ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 23–41

УДК 519.6

ПРО СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ОБЛАСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

О. П. Когут

Інститут прикладного системного аналізу НАН України та МОН України, НТУУ "КПІ корп.35, просп. Перемоги, 37, Київ. E-mail: kogut_ olga@bk.ru

Для розглянутого класу задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі означене поняття стійкості такої задачі відносно збурень області. Запропоновані достатні умови на збурення області, за яких стійкість розглянутої задачі має місце.

Ключові слова. Збурення області, Моско-збіжність просторів Соболєва, керування в коефіцієнтах, задача Діріхле, умови стійкості.

1. Вступ

Зазвичай, математична модель оптимізаційної задачі (надалі OCP) складається з декількох незалежних математичних об'єктів: рівняння стану, обмеження на стан системи та керування, функціоналу якості. Для систем з розподіленими параметрами кожна з цих складових залежить від області Ω, на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область Ω змінюється, то приходимо до абсолютно іншої задачі оптимального керування $OCP(\Omega)$, можливо з інакшими обмеженнями, інакшим функціоналом якості і іншою крайовою задачею.

Нехай послідовність множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ збігається в деякому сенсі до Ω. Тоді, виходячи з класичного підходу (див., наприклад, [6, 7, 10, 12, 13]), оптимізаційну задачу $OCP(\Omega)$ називають стійкою відносно заданого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω, якщо послідовність оптимальних пар збурених задач $OCP(\Omega_\varepsilon)$ збігається (в певній топології) до пари, яка є оптимальною для вихідної задачі $OCP(\Omega)$. Проте оптимальну пару не можна назвати вичерпною та всебічною характеристикою оптимізаційної задачі. Як правило, повна ідентифікація задачі оптимального керування (включаючи функціонал якості, рівняння стану та існуючі обмеження на керування і стан) за допомогою самого тільки оптимального розв'язку є неможливою. Більше того, згаданий метод дослідження на стійкість не працює у випадку, коли оптимального розв'язку в задачі може не існувати [6] або коли ці розв'язки мають некласичний, неваріаційний характер [5].

У даній роботі розглянуто клас задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі з так званими узагальнено-соленоїдальними керуваннями. Для такого класу задач означено поняття Моско-стійкості відносно збурень області, яке включає в себе Моско-стійкість множини допустимих пар збурюваної задачі та відповідні властивості функціоналів якості. Ставиться за мету отримати достатні умови такої стійкості. Показано, що основу таких умов складають так звані збурення в хаусдорфовій топології доповнень, запропоновані Бакуром (див. [6]). Досліджено варіаційні властивості Моско-стійких задач оптимального керування. Отримані результати можуть служити основою для побудови субоптимальних керувань у задачах із нерегулярними областями та областями складної форми.

2. Постановка задачі

Нехай Ω є фіксованою відкритою підмножиною певної обмеженої відкритої множини $D \subset \mathbb{R}^n$ з регулярною границею.

Для заданих $z_\partial \in L_p(D)$ та $f \in L_q(\Omega)$ розглянемо таку задачу оптимального керування:

$$L_\Omega = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|^p \, dx \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$\mathcal{U} \in L_\infty^{n\times n}(D),\ \mathcal{U} \in U_{sol},\ y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega), \tag{2.2}$$

$$-\mathrm{div}\left(\mathcal{U}(x)\, |\nabla y|^{p-2} \nabla y\right) + a_0(x)|y|^{p-2} y = f \text{ в } \Omega, \tag{2.3}$$

де $a_0(x) \geq 0$. Через U_{sol} позначено клас узагальнено соленоїдальних матриць:

$$U_{sol} = \left\{ \{a_{ij}\}_{1\geq i,j \geq n} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{i\,j} \in L_\infty(D) \\ 0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq a_{i\,j}(x) \leq \xi_2(x) \text{ м.с. в } D, \\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) |\eta|^{p-2}\, \eta_j\, \eta_i \geq \alpha\, |\eta|^p \text{ м. с. в } D \end{array} \right\} \cap V. \tag{2.4}$$

Тут ξ_1, ξ_2 — задані функції з простору $L_\infty(D)$ такі, що

$$0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в } D, \tag{2.5}$$

а множина V визначається як

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \,|\, \mathrm{div}\mathbf{u}_i \in Q_i,\ \forall\, i = 1, \dots, n\},$$

де $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ — компактні множини в просторі $W_q^{-1}(D)$. Множиною допустимих розв'язків Ξ задачі (2.1)–(2.3) будемо називати сукупність пар $(\mathcal{U}, y) \in L_\infty^{n\times n}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (2.2)–(2.3). Через τ будемо позначати топологію в просторі $L_\infty^{n\times n}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega)$ як добуток $*-$слабкої топології в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$ та слабкої топології в просторі $\overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega)$.

