ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 132–148

УДК 517.9

ПРО IСНУВАННЯ ЕФЕКТИВНИХ РОЗВ'ЯЗКIВ ЗАДАЧI ВЕКТОРНОЇ ОПТИМIЗАЦIЇ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКУ НА МЕРЕЖI

Т. А. Божанова

Днiпропетровський нацiональний унiверситет iм. Олеся Гончара, Днiпропетровськ, 49050.E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net

Розглядається гiдродинамiчна модель для транспортного потоку на мережi. У припущеннi, що такий потiк є керованим процесом, ставиться задача його оптимiзацiї у векторнiй формi. Розглянуто випадок, коли цiльове вiдображення дiє в лебегiв простiр i є напiвнеперервним зверху на областi визначення. Показано, що множина допустимих розв'язкiв такої задачi є компактною вiдносно слабкої топологiї простору $R^K \times L^2(0,T;BV(\Omega))$, та доведено iснування ефективних розв'язкiв розглянутої задачi векторної оптимiзацiї на мережi.

Ключовi слова. Транспортний потiк на мережi, гiдродинамiчна модель, векторна оптимiзацiя на мережi, iснування ефективних розв'язкiв.

1. Вступ

На сьогоднi проблема керування транспортними потоками на мережах, особливо у великих мiстах, стає все бiльш актуальною. Збiльшення кiлькостi транспортних засобiв призвело до перевантаження мiських дорiг, багатогодинних заторiв, перешкоджання руху пiшоходiв, забруднення навколишнього середовища тощо. Тому дослiдженню та аналiзу таких проблем присвячена досить широка лiтература (див. [1, 4, 5, 6, 15]). Зокрема, бiльшiсть iснуючих результатiв, котрi торкаються оптимiзацiйних задач на транспортних мережах, стосуються знаходження необхiдних умов оптимальностi та методiв побудови оптимальних законiв регулювання транспортних потокiв зi скалярними показниками вартостi (див. [3, 11, 12]).

Основним об'єктом дослiдження у данiй роботi виступає макроскопiчна модель транспортного потоку на мережi. Вважається, що мережа складається iз скiнченної кiлькостi дорiг, якi з'єднанi мiж собою певними вузлами (точками сполучення). На кожнiй окремо взятiй дорозi припускається, що рух транспортних засобiв пiдкоряється так званому гiдродинамiчному закону збереження, який призводить до розгляду нелiнiйної задачi Кошi для рiвняння у частинних похiдних першого порядку. При цьому факторами керування виступають параметри, якi регулюють транспортний потiк у вузлах такої мережi.

На вiдмiну вiд нинi iснуючих результатiв (див., напр., [3, 11, 12]), будемо вважати, що якiсть керування транспортним потоком на мережi визначається нескалярним вiдображенням у простiр $L^2(\Omega)$, упорядкований за конусом Λ

додатних елементів. За цих припущень покажемо, що поставлена задача векторної оптимізації транспортних потоків на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків поставленої задачі.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі наведемо деякі відомі факти, які стосуються функцій з обмеженою варіацією, транспортних мереж, векторнозначних відображень та частково впорядкованих нормованих просторів.

Нехай $J = (a, b)$ $(a < b)$ заданий інтервал в R. Розглянемо функцію $f : J \to R$ таку, що $f \in L^1(J)$. Тоді повною варіацією функції f називають

$$Tot.\,V_j(f) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : m \in N, a < x_0 < x_1 < \dots < x_m < b\right\},$$

де $x_j \in J,\ j \in \{0, \dots, m\}$.

Означення 1. Будемо казати, що функція $f \in L^1(J)$ є функцією з обмеженою повною варіацією на J, якщо існує константа K така, що $Tot.\,V_j \le K$. Позначимо через $BV(J)$ множину всіх дійсних функцій $f \in L^1(J)$ з обмеженою повною варіацією на J.

Зауважимо, що повна варіація функції f є невід'ємним числом. Якщо $f \in BV(\Omega)$, тоді $f : J \to R$ обмежена майже скрізь на J. Обернене не вірно.

Є еквівалентними такі твердження (див. [9]):

(i): $f \in BV(\Omega)$;

(ii): $f \in L^1(J)$ та $|Df|\,(J) := \sup\left\{\int_J f\varphi' dx\ :\ \varphi \in C_0^1(J), |\varphi| \le 1\right\} < +\infty$;

(iii): існує послідовність гладких функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(R)$ таких, що

$$f_k \to f \quad \text{в} \quad L^1(J) \quad \text{і} \quad \limsup_{k\to\infty} \int_J |f_k'| dx\ < +\infty,$$

де узагальнена похідна Df — це міра Радона, і $|Df|\,(J)$ співпадає з повною варіацією функції f на J. Більше того, для функції $f \in BV(J)$ існують правосторонні та лівосторонні границі:

$$f(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)ds, \quad f(x^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(s)ds$$

для $\forall\ x \in [a, b)$ та $\forall\ x \in (a, b]$, відповідно. І при цьому, $f(x^+) = f(x^-)$, якщо $|Df|(\{x\}) = 0$.

Має місце наступний результат.

Теорема 1. *а) Простір $BV(J)$ є простором Банаха відносно норми*

$$\|f\|_{BV(J)} = \|f\|_{L^1(J)} + |Df|\,(J);$$

б) відображення $f \to |Df|\,(J)$ є напівнеперервним знизу відносно $L^1(J)$–збіжності, тобто, якщо $f_k \to f$ у $L^1(J)$, то

$$|Df|\,(J) \le \liminf_{k\to\infty} |Df_k|\,(J);$$

в) якщо $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(J)$ *і*

$$\sup_{k \in N} \|f_k\|_{BV(J)} < +\infty,$$

то існує підпослідовність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, *яка сильно збігається до деякої функції* $f \in BV(J)$.

