

УДК 536.2

**В. В. Біляєва, О. І. Губін, О. В. Буряк**

DOI: 10.15421/372004

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара***ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО ЗАБРУДНЕННЯ  
ПОВІТРЯ У ВИРОБНИЧИХ ПРИМІЩЕННЯХ**

Запропонована чисельна модель для експрес-прогнозу теплового забруднення повітря у робочих приміщеннях. Модель основана на інтегруванні двовимірного рівняння енергії та рівняння для потенціалу швидкості. Для чисельного інтегрування використовується неявна різницева схема розщеплення й метод О. Самарського. Представлені результати чисельного експерименту.

**Ключові слова:** теплове забруднення, виробничі приміщення, аварія з викидом нагрітих газів, чисельне моделювання, неявна різницева схема розщеплення, поперемінно-трикутний метод.

Предложена численная модель для экспресс-прогноза теплового загрязнения воздуха в рабочих помещениях. Модель основана на интегрировании двумерного уравнения энергии и уравнения для потенциала скорости. Для численного интегрирования используется неявная разностная схема расщепления и метод А. Самарского. Представлены результаты численного эксперимента.

**Ключевые слова:** тепловое загрязнение, производственные помещения, авария с выбросом нагретых газов, численное моделирование, неявная разностная схема расщепления, попеременно-треугольный метод.

A numerical model is proposed for express forecasting of thermal air pollution in working rooms. The model is based on the integration of a two-dimensional energy equation and an equation for the velocity potential. For numerical integration, an implicit difference splitting scheme and the method of A. Samarskii are used. The results of a numerical experiment are presented.

**Key words:** thermal pollution, industrial premises, accident with the release of heated gases, numerical modeling, implicit difference splitting scheme, alternating triangular method.

**Вступ.** Аварії у виробничих приміщеннях супроводжуються викидом нагрітих газів. Наслідком таких аварій можуть бути вибухи, утворення вогнених куль (струменів), що приводять до термічної поразки людей, руйнування устаткування, комунікацій. Одним з важливих завдань є прогнозування процесу поширення нагрітих газів у виробничих приміщеннях після аварії з метою оцінки масштабів можливих наслідків аварій. Інженерні методики, що використовуються на практиці для прогнозу рівня теплового забруднення повітряного середовища у виробничих приміщеннях, ґрунтуються, як правило, на аналітичному розв'язку одновимірного рівняння перенесення домішки або на вживанні балансового співвідношення для приміщення (нульмірна модель). Сфера застосування таких методик дуже обмежена, оскільки вони не дозволяють врахувати місце аварійного витоку в приміщенні, вплив положення припливно-витяжних отворів вентиляції, наявність устаткування на процес поширення зони теплового забруднення в приміщенні.

В зв'язку з цим особливої актуальності набуває розробка теоретичних методів прогнозування теплового забруднення у виробничих приміщеннях, що дозволяють врахувати ті істотні чинники, що впливають на даний процес.

Вживання таких методів на практиці дозволить істотно підвищити якість прогнозів і може служити науковим обґрунтуванням для ухвалення інженерних рішень, направлених на мінімізацію збитку і наслідків аварій у виробничих приміщеннях хімічно небезпечних об'єктів. Метою даної роботи є створення чисельної моделі теплового забруднення повітря у робочих приміщеннях при викидах нагрітого газу.

#### **Математична модель теплового забруднення виробничого приміщення.**

Нехай у приміщенні стався викид нагрітого газу на протязі декількох секунд. Подача повітря в приміщення здійснюється через отвір, розташований на лівій стінці приміщення, а виток повітря з кімнати розташовується на правій стінці приміщення. Завданням є дослідження динаміки формування зони теплового забруднення в приміщенні.

Для розрахунку необхідно побудувати математичну модель процесу.

Якщо розглядається задача тепломасопереносу у виробничому приміщенні, то її розв'язок розбивається на два етапи:

1. Розрахунок гідродинаміки течії (тобто розрахунок поля швидкості повітря у приміщенні при роботі вентиляції).

2. Розрахунок процесу тепломасопереносу (визначення поля температур у виробничому приміщенні).

