

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ВНУТРІШНЬОМУ НАРОЩУВАННІ

А. В. Сяєв*, І. В. Щербина**

* *Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. E-mail: syasev@i.ua*

** *Національна металургійна академія України, Дніпропетровськ 49050.*

Розглядається задача про напружено-деформований стан (НДС) в'язкопружного пустотілого циліндра, який нарощується під дією внутрішнього тиску. Припускається, що процес неперервного нарощування має місце зі сторони внутрішнього радіуса. Розглянуто частинний випадок лінійного закону повзучості, а також наведено результати розрахунків, які показують динаміку напружень та деформацій, що при цьому виникають.

Ключові слова. В'язкопружний циліндр, внутрішнє нарощування, модель процесу нарощування.

1. Вступ

Процес розвитку нових технологій у виробництві оболонок, труб та інших деталей обертання шляхом нарощування вимагає розвитку відповідних методів розрахунку, які б враховували механічні властивості матеріалу, з якого готується та або інша деталь. Відомо, наприклад, що полімери, а останнім часом і деякі метали, які часто залучаються для виготовлення труб методом відцентрового лиття [5], мають чітко виражені властивості повзучості. Зазвичай ця обставина призводить до перерозподілу напружень у деталі (трубі) при її нарощуванні, зміні форми і розмірів, а також при її подальшому навантажуванні. В цьому випадку залучення теорії в'язкопружності дозволяє здійснити теоретичну оцінку цих чинників і пропонувати такі технології нарощування, які б відповідали основним вимогам до готової продукції.

У зв'язку з цим доречно зауважити, що в роботі [4], при дослідженні задачі про нарощування циліндра, основна увага приділяється оцінці релаксації залишкових напружень. Разом із тим, метою даної роботи є дослідження впливу часу нарощування на розподіл напружень у в'язкопружному порожнистому циліндрі.

2. Фізична постановка задачі

При побудові математичної моделі нарощування в'язкопружного пустотілого циліндра, який нарощується під дією внутрішнього тиску, скористаємося підходом, який наведено в [4]. Нехай є заданим порожнистий однорідний

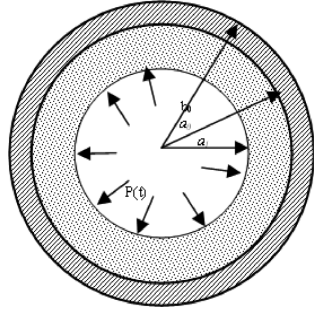


Рис. 1. Схема внутрішнього нарощування

в'язкопружний круговий циліндр, для якого на момент часу $t = 0$ є відомими його внутрішній a_0 та зовнішній b_0 радіуси (див. рис. 1). Процес нарощування даного циліндра полягає в його потовщенні з середини однорідним в'язкопружним матеріалом під дією внутрішнього тиску $P(t)$. Будемо розглядати цей процес на інтервалі часу $[0, T]$ і дотримуватися таких припущень:

1. на момент часу $t = 0$ є заданим початкове значення тиску $P(0) = P_0$;
2. є відомим закон $a = a(t)$, за яким міняється в часі внутрішній радіус циліндра;
3. функція $a = a(t)$ є монотонно спадною і такою, що $a(0) = a_0$;
4. функції $a(t)$ і $P(t)$ неперервно диференційовані на інтервалі $0 < t < T$;
5. процес нарощування припиняється при $t = T$, що означає $a(t) = a_1 = \text{const}$ при $t \geq T$.

Задача полягає в ідентифікації напружено-деформованого стану циліндра при кожному значенні $t \in [0, T]$.

3. Математична модель та її аналіз

Уведемо полярні координати r, θ, z і розглянемо плоску деформацію циліндра (тобто $u_z = 0$). Надалі будемо користуватися загальноприйнятими позначеннями для переміщень, компонент тензора напружень і деформацій. Запишемо основні співвідношення, які характеризують процес нарощування в поставленій задачі:

- умова спільності деформацій:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \quad (3.1)$$

- рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}; \quad (3.2)$$

- співвідношення Коші для швидкостей деформацій і переміщень:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}. \quad (3.3)$$

Тут точкою позначена частинна похідна за часом.