Кажуть, що послідовність функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(J)$ слабко збігається в $BV(J)$ до f (позначають $f_k \rightharpoonup f$), якщо

$$f_k \to f \text{ в } L^1(J) \text{ і } \sup_{k \in N} |Df_k|\,(J) < +\infty.$$

При цьому, якщо $f_k \rightharpoonup f$ у $BV(J)$, то $f \in BV(J)$ і $Df_k \rightharpoonup Df$ як міри Радона.

Нехай Θ — це відкрита випукла підмножина простору R^2 і $\mathfrak{F}$ — плоский граф на R^2.

Означення 2. Будемо казати, що множина $\Omega = \Theta \bigcap \mathfrak{F}$ є мережею доріг, обмеженою областю Ω, якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де

(а): $\mathcal{I}$ — скінченна сукупність ребер, які відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в R, $i = 1, \ldots, N$;

(б): $\mathcal{J}$ — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі.

Кожна вершина J є об'єднанням двох непустих підмножин $Inc(J)$ та $Out(J)$ таких, що:

(i): кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою Ω;

(ii): для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc\,(J) \bigcap Inc\,(J') = \emptyset$ маємо: $Out\,(J) \bigcap Out(J') = \emptyset$;

(iii): якщо $i \notin Y_{J \subset \mathcal{J} Inc\,(J)}$, тоді b_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin Y_{J \subset \mathcal{J} Out\,(J)}$, тоді a_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

Нехай Ω — мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі, приймаючи позначення $y \in L^2(\Omega)$, вважаємо, що $y = (y_1, \ldots, y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1, \ldots, N$. Вважатимемо, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $\mathrm{int}_\omega S$ та $\mathrm{cl}_\omega S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ, який визначається як:

$$\Lambda = \left\{ f \in L^2(\Omega); \;\; f(x) \geq 0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega \right\}. \tag{2.1}$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_\Lambda z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_\Lambda z$, якщо $z - y \in \Lambda \setminus \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ є незростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_\Lambda y_k$ для $\forall\, k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні"елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$, скористаємося наступним поняттям:

Означення 3. [13] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*,\ y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S. Введемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють наступні умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\ y \in L^2(\Omega); \quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\| -\infty_\Lambda \|_{L^2(\Omega)} = +\infty \ \text{ і } \ y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty,\ \forall\ y \in L^2(\Omega),\ \forall\ \lambda \in R_+.$$

Означення 4. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω)-супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина непуста, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, $(\Lambda,\ \omega)$-супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ — непуста підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір X, де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{2.2}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 5. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \to L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\ I(x)$, якщо A є (Λ, ω)-супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\ I(x) = Sup^{\Lambda,\,\omega} \{ I(x) :\ \forall\ x \in X_\partial \}.$$

Зауваження 1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\ I(x)$, то

$$cl_\omega \{ I(x) : \forall\ x \in X_\partial \} \cap (a + \Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\ I(x) = Max_\Lambda[cl_\omega \{ I(x) : \forall\ x \in X_\partial \}]$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^{\omega}\{y_k\}$ множину всіх її точок згущення відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^{\omega}\{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \to \infty$. Якщо ця множина не обмежена зверху, тобто $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\omega}\{y_k\} = +\infty_{\Lambda}$, то припускаємо, що $\{+\infty_{\Lambda}\} \in L^{\omega}\{y_k\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_{\partial}$. Тоді для довільного відображення $I : X_{\partial} \to L^2(\Omega)$ введемо до розгляду наступні множини:

$$L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in\, \mathfrak{M}_{\sigma}(x_0)} L^{\omega}\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{2.3}$$

$$L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) := L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_{\partial}} I(x), \tag{2.4}$$

де $\mathfrak{M}_{\sigma}(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно σ-топології простору X.

Означення 6. Будемо казати, шо підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_{\Lambda}\}$ є Λ–нижньою секвенціальною границею відображення $I : X_{\partial} \to L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_{\partial}$ відносно топології добутку $\sigma \times \omega$ простору $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\omega}_{max}(I,\ x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset, \\ Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.5}$$

Зауваження 2. У скалярному випадку ($I : X_{\partial} \to R$) множини

$$Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_{\partial}} I(x) \text{ та } Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset$, то маємо:

$$\begin{aligned} L^{\sigma\times\omega}_{\max}(I, x_0) &= L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_{\partial}} I(x) = \\ &= Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_{\partial}} I(x) = Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0). \end{aligned}$$

Отже, в цьому випадку (2.5) дає класичне означення верхньої границі.

3. Модель транспортного потоку

У цьому параграфі наведемо короткий огляд гідродинамічних моделей для транспортних потоків на мережах, використовуючи підхід Coclite, Piccoli [6] (див. [1, 7]). Нехай $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, котра налічує строго N доріг. Для $i \in \{1, \ldots, N\}$ дорога i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі i, яка відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{max,i}$. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графа $\mathfrak{F}$, обмеженого областю Ω, а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графа. Кількість машин, що проїжджають за одиницю часу є $f(\rho) = \rho\upsilon$, де $\upsilon(\rho)$ — швидкість машин.

Слід зауважити, що $\upsilon(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ. Відповідно до [8, 12] припустимо, що існують функції потоку f_i такі, що для кожної дороги $i \in \{1, \ldots, N\}$ виконуються наступні властивості:

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовні на } [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{3.1}$$

Як випливає з наведених вище умов, транспортний потік є додатним при значеннях щільності $0 < \rho_i < \rho_{max,\,i}$. Тут σ_i — оптимальна щільність, при якій транспортний потік досягає свого максимуму, вважається заданою. Таким чином, для довільного $i \in \{1, \ldots, N\}$ макроскопічна модель транспортного потоку на дорозі i може бути виражена наступним нелінійним законом збереження (див. [16]):

$$\partial_t \rho_i(t,\ x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = 0,\ \ \forall\ x \in (a_i,\ b_i),\ \forall\ t \in (0, T], \tag{3.2}$$

$$\rho_i(0,\ x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\ x \in [a_i,\ b_i] \tag{3.3}$$

з функцією потоку

$$f_i(\rho) = \rho \upsilon_i(\rho),$$

де швидкість υ_i — непереревно-диференційована спадна функція свого аргумента ρ.

