ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 104–115

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 519.6

НАПІВНЕПЕРЕРВНА ЗНИЗУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЯКІ ДІЮТЬ У ЧАСТКОВО УПОРЯДКОВАНИЙ ЗА КОНУСОМ НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР

А. В. Довженко

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: anthony3007@rambler.ru

Запропонована схема напівнеперервної знизу регуляризації відображень, які діють у простори, частковий порядок у яких задається конусом із пустою топологічною внутрішністю.

Ключові слова. Частково упорядковані простори, напівнеперервна знизу регуляризація, порядкові конуси з пустою внутрішністю.

1. Вступ

Добре відомим фактом теорії варіаційного числення є можливість побудови для довільної дійснозначної функції $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ її напівнеперервної знизу регуляризації виходячи з правила

$$\overline{f}\,(x) = \liminf_{y \to x} f(x).$$

Проте у випадку, коли $f : X \to Y$ є відображенням, де Y є частково впорядкованим нормованим простором, властивість напівнеперервності можна означити в декількох, загалом, незалежних варіантах. У даній роботі розглядається питання напівнеперервної знизу регуляризації відображень $f : X \to Y$, що означає пошук найбільшого з усіх напівнеперервних знизу відображень, які є меншими ніж f.

Ця проблема була частково розв'язана в [4], де авторами запропонована схема напівнеперервної знизу регуляризації векторнозначних відображень, яка опирається на поняття границі послідовності множин за Пеневле–Куратовським, та є зручною для практичного застосування. Проте метод, запропонований в [4], дійсний лише для відображень, які діють у простір, напівупорядкований конусом з непустою внутрішністю. Ця умова суттєво обмежує клас відображень, які можна регуляризувати. Так, що, наприклад, конуси додатних елементів у більшості лебегових просторів мають пусту внутрішність, проте, що суттєво, їх алгебраїчна внутрішність є непустою.

У зв'язку з цим, метою даної роботи є дослідження проблеми напівнеперервної знизу регуляризації відображень, які діють у простір, напівупорядкований конусом з непустою алгебраїчною внутрішністю. Умова непустоти алгебраїчної внутрішності є менш обмежливою, ніж непустота внутрішності, що дозволяє поширити метод запропонований в [4], на більш широкий клас відображень.

2. Основні поняття та попередні результати

У цьому параграфі наведемо ключові поняття та означення, необхідні нам для розгляду статті. В першій частині нагадаємо поняття напівнеперервності знизу відображення, а в другій звернемо увагу на поняття та властивості алгебраїчної внутрішності конуса.

2.1. Поняття напівнеперервності знизу відображення

У даній статті через E та F будемо позначати дійснозначні векторні топологічні простори. Для підмножини S в E чи F, $\operatorname{Int} S$ та $\operatorname{cl} S$ будуть означати відповідно внутрішність та замикання множини S.

Означення 1. Множина $\Lambda \subset F$ називається конусом, якщо

$$\forall \lambda \in \Lambda : \alpha\lambda \in \Lambda, \forall \alpha > 0.$$

Означення 2. Конус $\Lambda \subset F$ називається загостреним, якщо

$$\Lambda \cap -\Lambda = \{0_F\}.$$

Ми будемо розглядати замкнені та загострені конуси. Такий конус Λ породжує частковий порядок в просторі F, який позначається $\preceq_\Lambda$ і означає наступне:

$$y_1 \preceq_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1 + \Lambda.$$

Під простором $F^\bullet$ будемо розуміти простір $F \cup \{+\infty\}$, де $+\infty$ є найбільшим елементом простору F відносно порядку $\preceq_\Lambda$, а саме: для будь-якого елемента $f \in F: \ f \not\succeq_\Lambda \{+\infty\}$.

Зауваження 1. Поняття невласного елемента $\{+\infty\}$ у напівупорядкованих просторах є досить неоднозначним. У даній статті будемо дотримуватися такого тлумачення: будемо казати, що послідовність $\{f_n\}_n \subset F$ збігається до $\{+\infty\}$, якщо:

(i) $\{f_n\}_n$ не обмежена за нормою простору F,

(ii) $\forall b \in F \ \exists n_0 : \ b \not\succeq f_n, \ \forall n > n_0$.