Виходячи з (2.4)–(2.5), легко бачити, що нелінійний еліптичний оператор у рівнянні (2.3) є коерцитивним, сторого монотонним та деміненеперервним. Цього достатньо, щоб стверджувати однозначну розв'язність крайової задачі

(2.2)–(2.4) (див. [2]). Тоді, за аналогією з [3], легко показати, що задача (2.1)–(2.3) є розв'язною у класі узагальнено-соленоїдальних керувань (див. також [1]).

Метою даної роботи є дослідити асимптотичну поведінку розв'язків задач оптимального керування

$$L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |y_\varepsilon(x) - z_\partial(x)|^p\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y_\varepsilon(x)|^p\,dx \;\longrightarrow \inf, \tag{2.6}$$

$$-\mathrm{div}\,\big(\mathcal{U}_\varepsilon(x)|\nabla y_\varepsilon|^{p-2}\nabla y_\varepsilon\big) + a_0|y_\varepsilon|^{p-2}y_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \tag{2.7}$$

$$y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon), \quad \mathcal{U}_\varepsilon \in U_{sol} \tag{2.8}$$

відносно збурень $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області $\Omega \subseteq D$. Далі ε означатиме малий параметр, що змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до нуля. Будемо припускати, що множина допустимих керувань U_{sol} і, відповідно, множина допустимих розв'язків $\Xi_\varepsilon \subset L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)$ непорожні для кожного $\varepsilon > 0$.

Надалі проблему оптимального керування (2.1)–(2.3) будемо розглядати як параметризовану відносно області Ω і позначати її як $OCP(\Omega)$. Більше того, припускатимемо, що область Ω, як підмножина евклідового простору, є обмеженою, відкритою, та має достатньо регулярну (принаймні, ліпшицеву) границю. Проте сукупність таких підмножин евклідового простору, в загальному випадку, не утворює лінійний простір. Отже, область Ω, як параметр, належатиме деякому абстрактному простору, взагалі кажучи, без лінійної структури, в якому, до того ж, не має "хорошої" топології. Мається на увазі таке: якщо означити топологію на послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ як таку, що узгоджена зі слабкою збіжністю відповідних характеристичних функцій $\chi_{\Omega_k}(\cdot)$, то легко бачити, що така топологія не буде хаусдорфовою. Окрім того, навіть якщо слабка границя характеристичних функцій існує, вона не обов'язково сама є характеристичною функцією, тобто з нею не завжди вдається пов'язати множину, яку можна було б трактувати в деякому сенсі як границю послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$. У зв'язку з цим будемо дотримуватись таких припущень. Нехай на підмножинах множини D є заданим певний тип збіжності σ.

Означення 1. Нехай $\Omega, \Omega_k \subset D$ — відкриті множини з достатньо регулярними межами. Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ утворює σ-збурення множини Ω, якщо $\Omega_k \xrightarrow{\sigma} \Omega$ при $k \to \infty$.

Зауваження 1. Суттєво, що термін "σ-збурення" буде означати не тільки наявність послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$, а й топологію σ, в якій ці множини збігаються до Ω.

Аналіз існуючих публікацій показує (див., зокрема, роботи Марченко & Хруслова [4], Buttazzo & Bocur [6], Dal Maso & Murat [11]), що типовою ситуацією для крайових задач виду (2.2)–(2.3) з умовами Діріхле на границі є наявність властивості "нестійкості" відносно збурень області (з'являться нові вагові коефіцієнти та додаткові члени в рівнянні стану). У зв'язку з цим зауважимо, що метою даної роботи є отримання достатніх умов на збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, за яких задача оптимального керування (а не лише відповідна крайова задача) буде задовольняти певним умовам стійкості.

3. Основні поняття та попередні результати

У цьому параграфі наведемо ключові поняття та означення, необхідні нам у подальшому. Зокрема, наведемо визначення поняття локальної соболєвської ємності, поняття Моско збіжності просторів Соболєва та поняття збурень області в хаусдорфовій топології доповнень.

3.1. Поняття соболєвської ємності множини. Збіжність соболєвських просторів у сенсі Моско

Надалі нам знадобиться поняття локальної соболєвської p-ємності:

Означення 2. Для компактної множини K, що міститься у довільній кулі B ємність K в B визначається таким чином:

$$C_p(E,B) = \inf\left\{\int_B |\nabla\phi|^p\,dx,\ \ \forall\,\phi\in C_0^\infty(B),\ \phi\geq 1 \text{ на } K\right\}.$$

Також нам буде потрібне поняття Моско-збіжності соболєвських просторів.