Для розрахунку поля температур у приміщенні будемо використовувати наступне рівняння [2, 3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^N q_i(t) \delta(r - r_i), \quad (1)$$

де  $T$  – температура, К;  $t$  – час, с;  $u, v$  – компоненти вектора швидкості повітря в приміщенні, м/с;  $q_i$  – інтенсивність точкового джерела викиду теплового забруднення, Вт;  $\mu_x, \mu_y$  – коефіцієнти температуропровідності, м<sup>2</sup>/с;  $r_i = (x_i, y_i)$ ,  $x_i, y_i$  – координати джерела викиду нагрітого газу, м.

Розв'язок цього рівняння будемо визначати в області, що має форму прямокутника:  $R = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$ .

На бічних сторонах прямокутника  $R$  для моментів часу  $t > 0$  ставляться такі граничні умови. На частині границі  $\Gamma$ , де повітря втікає в розрахункову область, вважаємо, що температура відома, тому:

$$T|_{\Gamma} = T_0, \text{ на частині границі } \Gamma, \text{ де } (\vec{V} \cdot \vec{n}) < 0.$$

На межі, де повітря виходить з розрахункової області  $R$ , гранична умова має вигляд [2, 3]:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{ на частині границі } \Gamma, \text{ де } (\vec{V} \cdot \vec{n}) \geq 0.$$

Тут  $\vec{n}$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі  $\Gamma$ ;  $\vec{V}$  – вектор швидкості повітряного потоку.

На нижній межі  $y = 0$  (підлога) ставиться умова:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{y=0} = 0.$$

На верхній межі (стеля приміщення)  $y = Y$  гранична умова має вигляд:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{y=Y} = 0.$$

Початкову умову для рівняння (1) поставимо у вигляді: при  $t = 0$ ,  $T = T_0(x, y)$ , де  $T_0$  – відоме значення температури у приміщенні, К.

Для моделювання теплового забруднення виробничого приміщення необхідно знати швидкість повітря у виробничому приміщенні при роботі вентиляції. Але потрібно відзначити, що швидкість повітряного потоку змінюється в різних зонах приміщення, тому що на нього впливає обладнання, що розташовується у приміщенні, а також положення отворів вентиляції та повітрообмін. Для розв'язку цієї задачі будемо використовувати модель потенційної течії. Тому для розв'язку потрібно проінтегрувати наступне рівняння для потенціалу швидкості  $P$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Компоненти швидкості повітря розраховуються наступним чином:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (3)$$

Граничні умови для рівняння Лапласа мають вигляд:

– на твердих поверхнях:  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ , де  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до твердої стінки;

– на границі входу повітря у приміщення  $\frac{\partial P}{\partial n} = V_n$ , де  $V_n$  – відоме значення швидкості потоку, м/с;

– на вихідній границі:  $P = P_0 + const$  (умова Діріхле).

**Чисельне інтегрування рівнянь моделі.** Для чисельного інтегрування рівняння для потенціалу швидкості використовується поперемінно-трикутний

метод А. А. Самарського [4]. Для використання цього методу, рівняння для потенціалу швидкості записується в «еволюційному» вигляді [1], а далі, апроксимується наступними залежностями:

$$\frac{P_{i,j}^{n+1/2} - P_{i,j}^n}{0,5\Delta\eta} = \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y^2} + \frac{-P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2}; \quad (4)$$

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1/2}}{0,5\Delta\eta} = \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{-P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{-P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2}. \quad (5)$$

Як видно з даних виразів, чисельний розв'язок двовимірного рівняння для визначення потенціалу здійснюється в два кроки. На першому кроці із співвідношення (4) знаходяться «проміжні» значення потенціалу  $P_{i,j}^{n+1/2}$  на часовому шарі « $n+1/2$ », а на другому кроці – із співвідношення (5) визначаються «остаточні» значення потенціалу  $P_{i,j}^{n+1}$  на часовому шарі « $n+1$ ». Невідомі  $P_{i,j}$  на кожному кроці визначаються за методом рахунку, що біжить.

Компоненти вектора швидкості розраховуються за співвідношеннями:

$$u_{ij} = \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad v_{ij} = \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Компоненти вектора швидкості розраховуються на гранях різницевих вічок (контрольних об'ємів), що дозволяє побудувати консервативну різницеву схему.

Чисельне інтегрування двовимірного рівняння перенесення температури у виробничому приміщенні виконується на базі чотирьохшагової неявної схеми розщеплення [1]. Основні риси цієї схеми розглянуто нижче.