Оскільки всі компоненти тензора деформації, окрім ε_r і ε_θ , дорівнюють нулю, то з урахуванням співвідношення (3.1), маємо:

$$\varepsilon_u = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} = 2|\varepsilon_r| = 2|\varepsilon_\theta|.$$

Тоді, враховуючи визначальні рівняння нелінійної теорії повзучості для неоднорідно-старіючих тіл (див., напр., [2]) та умову $\varepsilon_\theta > 0$, рівняння стану можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = & 2G_1(t - \tau^*) (\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r)) \varepsilon_\theta^{m-1}(t, r) - \\ & - \int_{\tau^*}^t R_1(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_\theta(\tau, r)) \varepsilon_\theta^{m-1}(\tau, r) d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тут позначено $G_1 = G \cdot 2^{m-1}$, $R_1 = R \cdot 2^{m-1}$, а функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a_0 \leq r \leq b_0$ і збігається з функцією, яка обернена до функції $a(t)$, при $a_1 \leq r \leq a_0$.

Граничні умови при цьому мають вигляд:

$$\sigma_r|_{r=b_0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=a(t), 0 \leq t < T} = -P(t), \quad (3.5)$$

$$\sigma_\alpha|_{r=a_1, t \geq T} = 0, \quad \alpha = r, \theta. \quad (3.6)$$

Диференціюючи співвідношення (3.1) за часом і підставивши в отриманий результат подання (3.3), прийдемо до наступного рівняння:

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0.$$

Звідси

$$\dot{u}_r = \frac{c(t)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad (3.7)$$

де $c(t)$ — деяка функція, що підлягає визначенню.

З рівнянь (3.7) з урахуванням початкової умови $u_r(\tau^*(r), r) = \varepsilon_\theta(\tau^*(r), r) = 0$ отримуємо наступну сукупність співвідношень:

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad (3.8)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r^2} \quad \text{при} \quad a(t) \leq r < a_0, \quad (3.9)$$

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad (3.10)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2 \quad \text{при} \quad a_0 \leq r \leq b_0, \quad (3.11)$$

$$A(t) = - \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Оскільки область інтегрування в (3.12) включає точку $t = 0$, позначивши сингулярну складову функції $c(t)$ через $c_0\delta(t)$, з'ясовуємо, що границя функції $A(t)$ у точці $t = 0$ справа дорівнює c_0 .

Тепер пов'яжемо напруження σ_r та функцію $A(t)$ для вихідного циліндра в його області росту. Зробимо це поетапно.

- (а) Розглянемо підобласть $a_0 \leq r \leq b_0$. Підставляючи в (3.4) значення компонент деформації (3.11), одержимо

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = -\frac{2}{r^{2m}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right] \quad (3.13)$$

Тоді, після інтегрування рівняння (3.2) в межах від r до b_0 , з урахуванням граничної умови (3.6)) і підстановки в результат подання (3.13), отримуємо:

$$\sigma_r(t, r) = - \int_r^{b_0} \frac{2 dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (3.14)$$

- (б) Розглянемо підобласть $a(t) \leq r < a_0$. Підставляючи в (3.4) вираз для компонент деформації (3.9), маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = & -\frac{2}{r^{2m}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau] . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тоді, за результатами інтегрування співвідношення (3.2) в межах від $a(t)$ до r з урахуванням граничної умови (3.6), і підстановки отриманого результату в (3.15), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) + \int_{a(t)}^r \frac{2 dr}{r^{2m+1}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau] . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Після заміни змінної $r = a(s)$ ($s = \tau^*(r)$) у рівнянні (3.16) і зміни порядку інтегрування, маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) - \left[\int_{\tau^*(r)}^t \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau)(A(t) - A(\tau))^m d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t d\tau \int_{\tau^*(r)}^\tau ds R_1(t - s, \tau - s) \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} (A(\tau) - A(s))^m \right] . \end{aligned} \quad (3.17)$$

В результаті рівняння для визначення $A(t)$ впливає з умови неперервності напруження $\sigma_r(t, r)$ на межі поділу двох розглянутих областей, тобто при $r = a_0$. Тобто, підставляючи в (3.14) і (3.17) значення $r = a_0$ і прирівнюючи праві

частини, прийдемо до наступного нелінійного інтегрального визначального співвідношення для функції $A(t)$

$$\begin{aligned} H_1 \left(2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right) + \\ + \int_0^t H_2(t, \tau) (A(t) - A(\tau))^m d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\tau H_3(t, \tau, s)(A(\tau) - A(s))^m ds d\tau = P(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тут

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{2 dr}{r^{2m+1}}, \quad H_2(t, \tau) = \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau), \\ H_3(t, \tau, s) &= \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} R_1(t - s, \tau - s). \end{aligned}$$