Означення 3. [15] Будемо казати, що послідовність $\left\{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ просторів Соболєва збігається в сенсі Моско до простору $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ якщо виконуються такі умови:

(M_1) для довільного $y\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, знайдеться така послідовність $\left\{y_\varepsilon\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$, що $\widetilde{y}_\varepsilon\to\widetilde{y}$ сильно в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$;

(M_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — збіжна до нуля послідовність індексів, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність така, що $y_k\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ для кожного $k\in\mathbb{N}$ та $\widetilde{y}_k\to\psi$ слабко в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$, тоді існує функція $y\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ така, що $y=\psi|_\Omega$.

Тут і далі, через $\widetilde{y}_\varepsilon$ (відповідно $\widetilde{y}$) буде позначатися тривіально поширення на $\mathbb{R}^n$ функцій, визначених на Ω_ε (відповідно на Ω), а саме, $\widetilde{y}_\varepsilon=\widetilde{y}_\varepsilon\chi_{\Omega_\varepsilon}$ і $\widetilde{y}=\widetilde{y}\chi_\Omega$. Якщо послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ω в деякому "рівномірному" сенсі, то легко показати, що умови (M1) та (M2) будуть виконуватись. Природним питанням є пошук мінімальних умов на множини $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та Ω, за яких збіжність просторів Соболєва у сенсі Моско буде мати місце.

З використанням поняття ємності та теорії G-збіжності, у роботах [9, 10, 11] надані необхідні і достатні умови Моско-збіжності.

3.2. Збурення області в хаусдорфовій топології доповнень

Перед тим як говорити про збурення області, необхідно ввести топологію на просторі відкритих підмножин множини D. Для цього дамо визначення хаусдорфової топології доповнень (позначимо її через H^c), яка задається за допомогою такої метрики:

$$d_{H^c}(\Omega_1, \Omega_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| d(x, \Omega_1^c) - d(x, \Omega_2^c) \right|,$$

де через Ω_i^c позначено доповнення множин Ω_i в $\mathbb{R}^n$.

Означення 4. [8] Будемо говорити, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ відкритих підмножин D збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ в H^c-топології, якщо $d_{H^c}(\Omega_\varepsilon, \Omega)$ збігається до нуля 0 при $\varepsilon \to 0$.

H^c-топологія має декілька хороших властивостей, а саме, простір відкритих підмножин множини D є компактним відносно H^c-збіжності, також, якщо $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$, тоді для довільної компактної множини $K \subset\subset \Omega$ та достатньо малих значень параметра ε матимемо $K \subset\subset \Omega_\varepsilon$. Більше того, послідовність відкритих множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset D$ H^c-збігається до відкритої множини Ω, тоді і тільки тоді, коли послідовність доповнень $\{\Omega_\varepsilon^c\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ω^c в сенсі Куратовського [14].

Відомо (див. [6]), що у випадку коли $p > n$, H^c-збіжність відкритих множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset D$ еквівалентна збіжності в сенсі Моско відповідних просторів Соболєва.

У загальному випадку ($p \le n$), має місце:

Теорема 1. *[7] Нехай $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність відкритих підмножин D така, що $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ і $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{W}_w(D)$ для всіх $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{W}_w(D)$ визначається таким чином:*

$$\mathcal{W}_w(D) = \left\{ \begin{array}{c} \Omega \subseteq D \ : \ \forall x \in \partial\Omega, \forall\, 0 < r < R < 1; \\ \displaystyle\int_r^R \left(\frac{C_p(\Omega^c \cap \overline{B(x,t)}; B(x,2t))}{C_p(\overline{B(x,t)}; B(x,2t))} \right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t} \ge w(r,R,x) \end{array} \right\}, \quad (3.1)$$

тут через $B(x,t)$ позначено кулю з центром в x та радіусом t, а

$$w : (0,1) \times (0,1) \times D \to \mathbb{R}^+$$

є такою, що

1. *$\lim_{r\to 0} w(r,R,x) = +\infty$, локально рівномірно на D;*

2. *w напівнеперервна знизу за третім аргументом.*

Тоді $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$, а послідовність просторів Соболєва $\left\{ \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до $\overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega)$.

Теорема 2. *[7] Нехай $n \geq p > n-1$, і нехай $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність відкритих підмножин D така, що $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ і $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{O}_l(D)$ для довільного $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{O}_l(D)$ визначається як*

$$\mathcal{O}_l(D) = \{\Omega \subseteq D \ : \ \sharp\Omega^c \leq l\} \tag{3.2}$$

(тут через $\sharp$ позначено кількість зв'язних компонент). Тоді $\Omega \in \mathcal{O}_l(D)$ та послідовність просторів Соболєва $\left\{ \overset{\circ}{W}{}^1_p (\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до простору $\overset{\circ}{W}{}^1_p (\Omega)$.

