б. Я. Зельдович, М. Дж. Суало // Успехи физических наук. – 2004. Т.174, № 12. – С. 1337 – 1354.
8. **Yeliseiev V.** Response of oscillatore system «liquid layer – rod» to driving disturbances [Text] / V. Yeliseiev, V. Lutsenko, S. Shevchenko, A. Shevchenko, O. Tolstopyat, L. Fleer // Essays of Mining Science and Practice 2019. Web of Conferences 109, 00118 (2019). – P. 1–9.

9. **Елисеєв В. И.** Динамика поверхности жидкости при подаче газового потока через вертикальную заглубленную фурму [Текст] / В. И. Елисеєв, Т. А. Рузова, А. П. Толстопят, Л. А. Флеєр, А. Ф. Шевченко, С. А. Шевченко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. – 2011. – Вип. 15, Т. 1. – С. 112–119.
10. **Елисеєв В. И.** Моделирование амплитудно-частотных характеристик колебаний системы жидкость – прифурменный газовый объем [Текст] / В. И. Елисеєв, Ю. П. Совит, А. П. Толстопят, Л. А. Флеєр // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. – 2014. – Вип. 18, Т. 1. – С. 17–25.
11. **Елисеєв В. И.** Частота отрыва пузырей от газового прифурменного объема / В. И. Елисеєв, А. П. Толстопят, Л. А. Флеєр [Текст] // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. – 2013. – Вип. 17, Т. 1. – С. 86–94.
12. **Качанов Ю. С.** Возникновение турбулентности в пограничном слое [Текст] / Ю. С. Качанов, В. В. Козлов, В. Я. Левченко. – Новосибирск. Наука. 1982. – 152с.
13. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: ДРОФА. 2003. – 840 с.
14. **Большаков В. И.** Особенности определения параметров биения при исследовании динамики машин [Текст] / В. И. Большаков, В. В. Буцукин. – С. 300 – 306

Надійшла до редколегії 7.12..2020