Означення 3. Підмножина A в F називається напрямленою вгору, якщо для будь-яких $a, b \in A$ існує $c \in A$ таке, що $a \preceq_\Lambda c$ та $b \preceq_\Lambda c$.

Напрямлені вниз множини визначаються за подібною схемою.

Нижньою гранню множини A називатимемо елемент $\inf A$, який задовольняє умови:

1. $\inf A \preceq_\Lambda b, \ \forall b \in A$;

2. $c \preceq_{\Lambda} \inf A,\ \forall c \in F$ тоді і тільки тоді, коли $c \preceq_{\Lambda} b,\ \forall b \in A$,

Простір F називається решіткою, якщо для будь-яких елементів $a, b \in F$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$. І, насамкінець, решітка, в якій будь-яка напрямлена вгору, обмежена зверху непуста множина має точну верхню границю, називається повною векторною решіткою.

Означення 4. Будемо казати, що відображення $g : E \to E^{\bullet}$ є меншим за відображення $f : E \to E^{\bullet}$, якщо

$$g(x) \preceq_{\Lambda} f(x),\ \forall\, x \in E.$$

Означення 5. Областю визначення відображення $f : E \longrightarrow F^{\bullet}$, яка позначається як $\operatorname{Dom} f$, називається множина:

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in E \,|\, f(x) \neq +\infty\}.$$

Означення 6. Різницею множин A і B: $A - B$ називається множина

$$A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}.$$

Наведемо поняття нижньої границі послідовності множин $\{A_n\} \subset F$ у сенсі Пеневле–Куратовського:

$$\liminf_n A_n = \Big\{ y \in F : y = \lim_n y_n,\ \exists n_0 :\ y_n \in A_n,\ \forall n \leq n_0 \Big\}.$$

Кажуть, що послідовність множин $\{A_n\}$ збігається знизу до множини $A \subset F$ в сенсі Пеневле–Куратовського, якщо

$$A \subset \liminf_n A_n.$$

Нагадаємо тепер відомі поняття напівнеперервності знизу (нн. зн.) та секвенційної нн. зн. векторнозначних відображень.

Означення 7. [5] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається напівнеперервним знизу(нн. зн.) в точці $x_0 \in E$, якщо для будь-якого околу нуля $V \in F$ і довільного $b \in F$, яке задовольняє нерівність $b \preceq_{\Lambda} f(x_0)$, в E існує окіл U точки x_0 такий, що

$$f(U) \subset b + V + C \cup \{+\infty\}. \tag{2.1}$$

Означення 8. [5] Якщо $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, то відображення f буде нн. зн. в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли для будь-якого околу нуля $V \in F$ існує такий окіл U точки x_0, що

$$f(U) \subset f(x_0) + V + C \cup \{+\infty\}. \tag{2.2}$$

Означення 9. [2] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається секвенційно–нн. зн. (ск.–нн. зн.) в точці $x_0 \in E$, якщо для будь-якого $b \in F$, яке задовольняє умові $b \preceq_{\Lambda} f(x_n)$, і для будь-якої послідовності $\{x_n\}_n \subset E$, яка збігається до x_0, існує послідовність $\{b_n\}_n \subset F$, яка, в свою чергу, збігається до b і кожен її елемент задовольняє нерівності

$$b_n \preceq_{\Lambda} f(x_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Означення 10. [2] Якщо $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, то відображення f буде ск.–нн. зн. в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_n \subset E$, яка збігається до x_0, існує відповідна послідовність $\{b_n\}_n \subset F$, яка збігається до $f(x_0)$ і кожен її елемент задовольняє нерівності

$$b_n \preceq_\Lambda f(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

В [2] було доведено, що поняття нн.зн. та секвенційної–нн. зн. є еквівалентними, якщо простори E та F метризовані.

2.2. Алгебраїчна внутрішність конуса та її властивості

Ключовим моментом статті є умова непустоти алгебраїчної внутрішності конуса, який задає частковий порядок в E. У зв'язку з цим наведемо ряд положень, які будуть використані далі та, можливо, становлять самостійний інтерес.

Означення 11. Нехай S — непуста підмножина дійсного лінійного простору E.