Як приклад H^c-збіжних підмножин розглянемо множини $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, що містять осцилюючий "крек"(тріщину) з затухаючою амплітудою ε (див. рис. 1).

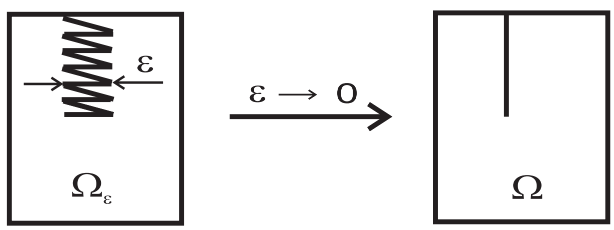

Рис. 1. Послідовність множин, компактна в H^c-топології

Перед тим як ввести строге означення поняття стійкості розглянутої задачі оптимального керування відносно збурень області та визначити допустимі збурення відкритої множини Ω, зауважимо, що збіжність множин $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ в хаусдорфовій топології доповнень не є достатньою умовою для доведення стійкості задачі

$$L_\Omega(\mathcal{U}, y) = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|^p \, dx \ \longrightarrow \inf, \tag{3.3}$$

$$-\mathrm{div} \left(\mathcal{U}(x) |\nabla y|^{p-2} \nabla y \right) + a_0 |y|^{p-2} y_= f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

$$y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p (\Omega), \quad \mathcal{U} \in U_{sol}. \tag{3.5}$$

У загальному випадку, гранична пара послідовності $\left\{ (\mathcal{U}_\varepsilon^{opt}, y_\varepsilon^{opt}) \right\}_{\varepsilon>0}$, при H^c-збуренні множини Ω, може не бути допустимою для вихідної задачі (3.3)–(3.5). Контрприклади наведені в роботі [11] (див. також [6, 10]). Отже, необхідно ввести деякі додаткові обмеження на рухому область.

4. Допустимі збурення області. Асимптотична поведінка множин допустимих пар збурених задач

У цьому розділі будуть означені допустимі збурення вихідної області і відносно таких збурень буде досліджена асимптотична поведінка множин допустимих пар збурених задач.

Означення 5. Нехай Ω та $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підмножини D. Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює H^c-допустиме збурення множини Ω, якщо:

(i) $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ при $\varepsilon \to 0$;

(ii) $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{W}_w(D)$ для всіх $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{W}_w(D)$ визначено в (3.1).

Зауваження 2. Як стверджує теорема 1, підмножина $\Omega \subset D$ допускає існування H^c-допустимих збурень тоді і тільки тоді, коли Ω належить до класу $\mathcal{W}_w(D)$. Однак ця умова є не дуже обмежливою. Справді, виявляється, що твердження:

$$\text{" якщо } \; y \in W_p^1(\mathbb{R}^n), \;\; \Omega \in \mathcal{W}_w(D), \;\; \text{і} \;\; \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}, \;\; \text{то} \;\; y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \text{ "}$$

є, в загальному випадку, неправильним. Зокрема, вищенаведене не має місця, коли відкрита множина Ω має "крек". Отже, $\mathcal{W}_w(D)$ є достатньо широким класом відкритих підмножин множини D.

Теорема 3. *Припустимо, що $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ — деяка фіксована підобласть D, а $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — деяке H^c-допустиме збурення Ω. Нехай також $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність допустимих пар задач* (2.6)–(2.8). *Тоді послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, \widetilde{y}_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ є рівномірно обмеженою в $L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D)$ і для довільної її часткової τ-границі (τ-кластерної пари) $(\mathcal{U}^*, y^*) \in L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D)$, матимемо*

$$\mathcal{U}^* \in U_{sol}, \tag{4.1}$$

$$\int_D \left(\mathcal{U}^* |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*, \nabla \widetilde{\varphi}\right)_{\mathbb{R}^n} \, dx + \int_D a_0 |y^*|^{p-2} y^* \widetilde{\varphi} \, dx = \\ = \int_D f \widetilde{\varphi} \, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.2}$$

Доведення. Для простоти будемо писати $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}$. Як завжди, тривіальне подовження функції y_ε на $\mathbb{R}^n$ позначатимемо через $\widetilde{y_\varepsilon}$. Оскільки кожна з пар $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon)$ є допустимою до відповідної задачі (2.6)–(2.8), то послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ є рівномірно обмеженою відносно норми в $L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D)$ (див. (2.4) та [3]). Справді, виходячи з коерцитивності розглянутого оператора, легко бачити, що послідовність $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є обмеженою в $\overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega)$. Причому

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y_\varepsilon|^p \, dx \leq C \|f\|^q_{W_q^{-1}(D)}. \tag{4.3}$$

Отже, можемо припускати, що існує пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ така, що (з точністю до підпослідовності, яку також будемо позначати індексом ε) $(\mathcal{U}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$ в $L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D)$. Тоді, користуючись тим, що множина U_{sol} є секвенційно компактною підмножиною в $L_\infty^{n\times n}(D)$ (див. [3]), маємо: $\mathcal{U}^* \in U_{sol}$.