Зауваження 3. Головною особливістю нелінійної системи (3.2)-(3.3) є той факт, що класичний розв'язок може не існувати для деякого $t > 0$, навіть якщо початкові умови є досить гладкими. Окрім цього, така система не є коректною за Адамаром, що означає відсутність неперервної залежності її розв'язків від початкових умов. У зв'язку з цим граничні умови для доріг, що входять та виходять із мережі Ω, повинні бути заданими у сенсі Bardos, LeRoux та Nedeles [3]. Проте для простоти припустимо, що $a_i = -\infty$ та $b_i = +\infty$, якщо $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Inc(J)$ та $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Out(J)$, відповідно.

Для повноти моделі (3.2)–(3.3) необхідно визначити потік через кожний вузол $J \in \mathcal{J}$ мережі. Для цього у кожному вузлі будемо розглядати так званий розв'язник Рімана (див. [8]), який задовольняє збереженню кількості машин за таким правилом:

(А): у кожному вузлі з розгалуженням вихідних доріг існують конкретні переваги водіїв, унаслідок яких рух транспорту із вхідних у вузол доріг розподіляється по вихідних дорогах пропорційно відповідних перевагах;

(Б): відповідно до правила (А) водії прагнуть максимізувати потік.

Розглянемо вузол J з n вхідними дорогами $I_1, \ldots, I_n$ з кінцем b_i у вузлі, де $(i \in \{1, \ldots, n\})$, та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \ldots, I_{n+m}$ з кінцем a_i у вузлі, де $(i \in \{n+1, \ldots, n+m\})$. Тоді, щоб гарантувати збереження кількості машин, які проїжджають через вузол J, введемо наступну умову:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(t,\ b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t,\ a_i))\ \ \forall\ t \in [0, T]\ \ \forall\ J. \tag{3.4}$$

Це співвідношення ще називають умовою Rankine–Hugoniot у вузлі. Проте виконання цієї умови не є достатнім для визначення єдиного розв'язку системи (3.2) на мережі. Дійсно, нехай $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ є деякий розв'язок у вузлі J, який задовольняє умову (3.4). Це означає, що відповідні задачі Рімана (3.2)–(3.3) мають своїми розв'язками функції ρ_i, котрі на правих кінцях вхідних доріг ($i \leq n$) та на лівих кінцях вихідних із вузла доріг ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$) дорівнюють відповідним значенням $\hat{\rho}_i$. Однак у загальному випадку таке поєднання значень щільності у вузлі може призвести до появи так званих "шокових" та "розріджених" хвиль, що проходять через нього (див. [11]). Отже, далеко не кожний вибір значень $(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ буде допустимим у вузлах транспортної мережі. Для їх визначення недостатньо мати тільки співвідношення (3.4). Необхідно внести ще $n+m-1$ – допоміжну умову. Тому у даному випадку розумно скористатися підходом Coclite, Garavello & Piccoli [8] та ввести матрицю розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ таку, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)], \;\; j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \;\; i \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J), \;\; \forall\, i \neq i', \; 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Таким чином, i-й стовпчик матриці A описує розподіл транспортного потоку по вихідних із вузла дорогах. Це означає, що якщо C — кількість машин, які прибувають з дороги I_i у заданий вузол, то $\alpha_{ji}C$ — кількість машин, які пересуваються по вихідній з вузла дорозі I_j. Можна також припустити, що матриця A залежить від часу. Наприклад, у випадку руху машин на міській мережі, переваги водіїв змінюються протягом доби.

З технічної точки зору, на матрицю A необхідно накласти ряд допоміжних умов. Будемо говорити, що матриця A задовольняє гіпотезу (B), якщо має місце таке: нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ канонічний базис в R^n і для довільної підмножини $V \subset R^n$ позначимо через $V^\perp$ — її ортогональне доповнення. Для $\forall\, i = 1, \dots, n$ визначимо множину $H_i = (e_i)^\perp$, тобто координатну гіперплощину, ортогональну до e_i, та для $\forall\, j = n+1, \dots, n+m$ нехай $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}) \in R^n$ і $H_j = \{\alpha_j\}^\perp$. Нехай K — множина індексів $k = (k_1, \dots, k_l)$, $1 \leq l \leq n-1$ таких, що $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leq n+m$, і для $\forall\, k \in K$ виконується рівність $H_k = \bigcup\limits_{h=1}^{l} H_{k_h}$. Поклавши $1 = (1, \dots, 1) \in R^n$, отримаємо $\forall\, k \in K$

$$1 \notin H_k^\perp.$$

Зауваження 4. Із умови (B) безпосередньо отримуємо, що $m \geq n$.

Умова (B) не застосовується для вузлів з n вхідними дорогами і однією вихідною. Таким чином, введемо деякі параметри, зміст яких полягає у наступному. За умови, коли не всі машини можуть проїхати через вузол, існує правило, яке у процентному співвідношенні описує кількість машин, що проїжджають з окремої вхідної дороги через вузол даної мережі, а саме:

(Г): припустимо, що не всі машини можуть проїхати на вихідну з вузла дорогу, і нехай C — кількість машин, яким це вдається. Тоді $q_i C$ машин надходить з дороги i, $i = 1, \ldots, n$, при цьому $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.

