УДК 536.24, 532.5, 519.6, 008.2, 004.416

Ю.В. Бразалук, Д.В. Євдокимов, О.В. Хамініч
doi: 10.15421/372001
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

КРЕДО МИКОЛИ ПОЛЯКОВА ТА ЙОГО СПАДЩИНА В НАУКОВОМУ ПРОСТОРІ

В роботі висвітлено наукову працю видатного українського вченого у галузі обчислювальної механіки, доктора фізико-математичних наук, члена-кореспондента Національної академії наук України, професора Полякова М. В. на фоні стану та тенденцій розвитку обчислювальної гідромеханіки, аналізу розвитку теорії обчислювального потенціалу щодо динаміки рідини.

Видатний радянський та український вчений у галузі обчислювальної механіки, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України, професор Микола Вікторович Поляков протягом останніх двох десятиліть був керівником наукової школи з обчислювальної механіки та динаміки рідини в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара. Основною галуззю його наукової діяльності була теорія обчислювального потенціалу та її застосування для розрахунку потоків рідини. Микола Поляков розпочав своє дослідження із застосування аналітичних підходів та наближених аналітичних методів до проблем вільного поверхневого потоку, зокрема, проблем проникнення. Після цього він виявив, що обчислювальні методи теорії потенціалу надзвичайно ефективні для чисельного вирішення розглянутого класу задач. Завдяки високій ефективності розробленого чисельного підходу він дав багато цікавих та якісних результатів, які сформулювались як у монографії, так і в його докторській дисертації. Наступний етап досліджень професора Полякова М. В. був присвячений розробці високоефективних алгоритмів теорії обчислювального потенціалу, включаючи метод граничних елементів та лагранжеві алгоритми дискретного вихрового методу та методів дискретних особливостей. Висока точність та ефективність для складних областей вирішення геометричних форм методу граничних елементів дала можливість успішно застосовувати його до широких класів гідродинамічних та тепло- і масообмінних задач. В останні роки, окрім своїх робіт з теорії обчислювального потенціалу, професор Поляков М.В. цікавився загальними питаннями математичного моделювання та чисельного моделювання.

Ключові слова: гідродинаміка, чисельні методи, обчислювальний потенціал, дискретні особливості.

The paper covers the scientific work of a prominent Ukrainian scientist in the field of computational mechanics, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Polyakov M.V. against the background of trends and trends in computational hydromechanics, analysis of computational potential theory of fluid dynamics.

Prominent Soviet and Ukrainian scientist in the fields of computational mechanics, Doctor of physical and mathematical sciences, correspondent-member of National Academy of Science of Ukraine, Professor Mykola Victorovych Poliakov passed away September of 2020.

During last two decades, he was a leader of computational mechanics and fluid dynamics scientific school in Oles Honchar Dnipro National University. The main field of his scientific activity was computational potential theory and its application to calculation of fluid flows. The present paper is devoted to analysis of development of computational potential theory concerning fluid dynamics, using scientific activity of Professor M. V. Poliakov as an example. Mykola Poliakov started his research with application of analytical approaches and approximate analytical methods to free surface flow problems, in particular, penetrating problems. After that, he found that computational method of potential theory are extremely effective for numerical solution of the considered class of problems. Because of high effectiveness of the developed numerical approach, it provided a lot of interesting and

high quality results, which were formed as monograph and doctor of science dissertation of M.V. Poliakov. The following stage of Professor M.V. Poliakov's investigations was devoted to development of high effective algorithms of computational potential theory, including boundary element method and Lagrangian algorithms of discrete vortex method and discrete singularity methods. High accuracy and effectiveness for complex geometrical shape solution domains of boundary element method gave an opportunity to successfully apply it to wide classes of hydrodynamic and heat and mass transfer problems. Last years, beside of his works in computational potential theory, Professor M. V. Poliakov was interested in general questions of mathematical modelling and numerical simulation.

Key words: hydrodynamics, numerical methods, computational potential, discrete singularities

Видатні постаті залишають після себе значні сліди. Не важливо, де вони себе проявили: чи то суспільне життя, чи то наука, чи то громадська діяльність. Саме до таких особистостей можна в повній мірі віднести ректора Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, видатного вченого в областях механіки та прикладної математики, члена-кореспондента Національної Академії наук України, доктора фізико-математичних наук, професора Миколи Вікторовича Полякова, відомого широкому колу здебільшого через свою величезну багаторічну суспільну, навчальну, організаційну та адміністративну діяльність.

Авторам цієї роботи вдалося прийняти участь у наукових дослідженнях, проведених під керівництвом професора Полякова, і вони вважають своїм обов'язком розповісти про професора Миколу Вікторовича Полякова як про блискучого вченого і організатора науки.

Творчий шлях члена-кореспондента Національної академії наук України, доктора фізико-математичних наук, професора Миколи Вікторовича Полякова може служити зразком для будь-якого вченого-механіка – прямо і послідовно. Зберігаючи вірність одному обраному на самому початку напрямку, він пройшов цей шлях від перших спроб розв'язати задачі гідромеханіки течій з вільною поверхнею до сучасних надскладних багатомасштабних задач механіки суцільного середовища. Напевно, це щастя для будь-якого дослідника опинитися на самому початку, у момент зародження напрямку, і потім протягом усього творчого життя йти пліч-о-пліч з провідними науковцями, що рухають цей напрямок уперед. Однак, насправді, творчий шлях Миколи Вікторовича Полякова не був ні безхмарним, ні очевидним. Це був шлях дискусій та суперечок, боротьби за власний напрямок, а також тривалого багатолітнього пошуку в ситуаціях, які здавалися важкими, а іноді й безнадійними. Багато з цих дискусій тривають і досі, генеруючи нові питання, формулюючи нові задачі, деякі ж дискусії закінчились, сформувавши як результат нові напрямки та тенденції. Автори цього нарису бачать свою мету у тому, щоб показати наукову працю Полякова М.В. на фоні стану та тенденцій розвитку обчислювальної гідромеханіки. Слід зазначити, що творчий шлях Миколи Вікторовича Полякова притягує увагу науковців та істориків науки протягом вже досить тривалого часу [1, 2], та представляється, що такий інтерес збережеться у майбутньому, оскільки він завжди був у центрі бурхливих дискусій щодо шляхів розвитку обчислювальної гідромеханіки.

Практично вся професійна діяльність Полякова М.В. була пов'язана з Дніпровським національним університетом імені Олеся Гончара. Саме сюди після закінчення технікуму і нетривалої роботи в Конструкторському бюро «Південне»

прийшов юний абітурієнт Микола Поляков. На механіко-математичному факультеті університету він був студентом, аспірантом, тут він зустрів свого вчителя – професора Олега Гавриловича Гомана, тут підготував та захистив кандидатську, а потім і докторську дисертації, тут він працював на посадах молодшого наукового співробітника, асистента, доцента, професора, завідувача кафедри диференціальних рівнянь, декана механіко-математичного факультету. В подальшому в університеті він обійняв посаду проректора з навчальної роботи; першого проректора, нарешті, останні двадцять два роки професор М. В. Поляков очолював Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара. За свій внесок в розвиток науки та освіти був обраний членом-кореспондентом Національної Академії наук України. За кожним з перерахованих кроків по кар'єрних щаблях стояли не зв'язки та везіння, а велика, самовіддана праця, яка дуже часто набагато перевищувала можливості звичайної людини. Але, незважаючи на велику завантаженість проблемами університету і міста, особистими і службовими питаннями безлічі студентів, викладачів і співробітників, Микола Вікторович залишався активно діючим вченим, який не тільки отримував нові наукові результати в традиційних для себе областях, а й постійно активно розширював коло своїх наукових інтересів. Оскільки численні і різноманітні успіхи Миколи Вікторовича в самих різних областях діяльності забезпечили йому суспільне визнання і заслужені місця в різних довідниках «Who is who» та енциклопедіях, виданих як у нашій країні, так і за кордоном, а також розміщених в мережі Інтернет, немає щонайменшої потреби наводити тут його докладну біографію. Зупинимося лише на основних моментах науково-дослідницької діяльності професора Полякова М. В.

Починаючи з Ньютона, розвиток механіки та математики практично неможливо розділити. Ці дві науки тісно та плідно взаємодіяли, збагачуючи одна одну новими ідеями, методами, задачами. Оскільки механіка пропонувала безліч прикладних задач, пов'язаних з розвитком авіації, флоту, інших видів транспорту, дослідженням космосу, будівництвом величезних інженерних споруд і багатьма іншими винятково плідними напрямками, то масовий перехід молодих обдарованих математиків до механіки, що почався у середині минулого сторіччя, здавався всім цілком природнім. Всі ці проблеми механіки потребували великого обсягу складних розрахунків, тому чи треба дивуватися, що згодом підготовка фахівця з механіки перетворилася на підготовку спеціаліста з прикладної математики зі спеціалізацією у галузі механіки [2]. Саме таку освіту отримав свого часу Микола Вікторович Поляков на механіко-математичному факультеті Дніпропетровського університету. Саме у час закінчення навчання та початку наукової діяльності доля зробила Миколі Вікторовичу два подарунки. По-перше, він зустрівся зі своїм науковим керівником, а потім старшим товаришем на все життя – Олегом Гавриловичем Гоманом – тоді ще досить молодим науковцем, а нині професором, одним із патріархів наукової школи гідромеханіків у Дніпропетровському університеті [1]. Саме професор О. Г. Гоман суттєво вплинув на формування особистого наукового стилю Полякова М.В. – стилю виключно точних та повних математичних формулювань, що не завжди притаманно обчислювальній гідромеханіці, стилю ретельно обґрунтованих ідей, а також ретельно перевірених

алгоритмів. По-друге, він опинився серед першого покоління механіків, які розв'язували задачі переважно за допомогою комп'ютера, щоправда, комп'ютер за тих часів називався ще електронно-обчислювальною машиною. Того часу застосуванню електронно-обчислювальної техніки приділялася значна увага – необхідно було ліквідувати майже десятирічне відставання від Сполучених Штатів Америки. Однак перехід від суто математичних способів розв'язання задач до комп'ютерних виявився зовсім не простою справою [2].