Таким чином, визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (3.18), за формулами (3.8)–(3.11) знаходимо переміщення u_r і компоненти деформацій ε_r та ε_θ , а напруження σ_r і σ_θ можна отримати за формулами (3.13), (3.14), (3.15), (3.17). Для напруження σ_z з умови $\varepsilon_z = 0$ і рівняння стану, за аналогією з [1], [2], маємо:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Тепер розглянемо випадок, коли процес нарощування має місце при лінійному законі повзучості. Для цього досить покласти у наведених вище співвідношеннях $m = 1$. Тоді, виходячи з формул (3.10), (3.11), (3.13), та (3.4), знаходимо:

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) &= \\ &= -\frac{2}{r^2} \left(2G(t)A(t) - \int_0^t R(t, \tau)A(\tau) d\tau \right), \quad \text{при } a_0 \leq r \leq b_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тепер, беручи до уваги (3.8), (3.9), (3.15), та (3.17), одержимо:

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = (A(t) - A(\tau^*(r))) / r^2, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) &= -\frac{2}{r^2} [2G(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r))) - \\ &- \int_{\tau^*(r)}^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r))) d\tau], \\ &\text{при } a(t) \leq r < a_0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (3.23)$$

$$D_1(t)A(t) - \int_0^t D_2(t, \tau)A(\tau) d\tau = P(t), \quad (3.24)$$

$$D_1(t) = \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2|dr}{r^3}, \quad (3.25)$$

$$D_2(t, \tau) = \int_{a(\tau)}^{b_0} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3} + \quad (3.26)$$

$$+ \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^3(\tau)} \left(2G(t - \tau) - \int_\tau^t R(t - \tau, s - \tau) ds \right). \quad (3.27)$$

Зауважимо, що рівняння (3.24) отримано з рівняння (3.18). Отже, його розв'язок можна одержати у квадратурах [2, 4].

Припустимо, що ядро релаксації має форму як у роботі [2], тобто:

$$R(t, \tau) = \frac{\partial \mu(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad \mu(t, \tau) = 2G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}). \quad (3.28)$$

Тоді рівняння (3.24), використовуючи співвідношення (3.28), можна подати у вигляді:

$$A(t)\mu_1(t, t) - \int_0^t \frac{\partial \mu_1(t, \tau)}{\partial \tau} A(\tau) d\tau = P(t), \quad (3.29)$$

де позначено:

$$\mu_1(t, \tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}. \quad (3.30)$$

Підставляючи (3.28) у (3.30), одержимо:

$$\mu_1(t, \tau) = 2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad (3.31)$$

$$G_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} G(\tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}, \quad \varphi_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \varphi(\tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.29) можна звести до диференціального рівняння другого порядку відносно функції $A(t)$ [1], [3]. Дійсно, інтегруючи рівняння (3.29) частинами з урахуванням (3.30) та (3.32), знаходимо:

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) \left[2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \right] d\tau = P(t).$$

Диференціюємо останнє рівняння послідовно двічі по t , приходимо до співвідношень

$$2G_2(t)\dot{A}(t) - \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \dot{P}(t), \quad (3.33)$$

$$2G_2(t)\ddot{A}(t) + 2\dot{G}_2(t)\dot{A}(t) - \gamma\varphi_2(t)\dot{A}(t) + \gamma^2 \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \ddot{P}(t).$$

Вилучивши із цих співвідношень інтеграл

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau,$$

одержимо наступне диференціальне рівняння для $A(t)$:

$$2G_2(t) \ddot{A}(t) + \dot{A}(t) [2\dot{G}_2(t) - \gamma \varphi_2(t) + \gamma 2G_2(t)] = \ddot{P}(t) + \gamma \dot{P}(t), \quad (3.34)$$

з початковими умовами, які випливають з (3.29)–(3.33)

$$A(0) = \frac{P(0)}{2G_2(0)}, \quad \dot{A}(0) = \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}. \quad (3.35)$$

У результаті, розв'язуючи рівняння (3.34) з початковими умовами (3.35), приходимо до наступного співвідношення:

$$A(t) = \frac{P_0}{2G_2(0)} + \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)} \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_0^\tau \frac{\ddot{P}(x) + \gamma \dot{P}(x)}{2G_2(x)} e^{\eta(x)} dx, \quad (3.36)$$

де

$$\eta(\tau) = \int_0^\tau \left[\gamma + \left(2\dot{G}_2(z) - \gamma \varphi_2(z) \right) 2G_2^{-1}(z) \right] dz. \quad (3.37)$$

Визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (3.36), знаходимо переміщення u_r , компоненти деформацій $\varepsilon_{r,\theta}$, а також напруження за формулами (3.20), (3.23).