Похідну за часом апроксимуємо розділеною різницею «назад»:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t}.$$

Конвективні похідні запишемо у вигляді [1]:

$$\frac{\partial u T}{\partial x} = \frac{\partial u^+ T}{\partial x} + \frac{\partial u^- T}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v T}{\partial y} = \frac{\partial v^+ T}{\partial y} + \frac{\partial v^- T}{\partial y},$$

$$\text{де } u^+ = \frac{u + |u|}{2}, u^- = \frac{u - |u|}{2}, v^+ = \frac{v + |v|}{2}, v^- = \frac{v - |v|}{2}.$$

Апроксимуємо конвективні похідні розділеними різницями «проти потоку» на верхньому часовому шарі таким чином [1]:

$$\frac{\partial u^+ T}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^+ T_{ij}^{n+1} - u_{ij}^+ T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ T^{n+1};$$

$$\frac{\partial u^- T}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^- T_{i+1,j}^{n+1} - u_{ij}^- T_{ij}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- T^{n+1};$$

$$\frac{\partial v^+ T}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^+ T_{ij}^{n+1} - v_{ij}^+ T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ T^{n+1};$$

$$\frac{\partial v^- T}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^- T_{i,j+1}^{n+1} - v_{ij}^- T_{ij}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- T^{n+1},$$

де  $L_x^+, L_x^-, L_y^+, L_y^-$  – позначення різницевих операторів при апроксимації конвективних похідних.

Другі похідні апроксимуємо наступними виразами [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \mu_x \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{ij}^{n+1}}{\Delta x^2} - \mu_x \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- T^{n+1} + M_{xx}^+ T^{n+1};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \approx \mu_y \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2} - \mu_y \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- T^{n+1} + M_{yy}^+ T^{n+1},$$

де  $M_{xx}^+, M_{xx}^-, M_{yy}^+, M_{yy}^-$  – позначення різницевих операторів при апроксимації других похідних. З врахуванням приведених вище позначень різницевих операторів запишемо різницевий аналог рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} + L_x^+ T^{n+1} + L_x^- T^{n+1} + L_y^+ T^{n+1} + L_y^- T^{n+1} + \sigma T_{ij}^{n+1} = \\ = (M_{xx}^+ T^{n+1} + M_{xx}^- T^{n+1} + M_{yy}^+ T^{n+1} + M_{yy}^- T^{n+1}) + q_{ij} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Символ  $\delta_{ij}$  позначає число "1" або "0", залежно від того, знаходиться чи ні в різницевій комірниці "ij" джерело теплового забруднення. Величина  $q_{ij}$  дорівнює інтенсивності викиду  $q_k$  відповідного  $k$ -го джерела, що знаходиться в різницевій комірниці "ij":

$$q_{ij} = q_k / \Delta x / \Delta y .$$

Розщепимо різницеве рівняння на чотири рівняння так, щоб на кожному кроці враховувався лише один напрям перенесення температури, обумовлений знаком при конвективних похідних. При апроксимації других похідних використовуватимемо два часових шари з метою здобуття на верхньому часовому шарі трикутного шаблону. Це дозволить здійснити вирішення кожного різницевого рівняння за методом рахунку, що біжить. В цьому випадку різницеві рівняння мають вигляд:

- на першому кроці розщеплення  $k = n + \frac{1}{4}$  :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^k - T_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( L_x^+ T^k + L_y^+ T^k \right) = \\ = \frac{1}{4} \left( M_{xx}^+ T^k + M_{xx}^- T^k + M_{yy}^+ T^n + M_{yy}^- T^n \right) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на другому кроці розщеплення  $k = n + \frac{1}{2}$ ,  $c = n + \frac{1}{4}$  :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^k - T_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( L_x^- T^k + L_y^- T^k \right) = \\ = \frac{1}{4} \left( M_{xx}^- T^k + M_{xx}^+ T^c + M_{yy}^- T^k + M_{yy}^+ T^c \right) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на третьому кроці розщеплення  $k = n + \frac{3}{4}$ ,  $c = n + \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^k - T_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( L_x^+ T^k + L_y^- T^k \right) = \\ = \frac{1}{4} \left( M_{xx}^- T^c + M_{xx}^+ T^k + M_{yy}^- T^k + M_{yy}^+ T^c \right) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на четвертому кроці розщеплення  $k = n + 1$ ;  $c = n + \frac{3}{4}$  :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^k - T_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( L_x^- T^k + L_y^+ T^k \right) = \\ = \frac{1}{4} \left( M_{xx}^- T^k + M_{xx}^+ T^c + M_{yy}^- T^c + M_{yy}^+ T^k \right) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l. \end{aligned}$$

З даних виразів можна отримати явні формули для визначення невідомого значення температури на кожному кроці розщеплення.