Молодість Миколи Вікторовича припала на дивовижний час з погляду історії науки [2]: відносно недавно у назвах книжок стало з'являтися словосполучення «теоретична гідромеханіка», що означало розділення єдиної гідромеханіки на два принципово різні напрямки – теоретичний та експериментальний. Цей розподіл, на відміну від попередніх формувань у рамках гідромеханіки окремих розділів, наприклад газова динаміка, гідравліка, теорія фільтрації, було здійснено не на основі фізичних відмінностей, а через методологічні відмінності. Як це зазвичай відбувається, розділення гідромеханіки стало поштовхом для подальшого розвитку спеціалізацій та проведення інтенсивних і широких досліджень. Прикладна математика того часу вже сформувалася в окрему дисципліну, однак досягнення її були досить скромні. Ніхто навіть не очікував, що незабаром методи прикладної математики увіллються в теоретичну гідромеханіку, за дуже короткий час стануть домінуючими та забезпечать дивовижне прискорення розвитку гідромеханіки в цілому та її прикладних розділів зокрема. Цей період явно недостатньо висвітлено у мемуарній літературі та в роботах з історії науки [2]. Справа в тому, що методи теоретичних досліджень у гідромеханіці, як і в механіці в цілому, у докомп'ютерну епоху були або аналітичними, або так званими інженерними. Перші з них були суттєво обмежені за класами задач, до яких ці методи можна було б ефективно застосовувати, а другі, як правило, не були належним чином обґрунтовані, до того ж їх точність залишала бажати набагато більшого. Крім того, інженерні методи передбачали прийоми, які ґрунтувалися на висновках висококваліфікованих дослідників і взагалі не підлягали формалізації. На перших етапах застосування комп'ютерної техніки електронно-обчислювальну машину розглядали як «великий та швидкий арифмометр», тобто пристрій для проведення окремих обчислень, а не повних розрахунків. Це означало, що на перших етапах за мету бралося просте перенесення на електронно-обчислювальну техніку тих частин існуючих методів розрахунку, які становили найбільші обчислювальні труднощі. На жаль, такий підхід виявився дуже громіздким, оскільки не здатен був усунути вищезгадані вади інженерних методів та покращити точність наближених розрахунків, тому на цьому етапі описана вище практика ніяким чином не змогла виправдати сподівань, які на неї покладалися. Спроби перенести аналітичні, напіваналітичні, інженерні методи на комп'ютерну техніку продовжуються і до нашого часу, однак результати таких спроб, як правило, незадовільні у порівнянні з результатами застосування традиційного чисельного аналізу [2, 3]. Тут треба зауважити, що автори даного нарису ніяк не стверджують принципову непридатність таких підходів для прикладних розрахунків, більше того, вони мають наукові праці, присвячені так званим альтернативним методам, тобто реалізації алгоритмів, які не належать до традиційних методів числового аналізу. Автори лише зауважують, що історично

такі методи не змогли скласти конкуренцію методам числового аналізу для широкого кола задач, хоча для окремих задач вони були досить ефективними [2].

З часом прийшло розуміння того, що комп'ютерний розрахунок потребує розвитку методів, принципово відмінних від традиційних алгоритмів докомп'ютерної епохи, оскільки саме такі нові методи можуть забезпечити належну універсальність підходів та подолати проблему низької точності розрахунків; до речі, кардинального підвищення точності розрахунків у той час вже потребувала не тільки наука, а й промисловість [2, 3].

Першими задачами, до яких звернувся у своїй науковій діяльності Микола Вікторович Поляков, були плоскі задачі про течії ідеальної рідини з вільною поверхнею [1, 2], зокрема задачі про вхід у воду та вихід із води об'єктів різної геометричної форми. Природно, що молодий науковець спробував застосувати для розв'язання цих задач найбільш потужний на той час апарат аналітичного розв'язання плоских лінійних еліптичних крайових задач – теорію функцій комплексного змінного. Треба зазначити, що цей напрямок прикладної математики у механіці рідини вже майже 100 років вважався загальноприйнятним підходом та навіть на той час (70-ті роки минулого сторіччя) забезпечував значну частину розрахунків у галузях авіації, суднобудування, теорії фільтрації. Однак слід зауважити, що можливості теорії функцій комплексного змінного обмежені двовимірними задачами, а методи цієї теорії не завжди ефективні і прийнятні для розв'язання задач у областях складної геометричної форми. Крім того, теорія функцій комплексного змінного була орієнтована переважно на лінійні задачі, що значно звужувало перспективи її подальшого застосування в механіці рідини, більшість задач якої суттєво нелінійні. Таким чином, у теоретичній гідромеханіці того часу склалася суперечлива ситуація: з одного боку, можливості теорії функцій комплексного змінного обмежені у порівнянні з методами числового аналізу (та і перспективи її розвитку у такому ж порівнянні вельми сумнівні), з іншого боку, алгоритми теорії функцій комплексного змінного розроблені набагато краще та забезпечують значно вищу точність розв'язків, ніж відповідні числові алгоритми. Ще однією принциповою обставиною була різна спрямованість цих двох підходів: якщо метод скінченних різниць – найбільш поширений того часу числовий метод – демонстрував найвищу ефективність щодо крайових задач параболічного та гіперболічного типів, а для еліптичних крайових задач він був недостатньо пристосований, оскільки потребував ітераційних розрахунків на встановлення, то методи теорії функцій комплексного змінного були спрямовані саме на еліптичні крайові задачі [1, 2]. На особистий вибір молодого науковця Полякова М.В. не могло не вплинути існування у Дніпропетровському університеті потужної та визнаної школи механіків деформівного твердого тіла, в рамках якої методи теорії функцій комплексного змінного застосовувалися широко та плідно. За вищезазначених обставин його вибір на користь методів теорії функцій комплексного змінного уявляється цілком природним [4–7]. Таким чином, науковий шлях Миколи Вікторовича почався з однієї з найбільш складних задач того часу – задачі проникнення тіла в рідину, тобто, задачі про рух ідеальної нестисливої рідини з вільною поверхнею, коли вільну поверхню перетинає тверде тіло. При цьому задача була сформульована в повній нелінеаризованій постановці,

що робило її надзвичайно складною в розв'язанні для того часу і вельми непростою для аналізу навіть в наші дні, п'ятдесят років потому.

Більшість методів теорії функцій комплексного змінного ґрунтувалися на такій схемі: в області найпростішої геометричної форми методами теорії аналітичних функцій будується розв'язок певної крайової задачі, а оскільки за конформного відображення однієї області на іншу вигляд відповідних рівнянь, що підлягають розв'язанню, не змінюється, то достатньо побудувати конформне відображення актуальної області розв'язку на область, для якої розв'язок вже побудовано, та зворотне йому також конформне відображення, щоб отримати розв'язок актуальної крайової задачі. Однак з розвитком техніки складність областей, в яких розв'язувалися прикладні задачі, зростала непомірно швидкими темпами, що призвело до суттєвих труднощів у побудові конформних відображень. А щодо складності форми області розв'язку, то плоскі задачі гідромеханіки з вільною поверхнею, і особливо задачі занурення у рідину, були поза всякої конкуренції. До того ж досить сильно у порівнянні з традиційними вказані задачі ускладнювалися нелінійними крайовими умовами на вільній поверхні, які важко було задовольнити [1, 2]. Задачу цю Поляков М.В. вирішив розв'язувати багатокроковим методом, що поєднував у собі аналітичні, наближені та чисельні алгоритми. Враховуючи, що задача про еволюцію вільної поверхні є нестаціонарною за своєю природою, необхідно було обрати деяку схему апроксимації за часом. Дослідником було обрано найпростіший покроковий за часом алгоритм, згідно з яким на кожному часовому у кроці він змушений був розв'язувати крайові задачі еліптичного типу в області складної геометричної форми. Йому вдалося звести отриману послідовність крайових задач еліптичного типу до послідовності задач Келдиша-Сєдова (змішаних задач теорії аналітичних функцій) в областях, отриманих послідовними конформними відображеннями [4–7]. Щоб спростити запропонований підхід, Микола Вікторович розробив метод послідовних конформних відображень, який дозволив значно скоротити обсяг розрахунків шляхом заміни побудови на кожному кроці конформного відображення у загальному випадку побудовою конформного відображення області, близької до попередньої за геометричною формою. У такий спосіб вдалося отримати досить точний і високоефективний для того часу алгоритм наближеного аналітичного розв'язку задачі про занурення твердого тіла у рідину (виходу твердого тіла з рідини) та реалізувати його у вигляді програми для електронно-обчислювальної машини [4–7].

Наголосимо на теоретично-науковому та прикладному значенні отриманих результатів з погляду сучасної обчислювальної гідромеханіки [1, 2]. Зрозуміло, що Поляков М. В. був не першим, хто звернув увагу на течії ідеальної рідини з вільною поверхнею. Потреби військово-морського та цивільного флоту, підводного флоту, морської авіації та інших галузей науки і техніки зробили цей клас задач предметом інтенсивних досліджень у двадцяті-тридцяті роки минуло сторіччя. Саме у той час серії блискучих наукових праць Л. І. Сєдова, М. В. Келдиша та М. Є. Кочіна заклали основу теоретичних досліджень у означуваному напрямку. Наукові школи гідромеханіків Московського університету, Центрального аерогідродинамічного інституту під керівництвом зазначених вчених плідно продовжили роботи у цьому напрямку. Однак розробити оригінальний алгоритм розрахунку, здійснити його

програмну реалізацію, а потім довести все це до стану, коли програма видає адекватні результати протягом досить значної кількості кроків за часом – таке досягнення для того періоду було унікальним, свідчило про дуже високий фаховий рівень автора, а отже безумовно, було вартим присудження Миколі Вікторовичу Полякову наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук [1, 2]. Результати цих перших досліджень Полякова М. В. були впроваджені в обчислювальну та проектну практику Конструкторського бюро «Південне», яке того часу було провідною науково-технічною організацією, що забезпечувала обороноздатність країни.