Розглянемо тепер випадок, коли функція $\mu(t, \tau)$ має вигляд (3.28), за умови, що

$$G = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = 2G(C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}). \quad (3.38)$$

Нехай внутрішній радіус циліндра $a(t)$ міняється за законом

$$\frac{1}{a^2(t)} = \frac{1}{a_0^2} + \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.39)$$

Беручи до уваги співвідношення (3.34) і (3.35), ядро рівняння (3.29), а також ядра інтегральних операторів у (3.20), (3.23) можна виразити через елементарні функції. Нехай внутрішній тиск рівномірно спадає на відрізок $[0, T]$ до значення, яке менше удвічі від початкового, і в момент закінчення нарощування $t = T$, тиск падає до нуля.

На рисунках 2–4 наведено залежності динаміки максимального дотичного напруження і переміщення u_r для наступних точок циліндра 1 — $r = b_0$; 2 — $r = a_0 - 0 = 0,9b_0 - 0$; 3 — $r = 0,79b_0$. При розрахунках параметри C_0, A_0, β, γ і розміри a_0, a_1 вибиралися такими: $C_0 = 0.05, A_0 = 0.75, \beta = 0.02^{-1}, \gamma = 0,1^{-1}, a_0 = 0,9b_0, a_1 = 0,5b_0$. Через те, що напруження не залежать від величини пружноміттевого модуля G , а переміщення і деформації обернено пропорційні йому, у розрахунках приймалося, що $G = 1$.

Як видно з рисунків 3–4, тривалість процесу нарощування впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. При цьому характер

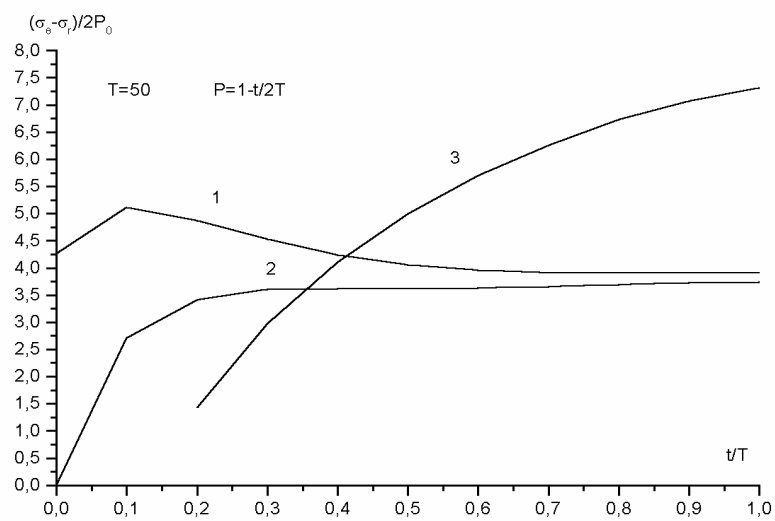


Рис. 2.

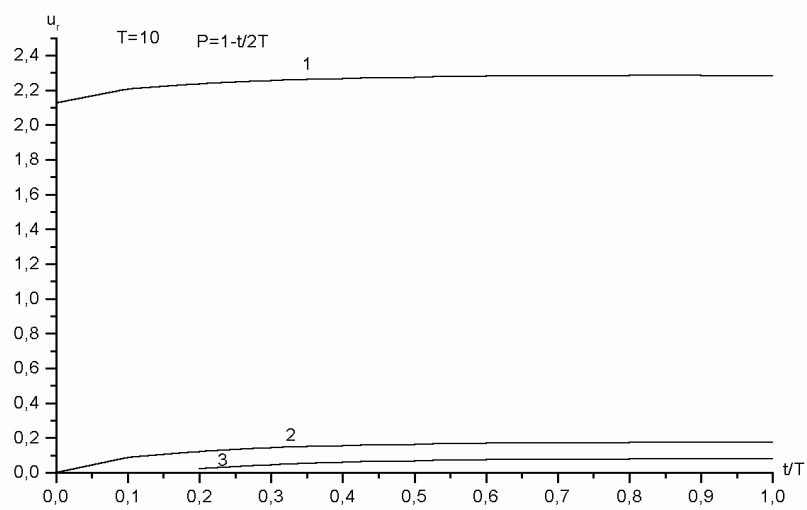


Рис. 3.