Тепер, згідно з теорією [8], введемо поняття розв'язку задачі (3.2) у вузлі $J \in \mathfrak{J}$ та на всій мережі Ω.

Означення 7. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами $I_1, \ldots, I_n$ з кінцем b_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) у вузлі та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \ldots, I_{n+m}$ з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \ldots, n+m\}$). Будемо казати, що

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n+m}) : \prod_{l=1}^{n+m} ([0,T] \times I_i) \to R^{n+m},$$

$$\rho(t, \cdot) \in \prod_{l=1}^{n+m} BV(I_l) \text{ для кожного } t \in [0, T]$$

є слабким розв'язком задачі (3.2) відносно матриці $A(J) \in R^{m+n}$ у вузлі J, якщо він є сукупністю функцій $\rho_l : [0,T] \times I_i \to R$, $l \in \{1, \ldots, n+m\}$ таких, що

(i):
$$\sum_{l=1}^{n+m} \left(\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_l \partial_t \varphi_l + f_l(\rho_l) \partial_x \varphi_l) dx dt \right) = 0, \tag{3.7}$$

для довільної гладкої функції φ_l, $l = 1, \ldots, n+m$, яка має компактний носій на множині $(0, +\infty) \times (a_l, b_l]$ для $l = 1, \ldots, n$ (вхідні дороги) та на множині $(0, +\infty) \times [a_l, b_l)$ $l = 1, \ldots, n$ для $l = n+1, \ldots, n+m$ (вихідні дороги), при цьому

$$\varphi_i(\cdot, b_i) = \varphi_j(\cdot, a_j), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\cdot, b_i) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(\cdot, a_j),$$
$$i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{n+1, \ldots, n+m\};$$

(ii): $f_j(\rho_j(\cdot, a_j+)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ для $\forall\ j = n+1, \ldots, n+m$;

(iii): $L(J, A, \rho) := \sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ досягає максимального значення на парі (A, ρ) при обмеженнях (i)-(11).

Зауваження 5. Перша умова цього означення є, по суті, умовою збереження кількості машин у вузлі. Більше того, формула 3.7 містить у собі умову 3.4, якщо функції ρ_l досить регулярні. Що стосується умов (2)–(3), то вони описують правила (А) та (Б), тобто переваги водіїв у вузлах мережі.

Відомо, що задача Рімана (3.2)–(3.3) із заданими умовами $\bar{\rho}_i : [a_i, b_i] \to R$ має розв'язок на всій мережі Ω у такому сенсі (див. [8]).

Означення 8. Нехай задано функції $\bar{\rho}_i \in L^{\infty}(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Будемо казати, що сукупність функцій $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^{N}([o,\, T] \times I_i) \to R^N$, де

$$\rho_i \in C([0, T];\; L^1_{loc}(I_i)), \;\; i \in \{1, \dots, N\}$$

є допустимим розв'язком задачі (3.2)-(3.5), якщо:

(а): $\rho_i : [0,\, T] \times I_i \to R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (3.2) на I_i, тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i)\partial_x \varphi) dxdt = 0, \tag{3.8}$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \left(|\rho_i - k|\partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k))\partial_x \tilde{\varphi}\right) dxdt \geq 0 \tag{3.9}$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0, T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на множині $(0, T) \times (a_i,\, b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0, T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на $(0, T) \times (a_i,\, b_i)$;

(б): $\rho_i(0,\, \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall\, i \in \{1, \dots, N\}$;

(в): у кожному вузлі J сукупність функцій $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$ є слабким розв'язком задачі (3.2) відносно матриці $A(J) \in R^{n+m}$ у сенсі означення 7.

Зауваження 6. Як показано у [8], за наявності точок розриву у початкових умовах $\bar{\rho}_i(\cdot)$ на дорозі I_i, лише одного рівняння Rankine–Hugoniot 3.4 не достатньо для того, щоб відокремити єдиний розв'язок задачі Коші (3.2)–(3.3). Тому поняття слабкого розв'язку задачі потрібно доповнити додатковими умовами. За такий допустимий критерій, узятий із фізичних міркувань, можна прийняти так звану ентропійну умову, котра у цьому випадку набуває вигляду ентропійної допустимої умови Кружкова 3.9 (див. [14]).

Означення 9. Нехай $J \in \mathcal{J}$ — вузол мережі $(\mathcal{I},\, \mathcal{J})$, який має тільки дві вхідні дороги та дві вихідні. Тому, згідно з [8], будемо казати, що матриця $A(J)$, яка у цьому випадку набуває вигляду:

$$A(J) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

задовольняє гіпотезу (B), якщо $\alpha,\, \beta \in (0,1)$ та $\alpha \neq \beta$.

Зауваження 7. Гіпотеза (B) є винятково технічною умовою, яка необхідна для виділення єдиного розв'язку з відповідних розв'язків задачі Рімана у вузлах. Проте, якщо один із параметрів α або β у виразі (3.10) набуває значення з множини $\{0,\, 1\}$, то відповідний вузол J має одну вхідну дорогу та дві вихідні. Тому, в цьому випадку, є сенс внести незначні зміни в дану мережу та, відповідно, у задачу (3.2)-(3.5).

Беручи це до уваги, дамо наступний відомий результат стосовно існування та єдиності розв'язку задачі Коші (3.2)-(3.4) (див. [6, 8, 10]).