Однак методом послідовних задач Келдиша-Сєдова наукова активність Полякова М. В. на початку дослідницької діяльності не вичерпувалась. Усвідомлюючи як переваги методу послідовних задач Келдиша-Сєдова, так й його недоліки, описані вище, він з самого початку досліджень наполегливо прагнув розширити класи задач, які б можна було ефективно розв'язувати [1, 2]. Паралельно з розглядом методу послідовних задач Келдиша-Сєдова увагу молодого науковця привертали також і автомодельні випадки задач занурення [1, 2]. Автомодельним називається такий окремий випадок загальної задачі, в якому розв'язок залежить від певної комбінації визначальних параметрів, що дозволяє суттєво спростити процедуру розв'язання та побудувати аналітичні чи наближені аналітичні розв'язки для обмеженого числа залежностей визначальних параметрів. Поляков М. В. звернув увагу на дві задачі: занурення у рідину клину та конуса, для яких вдалося показати їх автомодельність та звести початкову крайову задачу для рівняння у частинних похідних до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Оскільки отримання перших інтегралів запропонованої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння виявилося занадто важким, він застосував для її чисельного розв'язання метод параметричного диференціювання [8]. Останній був дуже популярним в 60–70-ті роки минулого сторіччя, бо дозволяв наближено розв'язувати крайові задачі для дуже складних диференціальних рівнянь. Хоча розроблений підхід не зміг стати бодай скільки серйозною альтернативою методу послідовних задач Келдиша-Сєдова, отримані результати складали безумовний науковий інтерес, поглиблювали розуміння проблем гідромеханіки з вільною межею та дещо виходили за рамки обмежень, притаманних методу послідовних задач Келдиша-Сєдова.

У той же час, у середині 70-х років минулого сторіччя, Поляков М.В. «відкрив» для себе другий науковий напрямок, якому зберіг безумовну відданість до кінця життя [1, 2]. Мова йде про методи теорії потенціалу, хоча з погляду сучасної термінології: сферу наукових інтересів Миколи Вікторовича точніше було б визначити як «обчислювальна теорія потенціалу», однак того часу такого терміну ще не було. Сьогодні, коли обчислювальна теорія потенціалу є потужний та досить добре розроблений напрямок обчислювальної математики, такий вибір уявляється цілком природним та досить перспективним, але на той час більшості науковців здавалося, що, навпаки, цей напрямок не має перспективи. Щоб осмислити ці суперечливі. оцінки, доцільно звернутися до історії обчислювальної теорії потенціалу [1, 3].

Треба зазначити, що історично розвиток обчислювальної математики, а особливо обчислювальної механіки, був досить заплутаний, зазнавав різноманітних, інколи повністю суперечливих впливів. На різних етапах розвитку обчислювальної механіки залежно від специфіки задач, які належало розв’язувати, домінували різні чисельні методи та концепції математичного моделювання. Щоб належним чином оцінити окремий внесок у розвиток того чи іншого напрямку обчислювальної механіки, доцільно прослідкувати розвиток відповідних тенденцій з історичної точки зору. У «докомп’ютерну епоху» у розрахунках задач механіки домінували аналітичні, наближені аналітичні та так звані інженерні методи. Причому аналітичними методами розв’язувалася досить невеличка кількість задач, наближені аналітичні методи були поширені значно більше, але переважна більшість розрахунків приходилася на інженерні підходи. Перші дві групи згаданих методів вимагали граничного спрощення задач, що підлягали розв’язку. У результаті, переважна більшість задач формулювалась як лінійні вже із самого початку розгляду. На перших етапах застосування ЕОМ для розрахунків розв’язувалися переважно задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, але вже в середині 50-х років минулого сторіччя розпочалися інтенсивні чисельні розв’язки крайових задач математичної фізики. Першим «популярним» чисельним методом був метод скінченних різниць – найбільш простий та, як потім з’ясувалося, універсальний з основних чисельних методів. Однак метод скінченних різниць був дуже чутливим до форми області розв’язку, призводив до проблем з точністю розрахунку для певних задач та вимагав надмірних комп’ютерних ресурсів для багатовимірних задач. Зазначені обставини змусили шукати ефективні альтернативи для методу скінченних різниць. Зрозуміло, що такий пошук проводився в першу чергу серед традиційних методів розв’язку інженерних задач. Так, на основі аналітичних методів теорії потенціалу (методи потенціалів, методи функцій Гріна) було розвинуто чисельні методи теорії потенціалу, а на основі варіаційних методів – метод скінченних елементів. Перші спроби застосування теорії потенціалу у комп’ютерному моделюванні було зроблено у першій половині шістдесятих років минулого сторіччя, тобто на 10 років пізніше, ніж методу скінченних різниць, але дещо раніше методу скінченних елементів. Треба зазначити, що, на відміну від традиційних нечисленних практичних застосувань теорії потенціалу, у чисельних реалізаціях цієї теорії мова йдеться про розв’язок граничного інтегрального рівняння зі всіма особливостями, йому притаманними. Зокрема, головною складністю, що затримувала застосування цього підходу, була необхідність розв’язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь з повністю заповненими матрицями загального вигляду, що вимагало певного, досить високого рівня обчислювальної техніки. Проте, коли такий рівень техніки було досягнуто, перші методи обчислювальної теорії потенціалу набули дуже швидкого, можна сказати, бурхливого розвитку. Швидкий прогрес у даному напрямку було визначено двома причинами. По-перше, методи обчислювальної теорії потенціалу спиралися на теорію потенціалу – загальновідомий та достатньо добре досліджений розділ математичної фізики. По-друге, потреби цивільної та військової авіації, цивільного та військово-морського флоту, що також бурхливо розвивалися того часу, вимагали ефективного чисельного розв’язку крайових задач для рівняння

Лапласа у плоскому та просторовому випадках, що не забезпечував метод скінченних різниць. Перша прикладна реалізація методів обчислювальної теорії потенціалу – так званий панельний метод, розроблений декількома групами фахівців у США, – у другій половині шістдесятих та на початку сімдесятих років набула значного поширення. Наприклад, за допомогою панельного методу було розраховано у просторових постановках аеродинаміку сімейства широкофюзеляжних літаків фірми Боїнг – один з наймасштабніших технічних проектів в історії світової авіації. Однак методам обчислювальної теорії потенціалу були притаманні певні проблеми та недоліки, які потребують спеціального детального аналізу.

Щодо обчислювальної теорії потенціалу, то її поява була очікуваною, цілком логічною та протягом тривалого часу невдалою [1–3]. Ймовірно, що багато дослідників протягом тривалої історії теорії потенціалу прийшли до очевидної ідеї про заміну в інтегральних представленнях теорії потенціалу інтегралів по межах області скінченними сумами з відповідними апроксимаціями відомих та невідомих функцій. Однак, наштовхнувшись на неможливість розв’язати отриману велику систему лінійних алгебричних рівнянь, дослідники відмовилися від подальших зусиль у цьому напрямку. Лише у 1926 році Т. Карман опублікував роботу, у якій запропонував алгоритм, близький до методу дискретних вихорів. Однак цю роботу та, у першу чергу, запропонований алгоритм було піддано жорсткій критиці і визнано невдалими. До першої половини 60-х років минулого сторіччя з літературних посилань можна пригадати щонайменше 10 аналогічних спроб, які не набули розвитку в обчислювальній практиці. А проте в першій половині, а потім в середині 60-х років практично паралельно та незалежно один від одного мали місце вже вдалі спроби розробити та застосувати до межових інтегральних рівнянь теорії потенціалу різноманітні числові алгоритми. Ці спроби були здійснені у Сполучених Штатах Америки та Великій Британії, а саме в NASA, фірмі Боїнг, Массачусетському технологічному інституті, університеті Берклі та в ряді вищих навчальних закладів Великої Британії. Причому це стосується тільки спроб розробити обчислювальні алгоритми теорії потенціалу для задач гідромеханіки та аеродинаміки, незалежно ж від них були здійснені аналогічні спроби у галузі механіки деформівного твердого тіла, до того ж останніх було ніяк не менше. Практично всі ці спроби виявилися більш-менш вдалими, чого ніяк не можна було очікувати, зважаючи на попередню історію подій. Насправді, така різка зміна ситуації не уявляється ні випадковою, ні дивною. Приблизно за рік-півтора до цих подій фірма IBM почала постачати на ринок свої нові потужні комп’ютери серії IBM360, що фактично означало різкий стрибок у можливостях електронно-обчислювальної техніки, якою послуговувалися у наукових дослідженнях. Зазначені організації були серед перших отримувачів таких комп’ютерів. Саме комп’ютери серії IBM360 уможливили достатньо швидке розв’язання великої системи лінійних алгебричних рівнянь у випадку числового розв’язання межових інтегральних рівнянь теорії потенціалу. Саме у цей час в обчислювальну гідроаеродинаміку увійшли панельний метод (у сучасній термінології непрямий метод граничних елементів) та метод дискретних вихорів, а також низка алгоритмів під загальною назвою «методи граничних інтегральних рівнянь», які переважно

застосовувалися у теорії пружності. Доля цих алгоритмів склалася по-різному, більшість з них у тих чи інших формах згодом увійшли до методу граничних елементів, частина з них вже давно забута, а метод дискретних вихорів було узагальнено на метод дискретних особливостей. Однак дуже відрізнялися й темпи розвитку різних алгоритмів залежно від конкретної галузі їх застосування. Історично першим чисельним підходом обчислювальної теорії потенціалу був панельний метод (хоча з цього приводу існують різні точи зору). Практично він був першим алгоритмом, успішно застосованим до розрахунку просторових аеродинамічних конфігурацій, крім того, він використовувався у процесі розробки широкофюзеляжних літаків фірми Боїнг та інших дозвукових літальних апаратів. Утім панельний метод було орієнтовано виключно на потенційні течії, що не могло повною мірою задовольнити замовників, тобто авіаційні та суднобудівельні фірми, тому з початку 70-х років панельний метод почав стрімко витіснятися спочатку методом скінченних різниць, а з часом методом скінченних елементів.