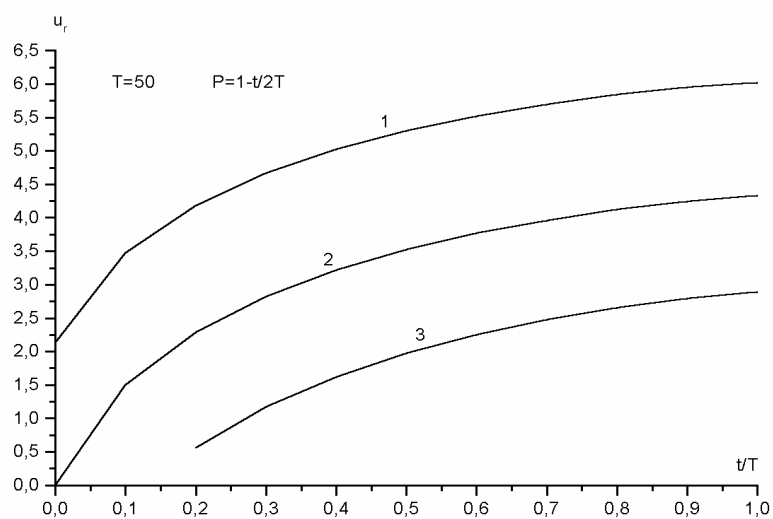


Рис. 4.

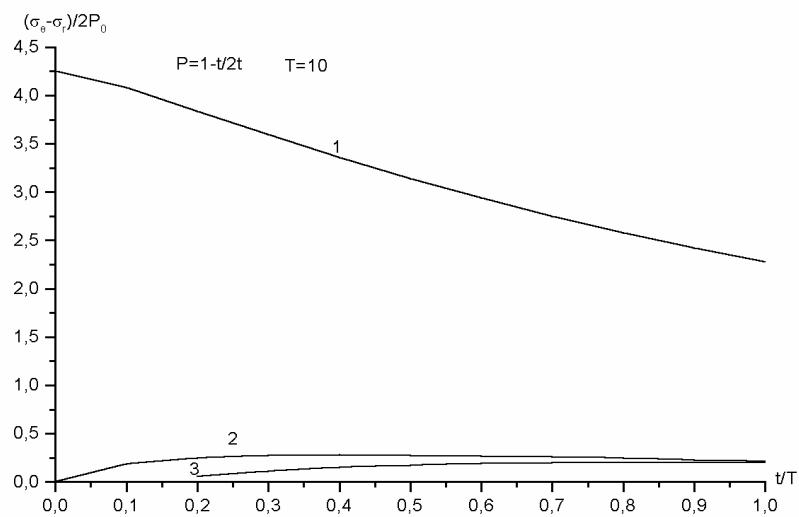


Рис. 5.

кривих змінюється незначним чином, проте мають місце значні зміни у величинах самих напружень і переміщень. Так, наприклад, із рисунків 2–3 видно, що на десяту добу нарощування напруження в точці 1 монотонно спадають, а в точці 2 має місце незначне зростання. На п'ятдесяту добу нарощування картина є зовсім іншою — напруження в другій точці починають значно збільшуватися згодом і за своїми значеннями наближаються до значень у точці 1. Напруження в точці 3 зростають настільки, що починають перевищувати напруження в точках 1 і 2 удвічі. Цей розподіл напружень можна пояснити таким чином: по-перше, точки 2 і 3 увесь час знаходяться ближче до лінії дії навантаження, ніж точка 1, по-друге, при більш швидкому процесі нарощування матеріал не встигає до кінця проявити свої в'язкопружні властивості, що підтверджують і криві для переміщень, показані на рисунках 3–4.

Таким чином, наведений метод розрахунку дозволяє оцінити вплив часу нарощування на розподіл напружень і переміщень у в'язкопружному порожнистому круговому циліндрі, виготовленому з однорідного в'язкопружного матеріалу.

Бібліографічні посилання

1. Арутюнян Н. Х. Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Э. Наумов. — М.: Наука, 1987. — 335 с.
2. Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородных тел / Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский. — М.: Наука, 1983. — 289 с.
3. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 360 с.
4. Сясев А. В., Бинкевич Е. В. Нарастивание вязкоупругого полого цилиндра при действии внутреннего давления // А. В. Сясев, Е. В. Бинкевич // Вісник ДДУ. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 153–160.
5. Юдин С. Б. Центробежное литьё. — М.: Наука, 1972. — 380 с.

Надійшла до редакції 01.09.2009