**Результати моделювання.** Розглядається наступний сценарій. У приміщенні стався викид нагрітого газу біля обладнання. Температура газу в зоні забруднення  $T=373$  К. Розміри приміщення: довжина – 11 м, висота – 5,7 м. Швидкість вхідного потоку у приміщення 0,5 м/с, коефіцієнти теплопровідності дорівнюють  $0,7 \text{ м}^2/\text{с}$  у кожному напрямку. Викид нагрітого газу відбувається на протязі 30 с.

Результати моделювання наведено на рис. 1, 2. На рисунках показано формування зони теплового забруднення у приміщенні для двох моментів часу після аварійного викиду газу. Бачимо, що зона теплового забруднення «захоплює» обладнання, що розташоване у приміщенні та витягується у напрямку виходу повітряного потоку з приміщення (тобто в напрямку вихідного отвору вентиляції).

Таким чином, за допомогою розробленого методу з'являється можливість визначити вплив параметрів провітрювання на динаміку формування зони теплового забруднення у приміщенні. На базі цієї інформації можна прогнозувати ризик вторинної аварії, що може відбутися у приміщенні, якщо в тій або іншій зоні приміщення з'являться зони підвищеної температури.

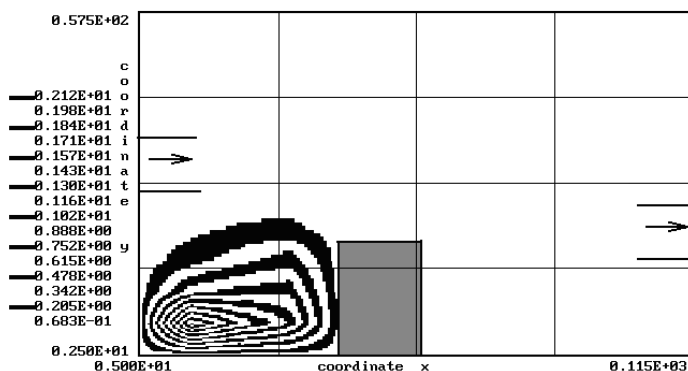


Рис. 1 – Зона теплового забруднення для моменту часу  $t=5\text{с}$

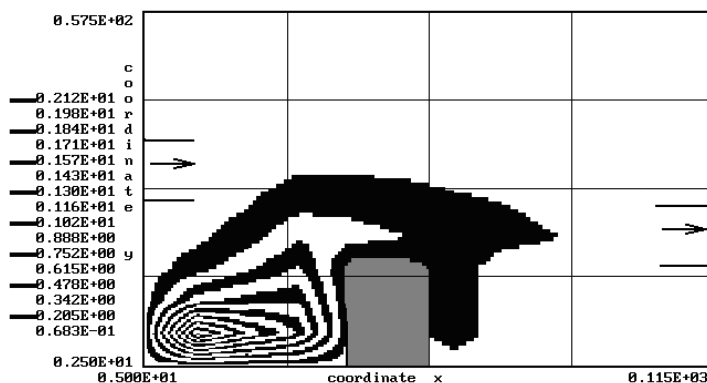


Рис. 2 – Зона теплового забруднення для моменту часу  $t=25\text{с}$

Розрахунок даної задачі на ПК за допомогою розробленої чисельної моделі методу вимагає 15 секунд, що дозволяє оперативно прогнозувати тепловий режим у робочих приміщеннях при аварійних ситуаціях.

**Висновки.** Побудовано чисельну модель теплового забруднення повітряного середовища в виробничому приміщенні. На основі розробленої чисельної моделі виконано розрахунок теплового забруднення повітряного середовища в робочому приміщенні при аварійній ситуації, що супроводжується викидом нагрітого газу. Подальший розвиток моделі необхідно вести у напрямку розробки її 3D варіанта.

### Бібліографічні посилання

1. **Антошкина Л. И.** Математическое моделирование загрязнения воздушной среды в производственных помещениях химически опасных объектов / Антошкина Л. И., Беяев Н. Н., Никульникова В. В. – Белгород: Роснаучкнига, 2007. – 168 с.
2. **Крейт Ф.** Основы теплопередачи / Крейт Ф., Блэк У. – М.: Мир, 1983. – 512 с.
3. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
4. **Самарский А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

*Надійшла до редколегії 21.11.2019*