Наразі доцільно сказати про останні два згадані методи. Історія ідей обох цих чисельних методів простежується аж до Леонарда Ейлера, тобто плеяда механіків та математиків була готова сприйняти ці алгоритми практично протягом всього часу свого існування. Основна ідея методу скінченних різниць полягає у апроксимації частинних похідних, що входять до рівнянь, які підлягають розв’язанню, та, можливо, до крайових умов, так званими скінченними різницями, тобто наближеними виразами похідних у спеціальним чином обраних точках, так званих вузлах скінченнорізницевої сітки. Таким чином, метод скінченних різниць спирається на дискретизацію диференціального оператора та крайових умов на скінченній множині точок (сітці). що апроксимує область розв’язку. На відміну від методу скінченних різниць, метод скінченних елементів передбачає апроксимацію області розв’язку системою геометричних фігур – скінченних елементів – з подальшою апроксимацією невідомих функцій деякими функціями, що містять невідомі числові параметри які підлягають визначенню у певний спосіб. Метод скінчених різниць історично був першим чисельним методом, та він, мабуть, найпростіший з основних числових методів, але цей метод у реалізаціях дуже залежний від форми скінченнорізницевої сітки, а отже, й від форми області розв’язку.

Метод скінченних елементів не настільки чутливий до форми області розв’язку, але він дещо складніший за метод скінченних різниць. Завдяки простоті та економічності методу скінченних різниць на перших етапах розвитку вдалося випередити метод скінченних елементів майже на 10 років. Перевагою обох цих підходів над методами теорії потенціалу була можливість відносно легко працювати з диференціальними операторами зі змінними коефіцієнтами та нелінійними диференціальними рівняннями, які спричиняють суттєві труднощі у теорії потенціалу. Саме ця обставина на початку 70-х років визначила прагнення багатьох фахівців з обчислювальної гідромеханіки віддати перевагу зазначеним методам скінченних різниць та скінченних елементів, а не методам обчислювальної теорії потенціалу. Була ще одна причина такої несприятливої для теорії потенціалу тенденції: методи скінченних різниць та скінченних елементів були інтуїтивно зрозумілі для інженерів, а обчислювальна теорія потенціалу потребувала

фундаментальної математичної підготовки, яку далеко не кожний вищий навчальний заклад міг забезпечити. Слід зазначити, що у теорії пружності ситуація була зовсім іншою, оскільки більшість задач теорії пружності лінійні, що сприяє застосуванню методів теорії потенціалу. Тобто у середині 70-х років, незважаючи на вражаючі успіхи панельного методу, обчислювальна теорія потенціалу як частина обчислювальної гідромеханіки переживала не найкращі часи.

І саме у цей час Микола Вікторович Поляков звернувся до методів обчислювальної теорії потенціалу. Треба зазначити, що це був цілком свідомий вибір. Справа в тому, що методи скінченних різниць та скінченних елементів не могли забезпечити належного точного зображення рухомої вільної межі рідини, а обчислювальна теорія потенціалу мала обнадійливі перспективи забезпечити високоточний та ефективний розрахунок руху вільної поверхні та невідомих функцій на ній і поблизу неї, оскільки відповідні алгоритми були розроблені пізніше. Заради справедливості треба зазначити, що у подальшій науковій діяльності Микола Вікторович декілька разів звертався до методу скінченних різниць, хоч автори цього нарису переконані, що ці роботи були епізодичними та ніяк не визначали загальний напрямок його досліджень. Таким чином, молодий науковець зробив свідомий вибір між добре випробуваними алгоритмами, фактично стандартними підходами та проблемним напрямком на користь останнього заради ефективного алгоритму, який ще тільки передбачалося розробити.

На перший погляд, найбільш суттєва особливість граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу у порівнянні зі звичайними регулярними інтегральними рівняннями, що розглядаються у теорії Фредгольма, полягає у сингулярних ядрах перших. На жаль, на відміну від добре відомої теорії Фредгольма, для сингулярних граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу не вдалося отримати аналогічних простих результатів. Більш того, якщо теорія Фредгольма стверджує некоректність регулярних (фредгольмових) інтегральних рівнянь першого роду, справедливість аналогічного твердження для сингулярних граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу досі залишається неясною. Окрім того, чисельне інтегрування потенціалів із сингулярними ядрами теж призводило до досить суттєвих труднощів, які на початковому етапі розвитку обчислювальної теорії потенціалу здолати майже не вдалося. Внаслідок згаданих труднощів практично усі методи розв’язку регулярних інтегральних рівнянь, окрім найпростішого методу механічних квадратур, виявилися непридатними для чисельного чи чисельно-аналітичного розв’язку сингулярних граничних інтегральних рівнянь. У результаті, на початковому етапі розвитку обчислювальної теорії потенціалу практично для кожної окремої задачі доводилося будувати нове граничне інтегральне рівняння з власним специфічним ядром, а потім при застосуванні методу механічних квадратур чи вибирати з великого числа квадратурних формул, чи будувати для нього спеціальні квадратурні формули. Зрозуміло, що при практичному застосуванні відповідних методів обчислювальної теорії потенціалу їх алгоритмічність та ефективність значно поступалися методу скінченних різниць та, навіть, методу скінченних елементів, який тоді тільки народжувався. Інша проблема, що притаманна методам обчислювальної теорії потенціалу, має

принциповий характер. Справа в тому, що для рівнянь у частинних похідних з нелінійним диференціальним оператором невідомі фундаментальні розв'язки чи функції Гріна, внаслідок чого аналоги граничних інтегральних рівнянь, які ефективно розв'язувалися для лінійного випадку, для нелінійних рівнянь отримати не вдалося. В цьому випадку процедура розв'язку вимагала спеціальних локальних лінеаризацій з подальшою організацією ітераційних процесів, що призводило до повної втрати обчислювальної ефективності відповідних алгоритмів. Існування цієї проблеми навіть стало підґрунтям для поширення думки про принципову непридатність обчислювальної теорії потенціалу для розв'язку нелінійних задач та неперспективність цього напрямку обчислювальної механіки взагалі. Початковий етап розвитку обчислювальної теорії потенціалу завершився у середині сімдесятих років минулого сторіччя створенням методу граничних елементів, який, на відміну від попередніх алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу, при апроксимації граничних інтегральних рівнянь базувався не на методі механічних квадратур, а на принципах методу скінченних елементів, що одразу ж суттєво розвинуло алгоритмічну базу граничноелементного підходу.

Таким чином, у 70-ті роки минулого століття обчислювальна теорія потенціалу зазнала досить радикальні зміни, пов'язані з тим, що метод граничних елементів та метод дискретних вихорів (метод дискретних особливостей) зазнали значного прогресу. Метод дискретних вихорів незабаром узагальнений як метод дискретних особливостей виявився очевидним розвитком лагранжевих методів гідромеханіки, а його зв'язок з граничними інтегральними рівняннями теорії потенціалу був виявлений дещо випадково. Однак обидва ці методи мали ясну логічну структуру, що добре піддається програмуванню, і забезпечували достатню ефективність й універсальність в класах задач, для яких вони позиціонувалися. В принципі, в середині 70-х Поляков М.В. був готовий взяти участь у створенні одного з цих методів, проте відносно задач, які він розглядав, його власний алгоритм був і ефективніше, і точніше. Тому він звернув увагу на ці методи набагато пізніше: на граничні елементи в кінці 80-х, а на дискретні вихори в другій половині 90-х, хоча його вчитель професор О. Г. Гоман почав займатися дискретними вихорами ще на початку 80-х років.

Тут треба дати певні пояснення. Після знайомства з методами граничних інтегральних для Миколи Вікторовича швидко стало абсолютно очевидно, що він має працювати зі специфічним чисельним методом, що володів у порівнянні з іншими чисельними підходами істотними унікальними перевагами. По-перше, методи граничних інтегральних рівнянь на тому рівні свого розвитку припускали розв'язання лінійної крайової задачі математичної фізики лише на межі області розв'язання, тобто, не вимагали побудови розрахункової сітки і проведення розрахунків всередині області розв'язання. По-друге, ці методи дозволяли без особливих зусиль працювати з кутовими точками межі області, сингулярностями розв'язку і іншими його особливостями. По-третє, методи ці вельми вдало справлялися із задачами, сформульованими в областях складної геометричної форми. По-четверте, методи теорії потенціалу забезпечували більш високу точність розв'язку, ніж інші чисельні методи, правда, останнє з'ясувалося набагато пізніше.

У 70-ті роки практично не було програм, які розповсюджуються вільно, та й серед стандартного програмного забезпечення важко було очікувати модулів, що реалізують складні алгоритми розв'язання задач математичної фізики та суміжних областей. Тому кожний дослідник був змушений сідати і самостійно писати програму, винаходячи нові алгоритми і модифікуючи існуючі, конструюючи нові розрахункові схеми. Більшість алгоритмів теорії потенціалу в ті роки представляли собою деяку комбінацію методу регуляризації сингулярного граничного інтегрального рівняння і одного з варіантів методу механічних квадратур. Поляков М. В. не вийшов за межі цього напрямку, в сучасній термінології його алгоритм близький до прямого методу дискретних особливостей високого порядку апроксимації. Цей алгоритм був досить ефективний в процесі чисельного розв'язання та економно витрачав комп'ютерні ресурси, проте був дуже складний та важкий в програмуванні. Разом з цим, розроблений Поляковим М. В. комплекс прикладних програм, який реалізує зазначений обчислювальний підхід, дозволив автору вирішити досить велику кількість плоских задач для рівняння Лапласа, що описують як традиційні для нього задачі про потенційні течії, так й задачі про плоскі стаціонарні температурні поля. Але розробкою комплексу програм наукові інтереси Полякова М. В. в другій половині 70-х і на всьому протязі 80-х років, безумовно не вичерпувалися, виключно цікавою знахідкою були задачі, сформульовані в областях з невідомою межею. Інтерес до цих задач було визначено проблемою стаціонарних течій з вільними межами. Завдяки аналогії процедур розв'язання задач з рухомою і невідомою межею Миколі Вікторовичу вдалося в ряді робіт сформулювати важливі і цікаві узагальнення, фактично опинившись лідером нового напрямку обчислювальної гідромеханіки. Так йому вдалося на основі оригінального власного підходу розглянуті ті ж самі задачі занурення твердого тіла у рідину, а також деякі інші, близькі до них за математичними постановками, задачі [9–16].