1. Множину

   $$\operatorname{cor}(S) := \{\bar{x} \in S \,|\forall x \in E \ \exists \bar{\alpha} > 0 : \bar{x} + \alpha x \in S, \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\}$$

   називають алгебраїчною внутрішністю S.

2. Множину S із властивістю $S = \operatorname{cor}(S)$ називають алгебраїчно відкритою.

3. Множину елементів, яка не належить ані $\operatorname{cor}(S)$, ані $\operatorname{cor}(E \backslash S)$, називають алгебраїчною границею S.

4. Елемент $\bar{x} \in E$ називають лінійно допустимим елементом множини S, якщо існує $x \in S, x \neq \bar{x}$, з властивістю

   $$\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x} \in S, \ \forall \alpha \in (0, 1].$$

   Об'єднання множини S та всіх її допустимих елементів називають алгебраїчним замиканням S і позначають

   $$\operatorname{lin}(S) := S \cup \{x \in E \,|\, x \text{ лінійно допустимий елемент із } S\}.$$

   Якщо $S = \operatorname{lin}(S)$, то множину S називають алгебраїчно замкненою.

5. Множину S називають алгебраїчно обмеженою, якщо для будь-якого $\bar{x} \in E$ і будь-якого $x \in E$ існує $\bar{\alpha} > 0$ таке, що

   $$\bar{x} + \alpha x \neq S, \ \forall \alpha \geq \bar{\alpha}.$$

Розглянемо тепер деякі властивості конусів із непустою алгебраїчною внутрішністю.

Лема 1. *[3] Для непустої випуклої множини S дійсного лінійного простору виконуються наступні твердження:*

1. $\bar{x} \in \operatorname{cor}(S), \tilde{x} \in \operatorname{lin}(S) \Longrightarrow \{\alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\bar{x} \,|\alpha \in [0,1)\} \subset \operatorname{cor}(S)$;
2. $\operatorname{cor}(\operatorname{cor}(S)) = \operatorname{cor}(S)$;
3. $\operatorname{cor}(S)$ *та* $\operatorname{lin}(S)$ *є опуклими множинами;*
4. $\operatorname{cor}(S) \neq \emptyset \Longrightarrow \operatorname{lin}(\operatorname{cor}(S)) = \operatorname{lin}(S)$ *та* $\operatorname{cor}(\operatorname{lin}(S)) = \operatorname{cor}(S)$.

Означення 12. Якщо конус $\Lambda \in F$ має непусту алгебраїчну внутрішність, то будемо казати, що елемент $a \in F$ є строго меншим за конусом, ніж елемент $b \in F$, і позначати це як $a \prec_\Lambda b$, якщо має місце наступна нерівність

$$b \in a + \operatorname{cor}(\Lambda) \cup \{+\infty\}. \tag{2.3}$$

Лема 2. *[3] Нехай Λ — опуклий конус у дійсному лінійному просторі F з непустою алгебраїчною внутрішністю. Тоді:*

1. $\operatorname{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$ *– випуклий конус;*
2. $\operatorname{cor}(\Lambda) = \Lambda + \operatorname{cor}(\Lambda)$.

Зауваження 2. Якщо конус $\Lambda \subset F$ є загостреним та випуклим, а, отже, він породжує частковий порядок на просторі F, і має непусту алгебраїчну внутрішність, то конус $\operatorname{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$, за лемою 2, також породжує частковий порядок на F.

Наведемо тепер необхідні властивості конусів з непустою алгебраїчною внутрішністю. Нехай Λ — замкнений, випуклий та загострений конус. Тоді мають місце наступні результати.

Лема 3. *Якщо $\operatorname{cor}(\Lambda) \neq \emptyset$, то знайдеться збіжна до 0_F послідовність $\{y_n\}$ така, що $y_n \succ 0_F$.*

Доведення. Внаслідок леми 2, множина $\operatorname{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$ є опуклим конусом. За означенням опуклості множини. Це означає, що для будь-яких двох елементів a, b відрізок, що їх з'єднує:

$$[a,b] = \{\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

З цього випливає, що, обравши довільний елемент y з $\operatorname{cor}(\Lambda)$, можна стверджувати, що відрізок $[0_F, y]$ належить конусу $\operatorname{cor}(\Lambda) \cup \{0_X\}$. Більше того, $(0_F, y] \in \operatorname{cor}(\Lambda)$. А тому, побудувавши послідовність