Візьмемо як пробну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$, то, за теоремою 1, послідовність просторів Соболєва $\left\{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Це означає, що для зафіксованої вище функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ існує послідовність $\left\{\varphi_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ така, що $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \widetilde{\varphi}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ (див. властивість (M_1)). Оскільки $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon)$ є допустимою парою для відповідної задачі на Ω_ε, можемо записати:

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\Big(\mathcal{U}_\varepsilon\,|\nabla y_\varepsilon|^{p-2}\,\nabla y_\varepsilon, \nabla\varphi_\varepsilon\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_0|y_\varepsilon|^{p-2}y_\varepsilon\,\varphi_\varepsilon\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\,\varphi_\varepsilon\,dx,$$

а, отже,

$$\int_D\Big(\mathcal{U}_\varepsilon\,|\nabla\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\,\nabla\widetilde{y}_\varepsilon, \nabla\widetilde{\varphi}_\varepsilon\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D a_0|\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\widetilde{y}_\varepsilon\,\widetilde{\varphi}_\varepsilon\,dx = \\ = \int_D f\,\widetilde{\varphi}_\varepsilon\,dx,\ \forall\,\varepsilon>0. \quad (4.4)$$

Для того, щоб довести рівність (4.2), перейдемо до границі в інтегральній тотожності (4.4) при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи аргументацію теореми 3 з [3], маємо

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\mathbf{u}_{i\,\varepsilon} \to \operatorname{div}\mathbf{u}_i^* \text{ сильно в } W_q^{-1}(D),\ \forall\,i=1,\dots,n;\\
\left\{|\nabla\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\nabla\widetilde{y}_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0} \text{ обмежена в } L_q^n(D),\ q=p/(p-1);\\
\left\{|\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\widetilde{y}_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0} \text{ обмежена в } L_q(D);\\
\widetilde{y}_\varepsilon \to y^* \text{ сильно в } L_p(D),\quad \widetilde{y}_\varepsilon(x)\to y^*(x) \text{ м.с. } x\in D;\\
|\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\widetilde{y}_\varepsilon \to |y^*|^{p-2}y^* \quad \text{слабко в} \quad L_q(D),
\end{gathered}$$

де $\mathcal{U}_\varepsilon = [\mathbf{u}_{1\,\varepsilon},\dots,\mathbf{u}_{n\,\varepsilon}]$, $\mathcal{U}^* = [\mathbf{u}_1^*,\dots,\mathbf{u}_n^*]$.

Розглянемо послідовність $\left\{f_\varepsilon := f - a_0|\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\widetilde{y}_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$. Легко бачити, що

$$f_\varepsilon \to f_0 = f - a_0|y^*|^{p-2}y^* \quad \text{сильно в} \quad W_q^{-1}(D).$$

Звідси та з оцінки (4.3), випливає, що послідовність $\{A(\mathcal{U}_\varepsilon(x),\nabla\,\widetilde{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ обмежена в $L_q^n(D)$. Отже, з точністю до підпослідовності можемо припустити, що існує вектор-функція $\xi \in L_q^n(D)$ така, що

$$\xi_\varepsilon := A(\mathcal{U}_\varepsilon(x),\nabla\,\widetilde{y}_\varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon\,|\nabla\,\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\,\nabla\,\widetilde{y}_\varepsilon \to \xi \quad \text{слабко в } L_q^n(D).$$

Враховуючи це та сильну збіжність $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \widetilde{\varphi}$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$, в результаті граничного переходу при $\varepsilon \to 0$ у співвідношенні (4.4) отримаємо:

$$\int_D(\xi,\nabla\widetilde{\varphi})_{\mathbb{R}^n}\,dx = \int_D\left(f - a_0|y^*|^{p-2}y^*\right)\widetilde{\varphi}\,dx. \quad (4.5)$$

Залишається показати, що

$$\xi = \mathcal{U}^*\,|\nabla\,y^*|^{p-2}\,\nabla y^*. \quad (4.6)$$

А це можна зробити так само, як і в доведенні аналогічної рівності в теоремі 3 з [3]. Зокрема, необхідно повторити всі аргументи того доведення, замінивши Ω на D, $\mathcal{U}_k$ на $\mathcal{U}_\varepsilon$, y_k на $\widetilde{y}_\varepsilon$, $\mathcal{U}_0$ на $\mathcal{U}^*$, y_0 на y^*, і ϕ на $\widetilde{\varphi}$.