Втім, деяке «алгоритмічне відставання» не завадило Полякову М.В. підготувати і видати монографію [17], а згодом захистити по ній докторську дисертацію, яка справила дуже приємне враження в експертному науковому співтоваристві. Після захисту докторської дисертації не дивлячись на велику зайнятість, а він в той час вже був деканом механіко-математичного факультету Дніпропетровського університету, а потім і проректором того ж університету, Микола Вікторович став активно займатися науковою роботою. Насамперед, він продовжив дослідження в галузі гідромеханіки, математичної фізики та обчислювальних методів теорії потенціалу на основі вже згаданих оригінальних авторських підходів. Оскільки ці методи вже були реалізовані програмно, а ефективність їх була вельми високою, а отже високою була результативність досліджень в цілому. На жаль, слід визнати, що цей етап його наукової діяльності прийшовся на 90-ті роки і зазнав всіх труднощів та негараздів, притаманних тому часу. Так, вельми проблемними були того часу публікації у періодичних наукових виданнях, дуже важко було із залученням молодих фахівців до професійної наукової діяльності, нерідко аспіранти та, навіть, студенти уходили заробляти гроші. Тим не менш, результати того періоду стали основою для двох монографій [18, 19].

У той же час іншим, а потім й домінуючим напрямком досліджень професора Полякова М. В. стало застосування методу граничних елементів в задачах гідромеханіки, а потім і тепломасообміну (спільно з професором Кочубеєм О.О., а також своїми учнями Бразалук Ю. В. і Євдокимовим Д. В.). Дещо пізніше в сфері його інтересів опинився й метод дискретних вихорів, в результаті чого був розроблений комбінований метод граничних елементів і дискретних вихорів, що призвело до окремого напрямку в обчислювальній гідромеханіці. Несподіваним, але дуже плідним напрямком досліджень виявилися регулярні алгоритми методу граничних елементів з інтегруванням по неапроксимованій межі області розв'язання, що дозволили значно підвищити точність методу. Досить успішні спроби застосувати методи обчислювальної теорії потенціалу до проблем тепломасообміну вилилися в появі українсько-французького проекту «Фізичне та математичне моделювання кризи кипіння» (2005–2006 рр.), в якому Поляков М. В. керував дослідженнями з математичного моделювання, а відомий французький вчений доктор Даніель Бейсанс – з фізичного моделювання. На перших етапах створення методи граничних елементів і дискретних вихорів позиціонувалися як універсальні, проте з часом стало очевидно, для граничних елементів існують задачі, що вимагають дуже великих обчислювальних ресурсів. В основі цього розуміння лежали досить великі систематичні методичні дослідження, проведені під керівництвом Полякова М. В. протягом 10 років на зламі століть. Надалі він доклав безліч зусиль, щоб переконати колег, що методи обчислювальної теорії потенціалу ефективні лише для певних, досить вузьких класів задач. Останнім часом під його керівництвом проводилися роботи по комбінуванню методів теорії потенціалу з іншими чисельними та аналітичними методами. Досить несподівано було показано, що найбільш перспективним є комбінування з асимптотичними методами, чим Микола Вікторович і його співробітники інтенсивно займалися в останні роки.

Наведемо більш детальний аналіз активності Миколи Вікторовича у галузі обчислювальної теорії потенціалу, переважно дотримуючись робіт [1, 3] з необхідними скороченнями та доповненнями. Поряд з численними перевагами, що згадувалися вище, чисельні методи теорії потенціалу мають певні недоліки, які теж були описані вище. Микола Вікторович дотримувався в цьому питанні досить простого підходу: оскільки методи обчислювальної теорії потенціалу ніяк не можна віднести до універсальних, то треба відбирати такі задачі, у яких переваги методів, що розглядаються, проявлялися б найбільше, а недоліки найменше.

Незадовільна ефективність алгоритмів початкового етапу розвитку обчислювальної теорії потенціалу змусила професора Полякова М.В. звернутися до методу граничних елементів з метою побудови високоефективних алгоритмів та пошуку таких задач математичної фізики, актуальних для сучасної обчислювальної механіки, для яких методи обчислювальної теорії потенціалу мають певні переваги перед іншими чисельними методами, тобто їх застосування найбільш доцільно. У перших його роботах з дослідження методу граничних елементів, він розглянув питання про підвищення ефективності цього методу, наприклад, за допомогою функції Гріна [21]. Низка робіт з методу граничних елементів була продовжена Поляковим М. В. та його учнями. Проблема полягає в тому, що цілком зрозуміле,

на перший погляд, поняття ефективності чисельного методу вимагає суворого визначення й бажано з деяким кількісним критерієм ефективності, який одночасно може бути й критерієм порівняння ефективності чисельних алгоритмів або навіть чисельних методів. У сучасний обчислювальний математиці ще не сформувалася загальна точка зору на критерій обчислювальної ефективності алгоритму, що є наслідком великого різноманіття вимог до розрахунків у конкретних випадках. Для оцінки ефективності алгоритмів методу граничних елементів у роботах професора Полякова М. В. та його учнів використовувався чисельний експеримент на тестових задачах, що мають аналітичний розв'язок у квадратурах. Такий підхід було застосовано у роботах [21, 23, 30, 35–38, 45, 49], окрім того, у роботі [36] було сформульовано загальну методику тестування алгоритмів методу граничних елементів, яка суттєво відрізняється від аналогічних методик для методів скінченних ризниць та скінченних елементів завдяки особливим рисам та властивостям, притаманним методам обчислювальної теорії потенціалу. Особливо велику увагу при розробці правил тестування алгоритмічних та програмних реалізацій методу граничних елементів було приділено методиці тестування за допомогою малих штучних збурень, яка, хоча й не була принципово новою ідеєю, але у працях Полякова М. В. набула виключних можливостей стосовно методів чисельного розв'язку граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу. Серед його наукових праць з дослідження теорії потенціалу треба виділити низку робіт, у яких зазначена теорія застосовується до задач тепломасообміну [20, 29, 30, 39–41, 43, 44, 46, 47]. Зазвичай спроби такого застосування були обмежені лінійними задачами теорії теплопровідності, але їх ніяк не можна вважати вдалими, оскільки відповідні алгоритми методу граничних елементів за обчислювальною ефективністю значно поступалися методу скінченних ризниць. Однак професору Полякову М. В. вдалося знайти такі проблеми теорії тепломасообміну та сформулювати відповідні задачі, для яких метод граничних елементів має безперечні переваги перед традиційними чисельними методами. Ці задачі належать до класу так званих багатомасштабних задач, тобто задач, у формулюванні яких присутні щонайменше два характерних параметри, які різняться за порядком. Першими у цей групі робіт були статті, в яких розглядалися крайові задачі для системи рівнянь Онзагера [20, 46]. Як відомо, позадіагональні елементи матриці Онзагера значно поступаються по величині відповідним діагональним елементам, що й породжує в задачі малий параметр. В роботах Полякова М. В. було запропоновано два підходи до розв'язку крайових задач для системи рівнянь Онзагера: перший – це аналітичне перетворення [20], а другий – асимптотичне розкладання по згаданому малому параметру [46]. Іншою проблемою теорії тепломасообміну, що природно містить малий параметр, виявилася задача про повільний фазовий перехід, при обезрозмірюванні якої з'являється мале число, що отримало назву числа Стефана. Застосовуючи асимптотичне розкладання по числу Стефана, як малому параметру, вчений отримав формулювання, зручне для ефективного застосування методу граничних елементів [39, 43]. Треба зауважити, що ефективність та точність такого підходу значно перевершують аналогічні показники для інших методів розрахунку фазових переходів. Розвиваючи описану методику, вдалося показати аналогію між задачею про повільний фазовий перехід та задачею про зростання біологічної структури, на

основі якої було запропоновано унікальну ефективну методику математичного моделювання процесів зростання [44, 47], яка є актуальною для теоретичної біології, сільського господарства, медицини. Серед інших досліджень, в яких методи теорії потенціалу застосовуються разом з асимптотичними підходами, можна пригадати статті [29, 30, 40, 41], де асимптотичне розкладання застосовується для врахування малих фізичних [29] та геометричних [40, 41] ефектів. Не залишив професор Поляков М. В. й свою традиційну галузь досліджень – гідродинаміку, у якій завдяки високій обчислювальній ефективності та унікальним властивостям запропонованих їм алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу вдалося досягнути суттєвих успіхів. В першу чергу, це стосується задач про течії з вільною поверхнею [22, 25]. Доволі новим напрямком застосування теорії потенціалу стали для вченого течії при малих числах Рейнольдса [28, 31, 32], що набули виключної актуальності останнім часом завдяки розвитку мікроелектроніки, мікромеханіки та мікробіології. Врешті-решт, найсуттєвішим його досягненням у галузі застосування методів обчислювальної теорії потенціалу до задач обчислювальної гідродинаміки була низка робіт, в якій метод дискретних особливостей застосовувався разом з методом граничних елементів [23, 24, 26, 27, 35, 42, 48, 49] для розрахунку течій при великих числах Рейнольдса. Оскільки при великих числах Рейнольдса ефекти конвекції значно переважають дифузійні ефекти, у тому числі в'язкість рідини, то за проміжки часу, протягом яких вплив конвекції виявляється суттєвим, сумарний вплив в'язкості залишається малим, внаслідок чого локалізовані об'єкти протягом цих проміжків часу зберігають власні локальні характеристики. До таких локалізованих об'єктів можна віднести дискретні вихори, дискретні диполі та дискретні джерела, що моделюють геометрично локалізовані об'єкти з відповідними інтегральними властивостями. Треба зазначити, що в обчислювальній теорії потенціалу з самих ранніх етапів її розвитку були відомі методи дискретних джерел та дискретних вихорів, що ґрунтувалися саме на наведеному вище принципі. Обидва ці методи, пізніше об'єднані спільною назвою «метод дискретних особливостей», забезпечували ефективні розрахункові схеми для ефектів конвективного та адвективного переносів, дозволяли отримувати подання для полів швидкостей, досить точні у деякому статистичному інтегральному розумінні. Однак поблизу межі області розв'язку методи дискретних особливостей належної точності розрахунку не забезпечували. Комбіновані методи дискретних особливостей та граничних елементів позбавлені цих недоліків. У вищезазначених роботах Полякова М. В. в якості дискретних особливостей розглядалися не тільки дискретні джерела та дискретні вихори, а й малі матеріальні частинки, що робить їх релевантними для розрахунку течій багатофазних середовищ.