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot y, n \in \mathbb{N},$$

легко бачити, що вона збігається до 0_F та не належить до $\operatorname{cor}(\Lambda)$, що і доводить лему. $\square$

Наслідок 1. *Для довільного $y \in \Lambda$, знайдеться послідовність $\{y_n\}_n$ така, що*

$$y_n \to y, \ y_n \succ_\Lambda y.$$

Наслідок 2. *Для довільного* $y \in -\Lambda$, *знайдеться послідовність* $\{y_n\}_n$ *така, що*

$$y_n \to y, \; y_n \prec_\Lambda y.$$

Наслідки 1 і 2 доводяться за допомогою паралельного переносу точки $y \in F$ в 0_F, після чого застосовується результат леми 3.

Лема 4. *Якщо* $\mathrm{cor}\,(\Lambda) \neq \emptyset$, *то*

$$\Lambda \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{cor}\,(\Lambda))\,. \tag{2.4}$$

В разі ж замкнутості конуса Λ

$$\Lambda = \mathrm{cl}\,(\mathrm{cor}\,(\Lambda))\,. \tag{2.5}$$

Доведення. Доведення цієї леми випливає з леми 3. Припустимо, що твердження (2.4) є хибним. Тоді знайдеться елемент $\lambda \in \Lambda$ такий, що

$$\lambda \notin \mathrm{cl}\,(\mathrm{cor}\,(\Lambda))\,.$$

Проте, це суперечить тому, що для довільного $\lambda \in \Lambda$ знайдеться збіжна до нього послідовність $\{\lambda_n\}_n$, така, що $\lambda_n \succ_\Lambda \lambda$. Інакше, за властивістю $\mathrm{cor}\,(\Lambda) = \Lambda + \mathrm{cor}\,(\Lambda)$ (див. лему 2), отримаємо $\{\lambda_n\}_n \in \mathrm{cor}\,(\Lambda)$, а, отже, її границя повинна належати замиканню алгебраїчної внутрішності конуса.

З іншого боку, зрозуміло, що у разі, коли конус Λ є замкненим, то замикання його алгебраїчної внутрішності буде належати самому конусу, з чого випливає (2.5). □

Зазначимо, що у випадку скінченновимірності простору E, поняття внутрішності та алгебраїчної внутрішності співнадають. Проте у нескінченновимірних просторах такої рівності, як правило, не існує.

3. Поняття множини нижнього рівня та її властивості

У цьому параграфі нагадаємо поняття множини нижнього рівня, введеного в роботі [4], та її зв'язок із властивістю напівнеперервності знизу для векторнозначних відображень.

Означення 13. Нехай f векторнозначне відображення і $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$. Через $\vartheta\,(x_0)$ позначимо сім'ю околів точки x_0. Тоді множина нижнього рівня визначається таким чином:

$$A^f_{x_0} := \{y \in F \,|\forall\, V \in \vartheta\,(y)\,, \exists U \in \vartheta\,(x_0)\,,\; f\,(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}\} \tag{3.1}$$

або, в секвенційному варіанті:

$$s\text{--}A^f_{x_0} := \{y \in F\,|\forall\, \{x_n\}_n \to x_0,\, \exists\, \{b_n\}_n \to y,\, b_n \preceq_\Lambda f\,(x_n)\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}\} \tag{3.2}$$

Нагадаємо зв'язок множини нижнього рівня з поняттям нн. зн., який було показано в роботі [4].

Твердження 1. Нехай f — векторнозначне відображення і $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Тоді,

1. відображення f є ск.–нн. зн. в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0) \in s - A^f_{x_0}$;
2. відображення f є нн. зн. в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0) \in A^f_{x_0}$.

Твердження 2. Якщо простори E та F метризовані, $f : E \to F^\bullet$, $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. То
$$A^f_{x_0} = s\text{–}A^f_{x_0}.$$

Надалі будемо розглядати випадок, коли відображення f задане в парі метризованих просторів, тому позначатимемо множину нижнього рівня в секвенційному варіанті як $A^f_{x_0}$.