Теорема 2. *Нехай дано мережу* $\Omega = (\mathcal{I},\, \mathcal{J})$ *та сукупність функцій потоку* $\{f_i : R \to R\}_{i=1}^N$, *які задовольняють властивості (3.1), і нехай задано початковий розподіл щільності потоку машин* $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)\}_{i=1}^N$. *Припустимо, що мережа доріг* $(\mathcal{I},\, \mathcal{J})$ *складається із вузлів, котрі мають не більше двох вхідних та двох вихідних доріг, і кожна їх матриця розподілу руху* $A(J)$ *належить класу (B). Тоді існує єдиний допустимий розв'язок* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N([0,\, T] \times I_i) \to R^N$ *задачі (3.2)-(3.5) такий, що*

$$\rho_i \in C([0,T];\, L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)),\ \ i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{3.11}$$

$$Tot.\ V_{I_i}(\rho_i(t,\, \cdot)) \leq Tot.\ V_{I_i}(\bar{\rho}_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{3.12}$$

4. Постановка задачі векторної оптимізації

Оскільки транспортний потік на мережі надає можливість залучення факторів керування, котрі впливають на щільність транспортних потоків, то надалі транспортний потік будемо трактувати як об'єкт керування. У цьому випадку необхідно формалізувати фізичні та математичні значення факторів керування та пов'язати з ними відповідний стан такого об'єкта керування.

Для простоти обмежимося випадком мережі $\Omega = (\mathcal{I},\, \mathcal{J})$, яка включає вузли $J \in \mathcal{J}$ лише двох видів: $J \in J^{1,\,2}$ та $J \in J^{2,\,1}$. Перший вид вузла ($J \in J^{1,\,2}$) має одну вхідну дорогу m з кінцем b_m у вузлі та дві вихідні дороги $r,\ s$ з кінцями $a_r,\ a_s$ у вузлі, відповідно. Згідно з підходом Coclite, Garavello& Piccoli [6, 8], у такому вузлі матриця розподілу потоку набуває вигляду: $A(J) = [\alpha_m,\, 1 - \alpha_m]^t$, де $0 \leq \alpha_m \leq 1$. Отже, у такому вузлі дійсний параметр $\alpha_m \in (0,\, 1)$ можна взяти за фактор керування.

Зауваження 8. Зауважимо, що умова (B) справедлива для кожного вузла $J \in J^{1,\,2}$. Більше того, ця умова є замкненою відносно збіжності у просторі матриць $A(J) = [\alpha_m,\, 1 - \alpha_m]^t$ за умови, що $\alpha_m \in [\beta,\, 1 - \beta]$ $\beta \in (0,\, 1/2)$ досить мале додатне число.

Другий вид вузлів ($J \in J^{2,\,1}$) складається з двох вхідних доріг p та q з кінцями b_p і b_q у вузлі та однієї вихідної дороги r з кінцем a_r у вузлі. Для вузлів такого виду існує правило, яке описує у процентному співвідношенні кількість машин, що проїжджають із окремої вхідної дороги через ці вузли мережі. Більше того, умова (Г) виконується для кожного вузла $J \in J^{2,\,1}$, і тому в таких вузлах транспортний потік уже не є керованим.

Припустимо, що мережа $\Omega = (\mathfrak{I},\, \mathfrak{J})$ має строго N доріг і $\mathfrak{J} = J^{1,\,2} \cup J^{2,\,1}$, де множина $J^{1,\,2}$ містить K вузлів першого виду, а множина $J^{2,\,1}$ — M вузлів другого виду. Таким чином, маємо мережу з K параметрами керування $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ та M заданими параметрами $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{\mathcal{M}})$, $0 < \zeta_l < 1$ $l \in \{1, \ldots, \mathcal{M}\}$. При цьому, на кожній дорозі $I_i = [a_i,\, b_i] \in \mathcal{I}$ швидкість $\upsilon = \upsilon(\rho)$ задовольняє такі вимоги:

$$\upsilon(\rho)\text{— неперервно-спадна функція на відрізку } [0, \max_{1 \leq i \leq N} \rho_{max,i}] \tag{4.1}$$

$$0 \leq \upsilon(\rho_i) \leq \upsilon_{i,max}, \ \ \forall\ i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{4.2}$$

де $\upsilon_{i,max} \in L^2(I_i)$ $(1 \le i \le N)$ відомі функції.

Уведемо наступні позначення:

1. $\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) |\, \beta \le \alpha_i \le 1-\beta,\ i = 1, \dots, K\} \subset R^K$ — множина параметрів керування, де $\beta \in (0,\ 1/2)$ досить мале додатне число;

2. $X = R^K \times C(0,\ T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ — простір допустимих пар $(\alpha,\ \rho)$;

3. $P : R^K \times C(0,\ T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ — цільове відображення;

4. $\Lambda = \left\{g \in L^2(\Omega) : g(x) \ge 0 \text{ майже скрізь на } \Omega\right\}$ —упорядкований конус додатних елементів у просторі $L^2(\Omega)$.

Із попереднього параграфа відомо, що для $\forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}$ задача

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i)\partial_x \varphi) dxdt = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\ b_i)),\ \forall\, I_i \in \mathcal{I}, \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k|\partial_t \tilde\varphi + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k))\partial_x \tilde\varphi)\, dxdt \ge 0, \\ \forall\, d \in R,\ \forall\, \tilde\varphi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\ b_i)),\ \tilde\varphi \ge 0,\ \forall\, i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\rho_i(0, \cdot) = \bar\rho_i \text{ на } I_i \text{ для } \forall\, i \in \{1, \dots, N\}, \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\ a_r^+)) = \alpha_k f_m(\rho_m(\cdot,\ b_m^-)) \text{ та} \\ f_s(\rho_s(\cdot,\ a_s^+)) = (1-\alpha_k) f_m(\rho_m(\cdot,\ b_m^-)), \\ \text{для } \forall\, J_k \in J^{1,\,2} \text{ з однією вхідною дорогою } m \text{ з кінцем } b_m \\ \text{ у вузлі } J_k \text{ та вихідними дорогами } r,\ s \text{ з кінцями } a_r,\ a_s \\ \text{у } J_k,\ \forall\, k \in \{1, \dots, K\}, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\ a_r^+)) = \zeta_l f_p(\rho_p(\cdot,\ b_p^-)) + (1-\zeta_l) f_q(\rho_q(\cdot,\ b_q^-)) \\ \text{для } \forall\, J_l \in J^{2,\,1} \text{ з двома вхідними дорогами } p,\ q \text{ з кінцями } b_p,\ b_q\ J_l \\ \text{та однією вихідною дорогою } r \text{ з кінцем } a_r \text{ у } J_l,\ \forall\, l \in \{1, \dots, M\}, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} L(J,\ \alpha,\ \rho) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(\cdot,\ b_i^+)) \text{ досягає максимального значення при} \\ \text{обмеженнях (4.3)-(4.7) } \forall\, J \in \mathcal{J}, \text{ де } n = 1, \text{ якщо } J \in J^{1,\,2}, \\ \text{і } n = 2, \text{ якщо } J \in J^{2,\,1} \end{cases} \tag{4.8}$$