Хотілося б зазначити ще одну загальну рису наукових досліджень професора Полякова М .В. у галузі обчислювальної теорії потенціалу: він завжди прагнув спрощення алгоритмів, наприклад, всюди, де це було можливо, він застосовував регулярні методи граничних елементів (функціональні рівняння Купрадзе В.Д.), що не містять сингулярних ядер та допускають значно простіші програмні реалізації. Узагальнення великого та багаторічного досвіду Полякова М. В. у галузях обчислювальної математики, математичного моделювання та обчислювальної

механіки зроблено у роботах [37, 38, 45]. По-перше, в цих роботах детально розглянуто питання про позиціювання методів обчислювальної теорії потенціалу, насамперед, методу граничних елементів. У цьому питанні вчений значно розійшовся з точкою зору Бреббія К. А., який розглядав метод граничних елементові як універсальний метод високої обчислювальної ефективності та точності. З початку 80-х років, переїхавши зі США до Великої Британії К. Бреббія розпочав безпрецедентну рекламну кампанію по просуванню методу граничних елементів [2]. Причому у цій рекламній кампанії Карлос Бреббія пропонував метод граничних елементів як універсальний, потужний чисельний метод, який перевершує за ефективністю методи скінченних різниць та скінченних елементів завдяки тому, що передбачає аналіз лише на межі області розв'язку. Початковий етап розвитку методу граничних елементів начебто підтверджував такий висновок. Метод граничних елементів К. Бреббія та його учні і послідовники застосували у практично незмінному варіанті до нових задач, внаслідок чого отримували велику кількість результатів. Але аналіз ефективності особливо у порівнянні з методам скінченних різниць та скінченних елементів проводився не часто, а у випадках не на користь методу граничних елементів результати такого аналізу у публікаціях не наводилися зовсім. Природно, що міжнародна наукова думка взагалі щодалі критично ставилася до позиції і практики К. Бреббія та його наукової школи. Безумовно, відзначаючи великий особистий внесок К. Бреббія у розвиток методу граничних елементів, не можна погодитися з деякими його оцінками. Наприклад, метод граничних елементів не доцільно розглядати як універсальний чисельний метод, враховуючи ті численні обмеження по ефективності, які накладаються на теорію потенціалу взагалі та сам метод, зокрема. Для нелінійних та неоднорідних задач, для диференціальних операторів зі змінними коефіцієнтами метод граничних елементів передбачає обчислення інтегралів по області розв'язку та нерідко додаткові ітераційні процеси, які погано збігаються, що потребує на порядок більше комп'ютерного часу для розрахунків, ніж у конкуруючих методів. Як з'ясувалося згодом, основною перевагою методу граничних елементів над його більш поширеними конкурентами – методами скінченних елементів та скінченних різниць (понад 95 відсотків сучасних наукових та інженерних розрахунків, які потребують розв'язання крайових задач) є не розв'язання задачі суто на межі області розв'язку, а відсутність чисельного диференціювання, що радикально підвищує точність розрахунку. Щодо аналізу лише на межі, то повністю заповнені матриці систем лінійних алгебричних рівнянь, які притаманні методу граничних елементів, потребують таких витрат комп'ютерного часу на визначення елементів матриць та розв'язання систем, що повністю нівелюють переваги суто межових розрахунків, унаслідок чого такі розрахунки потребують часу більше, ніж конкуруючі, навіть для лінійних еліптичних крайових задач.

Микола Вікторович Поляков, на жаль, не мав на той час обчислювальних можливостей наукової школи К. Бреббія, тому він практично відразу відкинув ідею механічного поширення методу граничних елементів на нові, чи добре відомі задачі. Позицію науковця у цьому питанні [2] можна оцінити як раціональний підхід до вибору засобу розрахунку: для кожної задачі можна вибрати числовий алгоритм, який буде кращим у деякому розумінні. Так, для методу граничних

елементів слід обирати задачі, де він буде мати перевагу над основними чисельними методами, а ще краще такі задачі, до яких методи скінченних різниць та скінченних елементів взагалі важко застосувати з огляду на ті чи інші обставини. До такого раціонального підходу вчений вдавався у 80-ті та на початку 90-х років минулого сторіччя, саме тоді він неодноразово у деяких своїх роботах плідно звертався до методу скінченних різниць. На великій кількості прикладів, тестових розрахунків, порівнянь результатів застосування різних чисельних методів, що проводилися за спеціально розробленими методиками, професор Поляков М. В. переконливо показав, що метод граничних елементів не може бути універсально ефективним для широкого кола задач. Скоріше, доцільно розглядати метод граничних елементів як потужний та виключно точний засіб чисельного розв'язання окремих задач, для яких він забезпечує переваги, котрих немає в основних традиційних чисельних методів. У його роботах [37, 38] вичерпно детально описано проблему обчислення об'ємного потенціалу, зазначено існуючі та перспективні засоби її розв'язання, показано, що, з точки зору об'ємного потенціалу та його зв'язку з нелінійними задачами, найбільш перспективним зараз є метод граничних елементів з локалізацією. У роботі [45] на прикладі обчислювальної теорії потенціалу розглянуто проблема вибору математичної моделі у зв'язку з подальшим вибором чисельного методу, впливу властивостей математичної моделі на адекватність та точність отриманих у подальшому чисельних результатів. Окремо розглянуто питання про строгість схеми фізична модель – математична модель – обчислювальна модель – прикладне програмне забезпечення. У статті висунуто та обґрунтовано думку про те, що адекватність властивостей елементів наведеної послідовності має аналізуватися на рівні раціональних міркувань, однак, якщо підвищення покажчиків на одному з етапів не вимагає суттєвих додаткових ресурсів, то його треба прагнути у будь-якому разі, оскільки це неодмінно має скоротити загальну похибку розрахунків.

З наведеного вище не важко побачити, що внесок члена-кореспондента НАНУ, професора Полякова М.В. в обчислювальну математику відбувався у таких напрямках:

- вдосконалення алгоритмів методу граничних елементів;
- дослідження методологічних питань обчислювальної теорії потенціалу та математичного й чисельного моделювання в цілому;
- спільне застосування методу граничних елементів з іншими чисельними (скінченних ризниць, дискретних вихорів, дискретних особливостей тощо) та аналітичними (асимптотичними) методами;
- пошук задач обчислювальної гідродинаміки та обчислювального тепломасообміну, для яких методи теорії потенціалу мають переваги у порівнянні з іншими чисельними методами.

Гідним завершенням зазначеного етапу досліджень стала колективна монографія [50], яка відбиває не тільки теоретичний стан досліджень з обчислювальної теорії потенціалу, а й показує ефективність останньої на численних прикладах інженерно-технічних задач.

Проблема, що у подальшому постала перед Миколою Вікторовичем Поляковим, була очевидною, простою та надзвичайно складною для розв'язання.

Щоб раціонально обрати чисельний метод розв'язку, треба сформулювати критерії такого вибору. Як правило, таким критерієм називають ефективність розрахунку, тобто максимальну точність за мінімальних витрат комп'ютерного часу та інших ресурсів комп'ютера. Але який обрати критерій ефективності, щоб порівняти два чисельні методи для певного класу крайових задач, зважаючи на те, що ці методи принципово розрізняються за логікою побудови та структурою? Цю, на перший погляд, неприступну для аналізу задачу вчений та його учні успішно вирішили у другій половині 90-х років, створивши методику такого порівняння. Головні ідеї цієї методики полягають у порівнянні не будь-яких, а лише базових алгоритмів кожного з методів на тестових задачах, що мають відомі аналітичні розв'язки (бажано у квадратурах). Саме ця методика уможливила у подальшому раціональне застосовування методу граничних елементів як спеціалізованого високоефективного підходу для розв'язання окремих задач.

Оскільки Поляков М. В. розглядав метод граничних елементів передусім як винятково високоточний метод, то перед ним та його учнями постала наступна задача: як довести точність чисельного алгоритму? На перший погляд, ця задача має відповідь, відому кожному студенту: «Треба порівняти результати розрахунків з експериментом». Але з яким експериментом? Час, коли результати розрахунків можна було порівнювати з фізичним експериментом, давно минув, наразі похибки багатьох чисельних розрахунків складають соті долі відсотка, а іноді й тисячні долі, а втім добре, якщо похибка вимірювань у фізичному експерименті менша за один відсоток, помилка, менша за десяту долю відсотка, – це вже, без перебільшення, прорив експериментаторів. Зрозуміло, що такий експеримент не може бути критерієм точності. Не може також бути критерієм і теоретичне дослідження алгоритму, яке, як правило, за кількісний критерій бере порядок апроксимації. Цей висновок можна обґрунтувати простим прикладом: для крайової задачі Неймана чи Діріхле для рівняння Лапласа в області канонічної геометричної форми метод граничних елементів нульового порядку апроксимації є точніший за метод скінченних різниць другого порядку, що неважко довести розрахунками на тестових прикладах. Вченому та його учням знову довелося розробляти спеціальну методику аналізу точності алгоритмів методу граничних елементів, яка, як і раніше, ґрунтується на розв'язках спеціально обраних тестових задач.