В результаті, оскільки представлення (4.6) справедливе, інтегральна тотожність (4.5) набуває вигляду бажаної рівності (4.2). Твердження доведене. $\square$

Далі, доведемо, що кожна τ-кластерна пара $(\mathcal{U}^*, y^*) \in L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ послідовності $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ (див. твердження 3) є допустимою для вихідної задачі оптимального керування (3.3)–(3.5). Як випливає з (4.1)–(4.2), залишається показати, що $y^*|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, а отже $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \in \Xi$. Для цього скористаємося наступним результатом, який є прямим наслідком Теореми 1.1 з [7].

Лема 1. *[7] Нехай $\Omega, \{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{W}_w(D)$, і $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ при $\varepsilon \to 0$. Нехай також $\mathcal{U}_0$ — довільна фіксована матриця з множини U_∂. Тоді*

$$\widetilde{v}_{\Omega_\varepsilon,h} \to \widetilde{v}_{\Omega,h} \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}{}^1_p(D) \quad \forall\, h \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D), \tag{4.7}$$

де через $v_{\Omega_\varepsilon,h}$ і $v_{\Omega,h}$ позначено єдині слабкі розв'язки крайових задач

$$\left.\begin{array}{c} -\mathrm{div}\,\left(\mathcal{U}_0|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) + a_0|v|^{p-2}v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ v - h \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon) \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

і

$$\left.\begin{array}{c} -\mathrm{div}\,\left(\mathcal{U}_0|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) + a_0|v|^{p-2}v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ v - h \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega), \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

відповідно, а через $\widetilde{v}_{\Omega_\varepsilon,h}$ та $\widetilde{v}_{\Omega,h}$ — поширення на область D функцій $v_{\Omega_\varepsilon,h}$ та $v_{\Omega,h}$, що співпадають з h поза множинами Ω_ε та Ω відповідно.

Тепер доведемо бажану властивість.

Теорема 4. *Нехай $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність допустимих пар задач (2.6)–(2.8), де $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це деяке H^c-допустиме збурення множини $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$. Якщо для підпослідовності з $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ (яку ми будемо позначати тим самим індексом ε) має місце $(\mathcal{U}_\varepsilon, \widetilde{y}_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$, то це означає, що*

$$y^* = \widetilde{y}_{\Omega,\mathcal{U}^*}, \quad \text{а отже} \quad (\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \in \Xi,$$

де через $y_{\Omega,\mathcal{U}^*}$ позначено слабкий розв'язок крайової задачі (3.4)–(3.5) при $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$.

Доведення. Для зручності будемо використовувати такі позначення: $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon}$, $y = y_{\Omega,\mathcal{U}^*}$.

З рівномірної обмеженості послідовності $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та 3 маємо (переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно):

$$\mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}^* = [\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*] \in U_{sol} \ \ * -\text{слабко в} \ \ L_\infty^{n\times n}(D), \tag{4.10}$$

$$\widetilde{y}_\varepsilon \to y^* \ \ \text{слабко в} \ \ \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D), \tag{4.11}$$

$$y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega), \quad \widetilde{y} \in \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D).$$

Доведемо, що $y^* = \widetilde{y}$. Подібно до D. Bucur, P. Trebeschi [7], для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо нову крайову задачу:

$$\left.\begin{array}{c} -\mathrm{div}\, \left(\mathcal{U}^* |\nabla \varphi_\varepsilon|^{p-2} \nabla \varphi_\varepsilon\right) + a_0 |\varphi_\varepsilon|^{p-2} \varphi_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \widetilde{\varphi}_\varepsilon = -y^* \ \ \text{в} \ \ D \setminus \Omega_\varepsilon. \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

У слабкому сенсі це означатиме, що

$$\int_D \left(\mathcal{U}^* \,|\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}_\varepsilon, \nabla \widetilde{\psi}_\varepsilon\right)_{\mathbb{R}^n} \,dx + \int_D a_0 |\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \,\widetilde{\psi}_\varepsilon \,dx = 0,$$
$$\forall\, \psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon), \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{4.13}$$

Покладаючи у (4.13) як пробну функцію $\widetilde{\psi}_\varepsilon = \widetilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \widetilde{y}_\varepsilon$, маємо:

$$\int_D \left(\mathcal{U}^* \,|\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}_\varepsilon, \nabla \left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \widetilde{y}_\varepsilon\right)\right)_{\mathbb{R}^n} \,dx +$$
$$+ \int_D a_0 |\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \,\left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \widetilde{y}_\varepsilon\right) \,dx = 0, \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{4.14}$$