має єдиний розв'язок:

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^{N} ([0,\ T] \times I_i) \to R^N \text{ у просторі } C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$$

із властивостями (3.11)–(3.12).

Пов'яжемо з задачею (4.3)–(4.8) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\text{реалізувати } Sup^{\Lambda,\,\omega}\left\{P(\alpha,\ \rho)\right\} \tag{4.9}$$

для всіх $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in R^K$ та $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ за умов (4.3)–(4.7) та (4.1)–(4.2).

Означення 10. Будемо казати, що задача (4.9) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \dots, f_N)$ з властивостями (3.1) існує пара

$$(\alpha,\ \rho) \in \mathcal{A} \times C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(\alpha)$ — це відповідний розв'язок задачі (4.3)–(4.8) такий, що ρ задовольняє умови (4.1)–(4.2), і $P(\alpha,\ \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega)$. У цьому випадку пару $(\alpha,\ \rho)$ будемо називати допустимою.

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (4.3)–(4.9). Очевидно, що $\Xi \subset \mathcal{A} \times C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$. Надалі будемо пов'язувати цю задачу з четвіркою $<\ \Xi,\ P,\ \Lambda,\ \omega\ >$, де ω є слабкою топологією простору керувань $L^2(\Omega)$.

Зауваження 9. У загальному випадку існує принципова різниця між задачею (4.9) та задачею векторної оптимізації у класичній постановці:

$$\begin{cases} \text{знайти максимум відображення } P(\alpha,\ \rho) \text{ відносно конуса } \Lambda \\ \text{за умови, що } (\alpha,\ \rho) \in \Xi \end{cases} \tag{4.10}$$

Справді, нехай пара $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \Xi$ є ефективним розв'язком задачі (4.9). Тоді $P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Max}_\Lambda(\mathrm{cl}_\omega P(\Xi))$. Звідси

$$P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in P(\Xi) \text{ та } P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Max}_\Lambda P(\Xi).$$

Тому $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff})$ є розв'язком задачі (4.10). Проте, обернене твердження, у загальному випадку, не є вірним. У той же час, для скалярного випадку завжди має місце таке:

$$\text{якщо } P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) = \max_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho), \text{ то}$$

$$(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in\ \Xi \ \text{ і } \ P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) = \sup_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho).$$

Зауважимо, що задачі векторної оптимізації (4.9) та (4.10) ідентичні у тому випадку, коли $Y = R$ та $\Lambda = R_+$, і приводять до класичної постановки скалярної задачі максимізації з обмеженнями.

Означення 11. Допустиму пару $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати $(\Lambda,\ \omega)$-ефективним розв'язком задачі (4.1)–(4.9), якщо пара $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff})$ реалізує $(\Lambda,\ \omega)$-супремум відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$, тобто

$$P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho) = \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\left\{P(\alpha,\ \rho)\ :\ \forall\,(\alpha,\ \rho) \in \Xi\right\}.$$

Позначимо через $\mathrm{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω)-ефективних розв'язків векторно-оптимізаційної задачі (4.1)–(4.9), тобто

$$\mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ P;\ \Lambda) = \left\{(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \Xi\ :\ P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho)\right\}.$$

Тепер дамо наступний результат стосовно топологічних властивостей множини допустимих пар Ξ задачі (4.9). Нехай τ-топологія на

$$Y = R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega)),$$

задана як добуток поточкової збіжності в R^K та слабкої топології простору $L^2(0,T;$
$BV(\Omega))$. Тоді має місце наступна теорема, доведення якої можна знайти в [2].

Теорема 3. *Нехай $\left\{(\alpha^k,\ \rho^k) \in \Xi\right\}_{k=1}^{\infty}$ довільна послідовність допустимих пар у задачі (4.3)–(4.8). Тоді знайдеться пара $(\alpha^*,\ \rho^*) \in Y$ і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що*

$$(\alpha^*,\ \rho^*) \in \Xi, \ \ (\alpha^k,\ \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*,\ \rho^*),$$

тобто множина Ξ є секвенційно компактною відносно τ-збіжності.

Наслідок 1. *Якщо $\alpha \in \mathcal{A}$, то відображення $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ є неперервним відносно топології поточкової збіжності в R^K та слабкої топології простору*

$$L^2(0,T;\ BV(\Omega)).$$

5. Теорема існування

Нехай $\hat{P} : [R^K \times C(0,T;\ BV(\Omega))] \to Y^\bullet$ — деяке розширення відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ на весь простір $R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega))$. Тут через $Y^\bullet$ позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 12. Будемо казати, що відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн. зв.) у точці $(\alpha^0,\ \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) \in \limsup{}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)}\ \hat{P}(\alpha,\ \rho).$$

Відображення P є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн. зв. на множині Ξ, якщо P є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн. зв. на кожній парі з Ξ.