Що стосується вдосконалення методу граничних елементів, то у рамках наукової школи Миколи Вікторовича Полякова дослідження проводилися за трьома основними напрямками [2]:

а) розвиток ідей академіка Купрадзе В.Д. про перехід від сингулярних граничних інтегральних рівнянь до їх регулярних аналогів. Завдяки цій ідеї вдалося запропонувати алгоритм методу граничних елементів з інтегруванням по реальній межі, який підвищує точність розрахунку поблизу межі на один-два порядки та тим самим усуває один з відомих та суттєвих недоліків методу межових елементів. Учень Полякова М. В. Євдокимов Д. В. запропонував наближений регулярний алгоритм методу межових елементів з точками коллокації, що розташовані не на межі. а в області розв'язку поблизу межі. Цей алгоритм простіший за традиційний та вирішує багаторічну проблему – задачу з будь-якими крайовими умовами він зводить до рівняння другого роду. Метод дискретних особливостей тут

розглядається як окремий випадок методу граничних елементів. Завдяки регулярним формулюванням запропоновано прямий метод дискретних особливостей, який дещо поступається методу граничних елементів за точністю, але значно перевершує останній за швидкістю розрахунків;

б) застосування у методі граничних елементів параметрикса замість фундаментального розв'язку та локалізація граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу. Це відносно новий напрямок досліджень, але отримані результати дозволяють сподіватися на значне підвищення ефективності алгоритмів методу граничних елементів;

в) побудова нових фундаментальних розв'язків, наприклад, для системи рівнянь Онзагера, що дає змогу ефективно застосовувати до відповідних крайових задач метод граничних елементів;

г) розробка адаптивних алгоритмів методу граничних елементів, серед яких а-адаптивний підхід, який не має аналогів, заснований на асимптотичних розкладаннях граничних інтегральних рівнянь;

д) розробка методів ефективного обчислення об'ємних потенціалів. Запропоновано декілька алгоритмів, які суттєво прискорюють обчислення таких потенціалів у окремих випадках, однак побудова задовільних загальних алгоритмів – питання майбутнього.

Щодо комбінації методу межових елементів та інших чисельних, аналітичних чи наближених методів, то тут доцільно згадати наступні алгоритми [2]:

а) комбінація методу граничних елементів з методом дискретних вихорів чи іншими алгоритмами методу дискретних особливостей. Цей підхід, нарешті, подолав обмеженість методу граничних елементів у гідромеханіці лінійними задачами. Запропоновані Поляковим М. В. разом з Бразалук Ю. В. та Євдокимовим Д. В. алгоритми водночас демонструють точність методу граничних елементів для моделювання меж області розв'язку з ефективністю аналізу поля завихреності, притаманною методу дискретних вихорів. Взагалі метод граничних елементів зручно застосовувати разом з методами лагранжевого перенесення, до яких належать метод дискретних вихорів, методи частинок та інші. Наразі проводяться також роботи стосовно доповнення методу дискретних вихорів алгоритмами контурної динаміки;

б) сумісне застосування методу граничних елементів та асимптотичних методів (останні дозволяють робити важливі лінеаризації задач та враховувати ефекти інших геометричних масштабів). Окрім геометричних асимптотик (наприклад, задачі теплового захисту у теплофізиці), будувалися темпоральні асимптотики (задачі про повільні фазові переходи), асимптотичні розкладання застосовувалися як частина самого методу межових елементів для врахування об'єктів меншого геометричного масштабу;

в) сумісне застосування методу граничних елементів та методу скінченних різниць у задачах тепломасообміну, де перший застосовували для визначення поля швидкостей, а другий – для моделювання перенесення субстанції (теплової енергії чи хімічної речовини). Такий підхід був з успіхом застосований до задач перенесення забруднень у насиченому пористому середовищі;

г) сумісне застосування методів теорії примежового шару та методу граничних елементів у задачах зовнішньої гідромеханіки. Переваги такого підходу очевидні.

На відміну від К. Бреббія, який застосовував метод граничних елементів до всіх задач без винятку, Микола Вікторович Поляков завжди ретельно відбирав задачі для розв'язання і, мабуть, тому задачі, до яких він звертався, завжди давали плідні результати. Звичайно, він не полишав свій перший напрямок – теорію рухів ідеальної рідини – до задач занурення у цьому напрямку додалися задачі гідродинамічної взаємодії (сумісно з Бразалук Ю. В.), задачі про рух надтекучої рідини (сумісно з Бразалук Ю. В.), визначення приєднаних мас тіл складної геометричної форми в необмежених, напівобмежених та обмежених областях, у тому числі й у рамках підходу «частинка в комірці», який становить безумовний інтерес для теорії багатофазних течій (сумісно з Бразалук Ю. В.). Зазначені задачі виявилися перспективними з погляду застосування методу граничних елементів унаслідок складних форм області розв'язку, а в процесі порівняння різних чисельних методів було показано, що зі зростанням складності форми області (складність тут розуміється у повсякденному сенсі) витрати комп'ютерного часу методу граничних елементів зростають набагато менше, ніж для конкуруючих чисельних методів, за умов збереження точності розрахунку. Це спостереження покладено в основу першого напрямку, в якому Поляков М. В. та його наукова школа поширювали застосування методу межових елементів, – лінійні крайові задачі в областях складної геометричної форми.

Цілком природним уявляється поширення наукових інтересів вченого та його учнів на інший асимптотичний випадок механіки рідини – течії за малих чисел Рейнольдса, тобто течії Стокса та Озеєна. У цьому напрямку сумісно з Євдокимовим Д. В. метод граничних елементів було застосовано до спеціально побудованих асимптотичних математичних моделей гідродинаміки течій та процесів тепломасообміну в областях малих геометричних масштабів, а також до аналогічних математичних моделей гідродинаміки течій та процесів тепломасообміну в умовах мікрогравітації. Перший із цих класів задач має безумовне принципове значення для мікробіології, мікроелектроніки, мікромеханіки та навіть нанотехнологій, а другий – нерозривно пов'язаний з дослідженнями космічного простору. Природним узагальненням такого аналізу стало формулювання іншого напрямку діяльності наукової школи Миколи Вікторовича Полякова – застосування методу граничних елементів до чисельного розв'язання крайових задач, що виникають у асимптотичних математичних моделях технологічних та природних процесів.

До того ж цілком природним уявляється застосування методу граничних елементів до задач теорії тепломасообміну, зокрема задач теорії теплопровідності. У цьому напрямку треба виділити задачу Стефана (задачу про тепловий фазовий перехід у нерухомому середовищі) та інші задачі про тепловий фазовий перехід з урахуванням гідродинамічного ефекту фазового переходу (течії Стефана), для окремого випадку яких – задачі про повільний фазовий перехід – було побудовано асимптотичну математичну модель та до отриманих крайових задач було з успіхом застосовано метод граничних елементів (сумісно з Євдокимовим Д. В.).

Творчий науковий шлях Миколи Вікторовича Полякова супроводжувала тісна співпраця з представниками різних галузей науки та виробництва. Дуже плідними були контакти з Конструкторським бюро «Південне» імені академіка М. К. Янгеля, науковцями академічних інститутів м. Дніпра та інших міст України. Навіть у теперішній непростий час, коли промисловість практично неспроможна надати фінансову підтримку науковим дослідженням, він знаходив можливості допомагати вітчизняній індустрії.

Звичайно, цим коротким переліком робіт з обчислювальної теорії потенціалу аж ніяк не вичерпуються наукові інтереси професора Полякова М. В. Можна згадати великий цикл його робіт по оберненим задачам, виконаний спільно з Меньшиковим Ю. Л. [51–56], методика і організація навчального процесу та наукової роботи у вищій школі були вивчені в циклі монографій «Класичний університет». Микола Вікторович багато займався питаннями організації наукових досліджень: він входив в організаційні комітети численних міжнародних та всеукраїнських конференцій, був членом редколегій багатьох періодичних наукових видань, керував спеціалізованими науковими радами. У 2015 році він був обраний членом-кореспондентом Національної Академії наук України.

Бібліографічні посилання

1. **Гоман О.Г.** Професор Микола Вікторович Поляков – вчений, педагог/ О.Г. Гоман, Д.В. Євдокимов, Ю.Л. Меньшиков, В.В. Попов // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Моделювання, 2016. – С. 3-20.

2. **Кочубей О.О.** До 70-річчя з дня народження члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Миколи Вікторовича Полякова / О.О. Кочубей, Л.І. Книш, Д.В. Євдокимов // Вісник Дніпропетровськго університету. Серія: Механіка. – 2016. – №5. – Т.24. – Вип.20. – С. 3 – 16.

3. **Поляков М.В.** Обчислювальна теорія потенціалу в лінійних задачах механіки суцільного середовища / М.В. Поляков, Д.В. Євдокимов // «Актуальні проблеми механіки». Монографія серії: Підсумки науки до 100-річчя заснування Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. – Дніпро: Ліра. 2018. – С. 25–42.

4. **Ковтуненко В.М.** До питання про плоскі нестаціонарні задачі занурення / В.М. Ковтуненко, М.В. Поляков, В.В. Попов // Доповіді Академії наук Української РСР. Серія: А. – 1974. – № 7. – С. 623–625.

5. **Ковтуненко В.М.** К задаче осесимметричного проникания конуса в жидкость / В.М. Ковтуненко, Н.В. Поляков, В.В. Попов // Прикладна механіка. – 1975. – № 2. – С. 145–151.