Наведемо тепер властивості множини нижнього рівня. Нехай задано відображення $f : E \to F^\bullet$, $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Тоді множина нижнього рівня має такі властивості:

1. $A^f_{x_0} = A^f_{x_0} - \Lambda$;
2. відображення f є нн. зн. в точці $x_0 \Longleftrightarrow A^f_{x_0} = f(x_0) - \Lambda$;
3. якщо простір F є банаховою решіткою, то множина нижнього рівня $A^f_{x_0}$ напрямлена вгору.

4. Напівнеперервна знизу регуляризація відображень

У цьому параграфі вивчається питання нн. зн. регуляризації векторнозначних відображень $f : E \to F^\bullet$, де F — повна векторна решітка, яка напівупорядкована конусом із непустою алгебраїчною внутрішністю. Зауважимо, що при цьому не робиться жодних припущень щодо непустоти внутрішності конуса.

Нехай для будь-якого $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ має місце умова $A^f_{x_0} \neq \emptyset$. Введемо до розгляду таке відображення:

$$I_f(x_0) := \sup A^f_{x_0}. \tag{4.1}$$

Зауважимо: з того, що F є повною векторною решіткою, а A^f_x — обмежена зверху множина, випливає, що відображення I_f є означеним для кожної точки $x \in \operatorname{Dom} f$.

Теорема 1. *Нехай F — повна векторна решітка, яка напівупорядкована конусом із непустою алгебраїчною внутрішністю. Тоді відображення I_f є нн. зн. для кожного x з $\operatorname{Dom} f$. Більше того, I_f є найбільшим з нн. зн. відображень, які не перевищують f, а, отже, I_f є нн. зн. регуляризацією відображення f.*

Доведення теореми розіб'ємо на декілька кроків. Кожен наступний результат будемо записувати у вигляді окремої леми.

Лема 5. *Для будь-якого опуклого конуса* $\Lambda \in F$

$$(F \backslash \Lambda) - \Lambda = F \backslash \Lambda. \tag{4.2}$$

Лема 6. *[4] Значення відображення* I_f *в точці* x_0 *належить замиканню* $\operatorname{cl} A^f_{x_0}$

Доведення. Внаслідок леми 4, достатньо довести, що для усіх $\mu \in \operatorname{cor}(\Lambda)$ має місце подання

$$I_f(x_0) - \mu = \operatorname{cl} A^f_{x_0}. \tag{4.3}$$

□

Лема 7. *[4] Для будь-якого елемента* $y_0 \in A^f_{x_0}$*, такого, що* $y_0 \prec_\Lambda I_{f(x_0)}$ *існує послідовність* $\{\beta_k\}_k \subset \operatorname{cl} A^f_{x_0}$*, для якої виконується така умова:*

$$\beta_k \to I_f(x_0), \; y_0 \prec_\Lambda \beta_k, \forall\, k. \tag{4.4}$$

Доведення. Для довільного $k > 0$, нехай

$$\beta_k = I_f(x_0) - \frac{1}{k}\left(I_f(x_0) - y_0\right). \tag{4.5}$$

Внаслідок твердження 2 в лемі 2, маємо:

$$\beta_k - y_0 = \frac{k-1}{k}\left(I_f(x_0) - y_0\right) \in \operatorname{cor}(\Lambda),$$

з чого випливає, що

$$y_0 \prec_\Lambda \beta_k, \forall\, k.$$

З іншого боку, лема 6 гарантує, що

$$I_f(x_0) \in \operatorname{cl} A^f_{x_0}.$$

Тому, за побудовою послідовності $\{\beta_k\}_k$ зрозуміло, що вона належить до $\operatorname{cl} A^f_{x_0}$ та збігається до елемента $I_f(x_0)$, що і доводить лему. □

Зауважимо, що для довільного $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ мають місце співвідношення

$$\operatorname{cl} E_f(x_0) = H_f(x_0), \quad A^f_{x_0} \subset \operatorname{cl} E_f(x_0) = H_f(x_0) = \operatorname{cl} A^f_{x_0},$$

де відповідні множини означені як

$$E_f(x_0) := \left\{ y \in A^f_{x_0} \,\middle|\, y \prec_\Lambda I_f(x_0) \right\}, \; H_f(x_0) := \left\{ y \in \operatorname{cl} A^f_{x_0} \,\middle|\, y \preceq_\Lambda I_f(x_0) \right\}.$$

Лема 8. *[4] Має місце тотожність* $\operatorname{cl} E_f(x_0) = H_f(x_0)$.