Твердження 1. Припустимо, що простір керування $L^2(\Omega)$ частково впорядкований за конусом додатних елементів Λ. Нехай Ξ непуста підмножина з простору $R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega))$ і $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ — задане відображення. Якщо пара $(\alpha^0,\ \rho^0) \in \Xi$ є довільним $(\Lambda,\ \omega)$-ефективним розв'язком задачі (4.9), то тоді відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн. зв. на цій парі.

Доведення. Нехай $(\alpha^0, \rho^0) \in \mathrm{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$. Тоді $P(\alpha^0, \rho^0) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha, \rho)$. З іншого боку, $P(\alpha^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0)$, тому $P(\alpha^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}_{\max}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0)$. Звідси, згідно з означенням (6), маємо:

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) \in \limsup{}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)}\ \hat{P}(\alpha,\ \rho),$$

що і доводить твердження. □

Зауважимо, що конус додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega)$ задовольняє так звану властивість Даніеля, яка означає, що кожна зростаюча та обмежена зверху послідовність (тобто, якщо $i \le j \Rightarrow y_i \le_\Lambda y_j$) слабко збігається до свого $(\Lambda,\ \omega)$-супремума.

Означення 13. Будемо казати, що непуста підмножина $Y_0 \subset L^2(\Omega)$ з упорядкованим конусом Λ є напівобмеженою зверху, якщо кожна зростаюча послідовність $\{y_i\} \subset Y_0$ є обмеженою зверху.

Зауваження 10. Нехай Y_0 — напівобмежена зверху підмножина частково впорядкованого лінійного простору $< L^2(\Omega),\ \Lambda >$. Тоді для довільного елемента $z \in Y_0$ перетин $Y_0^z = (\{z\} + \Lambda) \cap Y_0$ буде обмеженим зверху, тобто існує елемент $z^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $z^* \leq_\Lambda\ y$ для всіх $y \in Y_0^z$. Отже, напівобмеженість зверху підмножини Y_0 означає напівобмеженість зверху її слабкого замикання $\mathrm{cl}_\omega Y_0$. З іншого боку, порівняно зі скалярним випадком, для векторної оптимізаційної задачі (4.9) із секвенційно τ-компактною підмножиною Ξ та $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-напівнеперервним зверху цільовим відображенням $P : \Xi \to L^2(\Omega)$, множина образів $P(\Xi)$ може бути необмеженою зверху. Це означає, що у загальному випадку не існує елемента $y \in L^2(\Omega)$ такого, що $P(\Xi) \subset \{y^*\} - \Lambda$.

Тепер перейдемо до формулювання та доведення основного результату даної роботи.

Теорема 4. *Припустимо, що векторно-оптимізаційна задача (4.9) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв. відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$. Тоді задача векторної оптимізації (4.9) має непусту підмножину $(\Lambda,\ \omega)$-ефективних розв'язків.*

Доведення. Крок 1. Покажемо, що множина образів $P(\Xi)$ є напівобмеженою зверху у сенсі означення (13). Припустимо протилежне, а саме: нехай існує послідовність $\left\{(\alpha^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ така, що відповідна послідовність образів $\left\{y^k = P(\alpha^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty \in P(\Xi)$ є зростаючою (тобто $y_k \leq_\Lambda y_{k+1}$ для $\forall\, k \in N$) та необмеженою зверху в просторі $L^2(\Omega)$. Тому $\infty_\Lambda \in L^\omega\{y_k\}$, де через $L^\omega\{y_k\}$ позначено множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Згідно з теоремою (3), послідовність $\left\{(\alpha^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty \in X_\partial$ є секвенційно τ-компактною. Тому можемо вважати, що $(\alpha^k,\ \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*,\ \rho^*)$ у $R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega))$, де $(\alpha^*,\ \rho^*)$ — це деяка пара з множини Ξ. Оскільки послідовність $\left\{P(\alpha^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty$ необмежена зверху, то $\{\infty_\Lambda\} \in L_{\max}^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^*,\ \rho^*)$. Тому, згідно з означенням (6), маємо:

$$\limsup\nolimits^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)} P(\alpha,\ \rho) = \{\infty_\Lambda\}\,.$$

З іншого боку, беручи до уваги $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-напівнеперервність зверху відображення P, отримаємо:

$$P(\alpha^*,\ \rho^*) \in \limsup\nolimits^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)} P(\alpha,\ \rho),$$

що суперечить попередньому припущенню. Крок 1 доведено.

Крок 2. Доведемо, що множина $\mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho)$ є непустою. Для цього покажемо, що існує принаймні одна зростаюча послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset P(\Xi)$ така, що $y_k \rightharpoonup y^*$ і

$$y^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho) = \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\left\{P(\alpha,\ \rho) : \forall\,(\alpha,\ \rho) \in \Xi\right\}.$$

Нехай y — довільний елемент множини $\mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$. Спочатку покажемо, що для довільного околу нуля ν_ω у слабкій топології простору $L^2(\Omega)$ існує елемент $y^\nu \in \mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$ такий, що

$$y \leq_\Lambda y^\nu \text{ та } (\{y^\nu\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})) = \emptyset. \tag{5.1}$$

Припустимо протилежне. Нехай існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$ така, що

$$y_1 \in P(\Xi),\ y_{k+1} \in (\{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y_k\}))\ \ \forall\, k \in N.$$

Оскільки $y_{k+1} \in \{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}$, то ця послідовність є спадною. Беручи до уваги зауваження (10), отримуємо, що множина $\mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$ є напівобмеженою зверху. Отже, існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y_k \leq_\Lambda y^*$ для всіх $k \in N$. Тому, згідно з властивістю Даніеля, ця послідовність слабко збігається до свого $(\Lambda,\, \omega)$-супремума: $y_k \rightharpoonup \tilde{y} \in L^2(\Omega)$. Проте це суперечить умові, що $y_{k+1} \in \mathrm{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})$ $k \in N$. Таким чином, вибір за допомогою правила (5.1) можливий для будь-якого околу ν_ω.