6. **Гоман О.Г.** Об одном методе решения нелинейной плоской задачи погружения / О.Г. Гоман, Н.В. Поляков // Нелинейная механика: сб. науч. статей. – Днепропетровск. – 1975. – С. 154–157.

7. **Гоман О.Г.** К решению задачи погружения с помощью последовательных конформных отображений / О.Г. Гоман, Н.В. Поляков // Математические методы механики жидкости и газа. – Днепропетровск, 1981. – С. 46–49.

8. **Гоман О.Г.** Об одном применении метода параметрического дифференцирования / О.Г. Гоман, Н.В. Поляков // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1975. – Вып. 3. – С. 70–76.

9. **Гоман О.Г.** Об одном применении метода граничных интегральных уравнений / О.Г. Гоман, Н.В. Поляков // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск, 1979. – Вып. 25. – С. 9–13.

10. **Гоман О.Г.** Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задачи погружения / О.Г. Гоман, Н.В. Поляков // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1980. – С. 81–84.

11. **Поляков Н.В.** К применению метода граничных интегральных уравнений / Н.В. Поляков, Г.В. Расин // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1982. – С. 72–74.

12. **Поляков Н.В.** К решению задачи о кумулятивной струе / Н.В. Поляков, Т.И. Бондаренко // Математические методы механики жидкости и газа. – Днепропетровск, 1984. – С. 77–80.

13. **Поляков Н.В.** К вычислению интегралов, содержащих логарифмические особенности / Н.В. Поляков // Алгоритмы решения нелинейных задач и обработки данных. – Днепропетровск, 1984. – С. 127–130.

14. **Поляков Н.В.** К решению задачи стационарной теплопроводности / Н.В. Поляков // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1985. – С. 112–115.

15. **Поляков Н.В.** К применению метода ГИУ для смешанной краевой задачи в двусвязной области / Н.В. Поляков, В.А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1986. – С. 18–21.

16. **Поляков Н.В.** Об одой численной процедуре решения задачи погружения / Н.В. Поляков // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. – Днепропетровск, 1989. – С. 19–22.

17. **Поляков Н.В.** Численно-аналитические методы решения нелинейных краевых задач / Н.В. Поляков. – Днепропетровск, 1991.

18. **Поляков Н.В.** Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания / Н.В. Поляков. // Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2005.– 356 с.

19. **Поляков М.В.** Вибрані задачі механіки суцільного середовища. Обчислювально-аналітичні методи розв’язання / М.В. Поляков. // Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2006. – 320 с.

20. **Евдокимов Д.В.** Граничные интегральные уравнения процессов фильтрационно-диффузионного тепломассопереноса в пористой среде / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Метод дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции: тр. VII Международ. симп. ”Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”, 26–29 июня 1997. – Феодосия, 1997. – С. 58–61.

21. **Евдокимов Д.В.** Граничные интегральные уравнения процессов фильтрационно-диффузионного тепломассопереноса в пористой среде / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Метод дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции: тр. VII Международ. симп. ”Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”, 26–29 июня 1997. – Феодосия, 1997. – С. 62–65.

22. **Евдокимов Д.В.** Использование функций Грина в методах сингулярных граничных интегральных уравнений / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Метод дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции: тр. VII Международ. симп. ”Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”, 26–29 июня 1997. – Феодосия, 1997. – С. 66–69.

23. **Евдокимов Д.В.** К вопросу о моделировании диффузии завихренности в граничноинтегральных методах вычислительной гидродинамики / Д.В. Евдокимов, М.А. Найденова, Н.В. Поляков // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. – Донецк, 2001. – Т. 6. – С. 39–43.

24. **Поляков Н.В.** Применение метода граничных элементов для расчета процесса напыления / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. – 2001. – Сер. Механіка. – Вип. 4. – Том 1. – С. 146–151.

25. **Поляков Н.В.** Применение метода граничных элементов для расчета плоского течения идеальной жидкости в слое конечной глубины со свободной поверхностью / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Днепропетровск: ДГУ, 2000. – С. 11–17.

26. **Евдокимов Д.В.** Гидродинамическое взаимодействие малых объектов в потоке / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вестник Донецкого ун-та. – Серия А. Естественные науки. – 2002. – № 1. – С. 157–161.

27. **Бразалук Ю.В.** Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вестник Харьков. нац. ун-та. – 2003. – № 590. Серия Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – Вып. 1. – С. 55–60.

28. **Евдокимов Д.В.** Об одном интегральном представлении для уравнений Стокса в плоском случае / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Дифернціальні рівняння та їх застосування: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 3–9.

29. **Евдокимов Д.В.** Приближенное интегральное представление для стационарного распределения температуры в слабонеоднородной среде / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 9–14.

30. **Бразалук Ю.В.** Совместное применение методов расщепления и граничных элементов для решения задач теплопроводности / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вестник Херсон. гос. техн. ун-та. – 2003. –№ 3 (19). – С. 46–50.

31. **Евдокимов Д.В.** Построение матриц фундаментальных решений для системы уравнений Стокса / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, А.Н. Фетищев // Вестник Херсон. гос. техн. ун-та. – 2003. – № 3 (19). – С. 127–130.

32. **Поляков Н.В.** Матрицы фундаментальных решений для плоских нестационарных уравнений Стокса / Н.В. Поляков, Н.Г. Зинченко, Д.В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2005. – С. 3–11.

33. **Бразалук Ю.В.** Численное определение присоединенных масс методами теории потенциала / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вісник ХНУ. – № 661. – 2005. – С. 24–36.

34. **Бразалук Ю.В.** Применение метода граничных элементов для расчета присоединенных масс / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Труды междунар. симпозиума "Методы дискретних особенностей в задачах математической физики". – Харьков-Херсон, 2005. – С. 42–46.

35. **Бразалук Ю.В.** Исследование устойчивости вихревых структур путем численного эксперимента / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Автоматика, автоматизация, электротехнические комплексы и системы: сб. науч. трудов. – К. – № 1 (15). – 2005. – С. 31–36.

36. **Бразалук Ю.В.** Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вісник ХНУ. – № 703. – 2005. – С. 50–66.

37. **Поляков Н.В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды, Часть 1. Линейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія Механіка. – 2006. – № 2/1. – С. 7–25.

38. **Поляков Н.В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды, Часть 2. Нелинейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія Механіка. – 2006. – № 2/1. – С. 25–42.

39. **Бевза Э.К.** Математическая модель медленного фазового перехода на поверхности пузырьков и капель / Э.К. Бевза, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, Д.Н. Сербиченко, Т.Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 157–166.

40. **Евдокимов Д.В.** Расчет стационарных температурных полей в областях с малыми возмущениями границы / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, Т.И. Тарасова // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 167–176

41. **Евдокимов Д.В.** Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Н. Ивасишина, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 141–156.

42. **Бразалук Ю.В.** Расчет движения малых объектов в сложных потоках жидкости / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 63–68.

43. **Евдокимов Д.В.** Расчет движения малых объектов в сложных потоках жидкости / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, Д.Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 114–119.

44. **Андросова М.О.** Применение асимптотического анализа для расчета поверхностного роста биологической структуры / М.О. Андросова, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, Т.Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. – С. 50–58.

45. **Евдокимов Д.В.** Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – № 8. Серія Моделювання. – Вип. 1. – 2009. – С. 5 –17.

46. **Дидинский А.В.** Асимптотический анализ системы уравнений Онзагера / А.В. Дидинский, Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Вісник ДНУ, Серія: Моделювання. – 2010. – Вип. 2. – № 8. – С. 36–44.

47. **Евдокимов Д.В.** Численное моделирование роста биологических структур / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, Д.Н. Сербиченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія Механіка. – Вип. 15. – Т. 1. – 2011. – С. 145–157.

48. **Бразалук Ю.В.** Численная реализация обобщенного метода Блоха-Гиневского / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія Механіка. – Вип. 17. – Т. 1. – 2013. – С. 35–51.

49. **Бразалук Ю.В.** Исследование погрешности вихревых методов путем численного эксперимента / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вісник Херсон. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 3(50). – С. 224–229.

50. **Бразалук Ю.В.** Метод граничних елементів в задачах гідродинаміки та теплопровідності / Ю.В. Бразалук, О.Г. Гоман, Д.В. Євдокимов, О.О. Кочубей, М.В. Поляков // Дніпро: Ліра, 2019. – 228 с.

51. **Polyakov N.V.** The Models of External Action for Mathematical Simulation / N.V. Polyakov, Yu.L. Menshikov // Proc. 4th Int. Symp. on Systems Analysis and Simulation. – Berlin/Germeny, 1992. – P. 393–398.

52. **Polyakov N.V.** Operative evaluation of unbalance characteristics of a deform-able rotor / N.V. Polyakov, Yu. L. Menshikov // Proc. 8th Int. Symp. on Technical Diagnostics. (IMEKO), Dresden, 23–25 Sept. 1992. – P. 399–408.

53. **Поляков Н.В.** Выбор модели внешнего воздействия при математическом моделировании / Н.В. Поляков, Ю.Л. Меньшиков // Математические модели и современные информационные технологии. Херсон: сб. науч. тр. – К., 1998. – С. 126–129.

54. **Поляков Н.В.** К проблеме вибродиагностики дисбаланса ротора / Н.В. Поляков, Ю.Л. Меньшиков // Вибрации в технике и технологиях. – № 2 (47). – 2007. – С. 82–85

55. **Поляков Н.В.** Идентификация моделей внешних воздействий: монография / Н.В. Поляков, Ю.Л. Меньшиков // Днепропетровск: Наука та Освіта, 2009. – 188 с.

56. **Поляков Н.В.** Об обратной задаче астродинамики / Н.В. Поляков, Ю.Л. Меньшиков // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. 2014. — Вип. 6. – № 8, Т. 20. – С. 155–161.

Надійшла до редколегії 1.12.2020