Як випливає з леми 8, виконується співвідношення:

$$A^f_{x_0} \subset \operatorname{cl} E_f(x_0) = H_f(x_0) = \operatorname{cl} A^f_{x_0}. \tag{4.6}$$

Тепер доведемо лему, яка відіграє основну роль у доведенні напівнеперервності знизу відображення $I_f(x_0)$.

Лема 9. *Для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_k\}_k$, відповідна послідовність $A^f_{x_k}$ має своєю нижньою границею за Пеневле–Куратовським множину $A^f_{x_0}$.*

Доведення. Необхідно довести, що за умов леми $A^f_{x_0} \subset \liminf_k A^f_{x_k}$. Для цього достатньо довести, що
$$E_f(x_0) \subset \liminf_k A^f_{x_k}. \tag{4.7}$$

Нехай $y_0 \in E_f(x_0)$. Покажемо, що
$$y_0 \in \liminf_k A^f_{x_k}.$$

Зрозуміло, що $y_0 \prec_\Lambda I_f(x_0)$. Нехай послідовність $\{\beta_k\}_k \subset \operatorname{cl} A^f_{x_0}$ задовольняє умовам леми 7, а саме $\beta_k \to I_f(x_0)$ і
$$y_0 \prec_\Lambda I_f(x_0), \forall k > 0. \tag{4.8}$$

Виберемо довільну послідовність $y_k \to y_0$ так, щоби $y_k \preceq_\Lambda y_0$, $\forall k > 0$. Покажемо наступне:
$$\exists \delta_0 : \forall k > 0,\, y_k \preceq_\Lambda f(x)\ \forall x \in B(x_0, \delta_0). \tag{4.9}$$

Припустимо, що це не так. Отже, для будь-якого $\delta > 0$, існує $k > 0$ і $x_\delta \in B(x_{0,\delta})$ таке, що
$$f(x_\delta) - y_k \notin \Lambda.$$

Інакше кажучи, маємо співвідношення
$$\begin{aligned} f(x_\delta) - y_0 &\in y_k - y_0 + F \backslash \Lambda \\ &\in -\Lambda + F\backslash\Lambda = F\backslash\Lambda. \end{aligned}$$

Отже, можна побудувати послідовність $\omega_n \to x_0$ таку, що
$$f(\omega_n) - y_0 \in F\backslash\Lambda,\ \forall n. \tag{4.10}$$

Зафіксуємо довільне число $k_0 > 0$. Через те, що $\beta_{k_0} \in \operatorname{cl} A^f_{x_0}$, існує послідовність $\{\gamma_m\}_m = \{\gamma_m(k_0)\}_m$ така, що
$$\gamma_m \to \beta_{k_0},$$

де $\gamma_m \in A^f_{x_0}$. Тоді з означення множини нижнього рівня випливає, що існує послідовність $\{p_n\}_n := \{p_n(k_{0,m})\}_n$, яка збігається до γ_m і для будь-якого n задовольняє включенню:
$$-f(\omega_n) + p_n \in -\Lambda \tag{4.11}$$

З (4.10), (4.11) та леми 5 випливає
$$p_n - y_0 \in (F\backslash\Lambda) - \Lambda = F\backslash\Lambda. \tag{4.12}$$

Тоді,
$$p_n - y_0 \notin \operatorname{cor}\Lambda. \tag{4.13}$$

Переходячи до границі у (4.13), ми отримаємо

$$\gamma_m - y_0 \notin \operatorname{cor} \Lambda. \tag{4.14}$$

У той же час, граничний перехід в (4.14) дає

$$\beta_{k_0} - y_0 \notin \operatorname{cor} \Lambda, \tag{4.15}$$

що суперечить (4.8). А це означає, що (4.9) є правильним.