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — система слабких околів нуля у просторі $L^2(\Omega)$ така, що $\nu_{k+1} \subset \nu_k$ для всіх $k \in N$, і для будь-якого слабкого околу $\nu(0)$ в $L^2(\Omega)$ існує номер $k^* \in N$ такий, що $\nu_{k_*} \subseteq \nu(0)$. Тоді, використовуючи вибране правило (5.1), можемо побудувати послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$, де u_1 — довільний елемент з множини $P(\Xi)$, таким чином:

$$u_{k-1} \leq_\Lambda u_k \text{ і } (\{u_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_k + \{u_k\})) = \emptyset\ \forall\, k \geq 2. \tag{5.2}$$

Тому, з огляду на властивість Даніеля,$\{u_k\}_{k=1}^\infty$ є τ-збіжною зростаючою послідовністю. Звідси отримуємо, що існує елемент

$$u^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\, \{u_k \in \mathrm{cl}_\omega P(\Xi) : \forall\, k \in N\}$$

такий, що $u_k \rightharpoonup u^*$. Очевидно, що $u^* \in \mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$. Доведемо, що

$$u^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\, \{P(\alpha,\ \rho) : \forall\, (\alpha,\ \rho) \in \Xi\}\,.$$

Припустимо, що існує елемент

$$q \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\, \{P(\alpha,\ \rho) : \forall\, (\alpha,\ \rho) \in \Xi\}$$

такий, що $u^* \leq_\Lambda q$. Так як $u_k \leq_\Lambda u^*$ для $\forall\, k \in N$, то отримуємо, що $u_k \leq_\Lambda q$ для $\forall\, k \in N$. Тоді умова (5.2) гарантує, що

$$(\{q\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_k + \{u_k\})) = \emptyset\ \forall\, k \in N. \tag{5.3}$$

Отже, з умови (5.3) та з того, що $q \in \mathrm{cl}_\omega P(\Xi)$, випливає: $q \in \nu_k + \{u_k\}\ \forall k \in N$, тобто $u_k \rightharpoonup q$ у просторі $L^2(\Omega)$. Таким чином, $u^* = q$.

Крок 3. Покажемо, що множина всіх $(\Lambda,\, \omega)$-ефективних розв'язків задачі (4.9) $\mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ P;\ \Lambda)$ є непустою. Нехай ξ будь-який елемент з множини $\mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha, \rho)$. Тоді, згідно з означенням (5), існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ така, що $y_k \rightharpoonup \xi$ в $L^2(\Omega)$. Задамо послідовність $\left\{(\alpha^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ як:

$(\alpha^k,\ \rho^k) = P^{-1}(y_k)$ для всіх $k \in N$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ-компактною (див. 3), то будемо вважати, що існує пара

$$(\alpha^0,\ \rho^0) \in \Xi\ :\ (\alpha^k,\ \rho^k) \xrightarrow{\tau} \ \text{ в }\ Y.$$

Тому $\xi \in L^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0)$, і отримуємо, що

$$L^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi}\, P(\alpha,\ \rho) \neq \emptyset.$$

Тоді, в силу $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн. зв. відображення P на Ξ та означення (6), маємо:

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi}\, P(\alpha,\ \rho) = L^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi}\, P(\alpha,\ \rho).$$

Таким чином, з одного боку,

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}(P,\ \alpha^0,\ \rho^0),$$

звідки випливає рівність

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) = \xi = \lim_{k\to\infty} y_k.$$

З іншого боку, $\xi \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi}\, P(\alpha,\ \rho)$. Отже, $(\alpha^0,\ \rho^0) \in \mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ P;\ \Lambda)$. Теорема доведена. $\square$

Бібліографічні посилання

1. *Божанова Т. А.* Об одной задаче Коши на транспортных сетях // Т. А. Божанова // Зб.наук.праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–63.
2. *Божанова Т. А.* О топологических свойствах множества допустимых решений одного класса транспортных сетевых задач // Т. А. Божанова // Вісник ЗНУ, Сер.Фізико-математичні науки, 2009. —№1 — С. 62–75.
3. *Bardos C., Leroux A.Y., Nedeles J. C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions //Communications in Partial Differential Equations, 1979, — N. 4. — P. 1017–1034.
4. *Caascone A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences //SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007. — Vol. 17, N 10 — P. 1587–1617.
5. *Caascone A., D'Apice C., Rarita L.* Circulation of car traffic in cingested urban areas // Preprint DIIMA— Universita degli Studi di Salerno, 2006. — N 22. — P. 1–31.
6. *Coclite G. M., Piccoli B.* Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint, 2002.
7. *Coclite G. M., Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2005. — Vol. 36. — P. 1862–1886.
8. *Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math, 2006. — Vol. 1.
9. *Guisti E.* Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. // Boston : Birkhäser, 1984.
10. *Godlewski E., Raviart P.-A.* Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservations Laws // Applied Mathematical Sciences. — New York : Springer, 1996. — Vol. 118.

11. *Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G.* Optimal Control for Traffic Flow Networks // Journal of optimization theory and applications, 2005. — Vol. 126. — P. 589–616.
12. *Holden H., Riserbo N. H.* A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1995. — N. 4. — P. 999–1017.
13. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
14. *Kruzhkov S.* First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic, 1970. — N. 10. — P. 217–243.
15. *Lebecque J., Khoshyaran M.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment //In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds, 2002.
16. *Lighthill M. L., Whitham J. B.* On kinetic waves // Proceedings of Royal Society of Edinburg, 1983. — Vol. 229A. — P. 217-243.

Надійшла до редакції 01.09.2009