Нехай $\varphi \in W_p^1(\Omega)$ — це слабкий розв'язок задачі

$$\left.\begin{array}{c} -\mathrm{div}\, \left(\mathcal{U}^* |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi\right) + a_0 |\varphi|^{p-2} \varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \widetilde{\varphi} = -y^* \ \ \text{в} \ \ D \setminus \Omega. \end{array}\right\}$$

Тоді за лемою 1, маємо $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \widetilde{\varphi}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1 (D)$. Отже,

$$\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \nabla \,\widetilde{\varphi} \ \ \text{сильно в} \ \ L_p^n(D),$$

$$\|\, |\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|^q_{L_q^n(D)} = \|\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon\|^p_{L_p^n(D)} \to \|\nabla \,\widetilde{\varphi}\|^p_{L_p^n(D)} = \|\, |\nabla \,\widetilde{\varphi}|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}\|^q_{L_q^n(D)},$$

$$\nabla \,\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) \to \nabla \,\widetilde{\varphi}(x) \ \ \text{м. с. в} \ D,$$

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \widetilde{\varphi} \ \ \text{сильно в} \ \ L_p(D),$$

$$\|\, |\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|^q_{L_q(D)} = \|\widetilde{\varphi}_\varepsilon\|^p_{L_p(D)} \to \|\widetilde{\varphi}\|^p_{L_p(D)} = \|\, |\widetilde{\varphi}|^{p-2}\, \widetilde{\varphi}\|^q_{L_q(D)},$$

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) \to \widetilde{\varphi}(x) \ \ \text{м. с. в} \ D.$$

Оскільки збіжність норм разом із поточковою збіжністю дають сильну збіжність, отримаємо:

$$
\begin{gathered}
|\nabla \widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}_\varepsilon \to |\nabla \widetilde{\varphi}|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi} \ \text{ сильно в } \ L^n_q(D),\\
|\widetilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2}\, \widetilde{\varphi}_\varepsilon \to |\widetilde{\varphi}|^{p-2}\, \widetilde{\varphi} \ \text{ сильно в } \ L_q(D),\\
\nabla\, (\widetilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \widetilde{y}_\varepsilon) \to \nabla \widetilde{\varphi} \ \text{ слабко в } \ L^n_p(D) \ (\text{ див. } (4.11)),\\
(\widetilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \widetilde{y}_\varepsilon) \to \widetilde{\varphi} \ \ \text{ сильно в } \ L_p(D),
\end{gathered}
$$

Отже, інтегральна тотожність (4.14) містить тільки добутки слабко та сильно збіжних послідовностей, і, переходячи до границі в (4.14) при ε прямуючому до нуля, отримаємо:

$$
\int_D \left(\mathcal{U}^*\, |\nabla\, \widetilde{\varphi}|^{p-2}\, \nabla \widetilde{\varphi}, \nabla \widetilde{\varphi}\right)_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_D a_0 |\widetilde{\varphi}|^p\, dx = 0.
$$

З урахуванням властивості матриці $\mathcal{U}^*$ і a_0, з попередньої рівності випливає, що $\widetilde{\varphi} = 0$ м.с. в D. А, за означенням $\widetilde{\varphi} = -y^*$ в $D \setminus \Omega$. Отже $y^* = 0$ в $D \setminus \Omega$, і бажана властивість отримана: $y_{\mathcal{U}^*,\Omega} = y^*|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Твердження доведене. □

Наслідок 1. *Нехай* $\{\mathcal{U}_\varepsilon \equiv \mathcal{U}^*\}_{\varepsilon>0}$ *— стала послідовність, де* $\mathcal{U}^* \in U_{sol}$ *— довільне допустиме керування. Нехай* $\left\{y_{\,\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}^*} \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ *— відповідні розв'язки* (2.7)–(2.8). *Тоді, в умовах твердження 4, маємо:*

$$
\widetilde{y}_{\,\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}^*} \to \widetilde{y}_{\,\Omega,\mathcal{U}^*} \ \ \textit{сильно в} \ \ \overset{\circ}{W}{}^1_p(D).
$$

Доведення. Як випливає з твердження 4, для послідовності допустимих пар $\{(\mathcal{U}^*, y_{\,\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}^*}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ існує τ-гранична пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ така, що $y^*|_\Omega = y_{\mathcal{U}^*,\Omega}$. Слабка збіжність даної послідовності випливає з твердження 4. Згідно з умовами на коефіцієнти матриці $\mathcal{U}^*$, як еквівалентну норму простору $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ можна взяти таку:

$$
|||y|||_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)} = \left(\int_D \left(\mathcal{U}^* |\nabla y|^{p-2} \nabla y, \nabla y\right)_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_D a_0(x) |y|^p\, dx\right)^{1/p}
$$

Достатньо встановити, що

$$
|||\widetilde{y}_\varepsilon|||_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)} \to |||y^*|||_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)} \ \ \text{при} \ \ \varepsilon \to 0. \tag{4.15}
$$

У рівняннях (3.4) та (2.7), за пробні функції візьмемо y^* і $\widetilde{y}_\varepsilon$, відповідно.