Тепер, використовуючи (4.9) покажемо, що $y_k \in A^f_{x_k}$. Для кожного k побудуємо послідовності $\{x_k^n\}_n \to x_k$. Тоді знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x_k^n \in B\left(x_k, \frac{\delta_0}{2}\right) \quad \forall\, n \geq n_0 \;\text{ і }\; \forall\, k > n_0.$$

Нехай $(z_k^n\}_n$ — довільна послідовність, яка збігається до y_k і при цьому $z_k^n \preceq_C y_k$. Нехай також

$$y_k^n = \begin{cases} z_k^n, & n \geq n_0 \\ f\left(x_k^n\right), & n < n_0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Вважаючи, що $x_k \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$ $\forall\, k \geq n_0$, маємо $x_k^n \in B\left(x_0, \delta_0\right)$ $\forall\, k, n \geq n_0$. Звідки, в силу (4.9), отримуємо $y_k^n \preceq_C f\left(x_k^n\right)$ $\forall\, k, n \geq n_0$. Отже, $y_k \in A^f_{x_k}$ $\forall\, k \geq n_0$. Таким чином, $y \in \liminf\limits_k A^f_{x_k}$, з чого випливає

$$E_f\left(x_0\right) \subset \liminf_k A^f_{x_k}.$$

Оскільки $\liminf\limits_k A^f_{x_k}$ є замкнутою множиною, то $\operatorname{cl} E_f\left(x_0\right) \subset \liminf\limits_k A^f_{x_k}$. В результаті $A^f_{x_0} \subset \liminf\limits_k A^f_{x_k}$, що і потрібно було встановити. □

Враховуючи результати, отримані в наведених лемах, доведемо тепер теорему 1. Розіб'ємо доведення на два етапи. На першому покажемо, що відображення $I_f\left(x\right)$ є нн. зн. на $\operatorname{Dom} f$. На другому етапі — що $I_f\left(x\right)$ є найбільшим серед усіх нн. зн. відображень, які є меншими за f.

Доведення. 1) Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ та послідовність $\{x_n\}_n$ збігається до x_0. Внаслідок леми 6 існує така послідовність $\{y_k\} \in A^f_{x_0}$, яка збігається до $I_f\left(x_0\right)$. З леми 9 випливає, що $y_k \in \liminf\limits_n A^f_{x_n}$. В кожній множині $A^f_{x_n}$ виберемо послідовність $\{y_k^n\}_n$, яка збігається до y_n, коли $n \to +\infty$. Тоді, за лемою 9 маємо: $\{y_k^n\}_n$ збігається до y_k рівномірно. Більше того, враховуючи властивості внутрішності конуса, які викладено в параграфі 1.2, елементи послідовності $\{y_k^n\}_n$ можна подати таким чином:

$$y_k^n = y_k - \nu_n,\, \nu_n \in \operatorname{cor} \Lambda,\, \lim_{n \to +\infty} \nu_n = 0_F. \tag{4.17}$$

Зрозуміло, що

$$y_k^n \preceq_\Lambda \sup A^f_{x_n} = I_f\left(x_n\right). \tag{4.18}$$

Ясно, що (4.18) має місце для довільних k. Тому візьмемо відображення $k(n)$ таким, що $k(n) \to +\infty$. Тоді побудуємо послідовність

$$b_n = f^n_{k(n)}. \tag{4.19}$$

Ця послідовність збігається до $I_f\,(x_0)$, задяки рівномірній збіжності y^n_k до y_k і задовільняє нерівності

$$b_n \preceq_\Lambda I_f\,(x_n)\,. \tag{4.20}$$

А, отже, для будь-якої збіжної до x_0 послідовності x_n, знайдено відповідну послідовність $b_n \in F$ таку, що $b_n \preceq_\Lambda I_{f(x_n)}$ і $b_n \to I_f\,(x_0)$. Отже, відображення $I_f\,(x)$ є нн. зн. в точці x_0.

2) Нехай $g : E \to F^\bullet$ — довільне нн. зн. відображення, яке є меншим за f. За побудовою множини нижнього рівня зрозуміло, що з нерівності

$$g(x) \preceq_\Lambda f(x),\ \forall\, x \in E$$

маємо

$$A_f(x) \supseteq A_g(x) \Rightarrow \sup A_f(x) \succeq_\Lambda \sup A_g(x). \tag{4.21}$$

Відомо, що $I_f\,(x) = \sup A_f(x)$, і при цьому $g\,(x) = \sup A_g(x)$, оскільки відображення g є нн. зн. З цього випливає, що

$$I_f\,(x) \succeq_\Lambda g\,(x)\,.$$

Унаслідок довільності вибору відображення g, побудоване відображення $I_f\,(x)$ є найбільшим серед усіх нн. зн. відображень, які є меншими за f. Таким чином, це відображення є нн. зн. регуляризацією для f. □

5. Приклад напівнеперервної знизу регуляризації

Для ілюстрації наведеного в роботі методу розглянемо відображення, яке не є нн. зн. в області свого визначення, та залучимо до нього запропоновану вище регуляризацію. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R}^2 \to l_2$, де простір l_2 наділимо *-слабкою топологією. Нехай простір l_2 напівупорядковано конусом невід'ємних елементів

$$l_2^+ = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2 |\, x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Нехай

$$f(x) = \begin{cases} (x, x+1, 0, \ldots) & x \neq 1, \\ (0, 3, 0, \ldots, 0) & x = 1. \end{cases}$$

Відображення f є неперервним, а тому і нн. зн., всюди окрім точки $x_0 = 1$. У точці $x_0 = 1$, f не є нн. зн., оскільки для послідовності $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_n$ не існує відповідної послідовності $\{b_n\}$, яка б збігалася до елемента $f(1) = (0, 3, 0, \ldots)$ і одночасно

$$b_n \preceq_{l_2^+} (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n}, 0, \ldots).$$

У зв'язку з цим побудуємо множину нижнього рівня для відображення f в точці $x_0 = 1$.

$$A_1^f := \{y \in F \,|\forall\, \{x_n\}_n \to 1, \exists \{b_n\}_n \to y, \, b_n \preceq_\Lambda f(x_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Характерними для цього випадку будуть два типи послідовностей:

1. $x_n = 1$. В цьому випадку $f(x_n) = (0, 3, 0, \ldots)$. З чого випливає, що A_1^f не може містити елементів, які не є меншими за $(0, 3, 0, \ldots)$.

2. Для всіх інших послідовностей, що збігаються до $x_0 = 1$, відповідна границя послідовностей $\{f_{x_n}\}$ буде дорівнювати $(1, 2, 0, \ldots)$. Враховуючи, що в усіх точках, окрім точки 1, відображення неперервне, легко бачити, що A_1^f не містить елементів, які не є меншими за $(1, 2, 0, \ldots)$.

Враховуючи це та схему побудови множини нижнього рівня, легко бачити, що A_1^f включає лише ті елементи, які одночасно менші ніж $(1, 2, 0, \ldots)$ та $(0, 3, 0, \ldots)$. Отже, A_1^f мість лише ті елементи, які є меншими за

$$\inf \{(1, 2, 0, \ldots), (0, 3, 0, \ldots)\} = (0, 2, 0, \ldots).$$

Таким чином, множина A_1^f має вигляд:

$$A_1^f = (0, 2, 0, \ldots) - l_2^+.$$

Тобто, регуляризація відображення f в точці 1 має вигляд:

$$I_f(1) = \sup A_1^f = \sup \left((0, 2, 0, \ldots) - l_2^+\right) = (0, 2, 0, \ldots),$$

в той час, як на усьому просторі дійсних чисел її можна подати у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} (x, x+1, 0, \ldots) & x \neq 1, \\ (0, 2, 0, \ldots) & x = 1. \end{cases}$$

6. Висновки

Таким чином, метод напівнеперервної знизу регуляризації, запропонований у роботі [4], можна поширити на клас відображень, які діють у простори, що є напівупорядкованими за конусами з можливо пустою топологічною внутрішністю.

Бібліографічні посилання

1. *Довженко А. В.* Квазі-напівнеперервна знизу регуляризація відображень в банахових просторах // А. В. Довженко, П. І. Когут // Вісник ДНУ, Сер. Математика, 2009. — Т. 18, № 2. — С. 62–75.
2. *Combari, C., Laghdir, M. et Thibault* Sous-differentiel de fonctions convexes composes // Ann. Sci. Math. Quebec, 1994. — Vol. 18, № 2. — P. 119–148.
3. *Jahn Johannes* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
4. *Mansour M. A., Metrane A., Théra M.* Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings // Rapport de recherche, Université de Limoges, 2004.
5. *Penot, J-P. et Thera, M.* Semi-continuous mappings in general topology // Archiv der Math, 1982. — Vol. 38, — P. 158–166.

Надійшла до редакції 01.09.2009