Переходячи до границі в (2.7), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \left(\mathcal{U}_\varepsilon|\nabla\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\nabla\widetilde{y}_\varepsilon,\nabla\widetilde{y}_\varepsilon\right)_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D a_0|\widetilde{y}_\varepsilon|^p\,dx\right)\\
&\qquad=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \left(\mathcal{U}^*|\nabla\widetilde{y}_\varepsilon|^{p-2}\nabla\widetilde{y}_\varepsilon,\nabla\widetilde{y}_\varepsilon\right)_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D a_0|\widetilde{y}_\varepsilon|^p\,dx\right)\\
&\qquad=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(|||\widetilde{y}_\varepsilon|||_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)}\right)^p=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D f\widetilde{y}_\varepsilon\,dx=\int_D fy^*\,dx\\
&\qquad=\int_D \left(\mathcal{U}^*|\nabla y^*|^{p-2}\nabla y^*,\nabla y^*\right)_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D a_0|y^*|^p\,dx=\\
&\qquad\qquad=\left(|||y^*|||_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)}\right)^p.
\end{aligned}$$

Отже, (4.15), разом зі слабкою збіжністю в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ дає сильну збіжність розв'язків. Оскільки $y_{\Omega,\mathcal{U}^*}$ — єдиний розв'язок задачі (2.1)–(2.3), а $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega)$ належить множині Ξ_Ω, це означає, що $y^*|_\Omega = y_{\Omega,\mathcal{U}^*}$. Таким чином,

$$(\mathcal{U}^*,\widetilde{y}_\varepsilon)\longrightarrow(\mathcal{U}^*,y^*)\ \ \text{сильно в}\ \ L_\infty^{n\times n}(D)\times\overset{\circ}{W}{}_p^1(D).$$

Твердження доведене. □

Тепер можемо сформулювати наступний результат.

Теорема 5. *Нехай Ω, $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підмножини D. Нехай також*

$$\Xi_{\Omega_\varepsilon}\subset L_\infty^{n\times n}(D)\times\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)\ \ i\ \ \Xi_\Omega\subset L_\infty^{n\times n}(D)\times\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$$

є множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (2.6)–(2.8) та (3.3)–(3.5), відповідно. Припустимо, що $\Omega\in\mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c-допустимим збуренням області Ω.

Тоді послідовність $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ξ_Ω в сенсі Моско, а саме, виконуються наступні властивості:

(ΞM_1) *для довільної пари $(\mathcal{U},y)\in\Xi_\Omega$, знайдеться така послідовність*

$$\{(\mathcal{U}_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$$

така, що $\mathcal{U}_\varepsilon\to\mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n\times n}(D)$ і $\widetilde{y}_\varepsilon\to\widetilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$;

(ΞM_2) *якщо числова послідовність $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до 0, а $\{(\mathcal{U}_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність така, що*

$$(\mathcal{U}_k,y_k)\in\Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}\quad\forall\,k\in\mathbb{N},\quad i$$

$$(\mathcal{U}_k,\widetilde{y}_k)\ \xrightarrow{\ \tau\ }\ (\mathcal{U},\psi)\ \ \text{в}\ \ L_\infty^{n\times n}(D)\times\overset{\circ}{W}{}_p^1(D),$$

то існує функція $y\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ така, що $y=\psi|_\Omega$ і $(\mathcal{U},y)\in\Xi_\Omega$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що властивість (ΞM_2) є прямим наслідком твердження 4. Отже, залишається перевірити лише властивість (ΞM_1).

За вихідними припущеннями, множина допустимих пар Ξ_Ω для задачі (3.3)–(3.5) непорожня. Нехай $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ — її довільний елемент. Побудуємо послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, що буде задовольняти властивість (ΞM_1) таким чином: $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}\ \forall\,\varepsilon > 0$, а $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}}$ — відповідний розв'язок крайової задачі (2.7)–(2.8). Зауважимо, що такий вибір можливий, оскільки матриця $\mathcal{U}$ є допустимим керуванням для задачі (2.6)–(2.8) при кожному $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно з наслідком 1, отримаємо

$$\widetilde{y}_{\Omega_\varepsilon,\mathcal{U}} \to \widetilde{y}_{\Omega,\mathcal{U}} \ \text{ сильно в } \ \overset{\circ}{W}{}^1_p (D).$$

Оскільки $y_{\Omega,\mathcal{U}}$ — єдиний розв'язок задачі (3.4)–(3.5) а $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, це означає, що $y = y_{\Omega,\mathcal{U}}$ можна зробити бажаний висновок:

$$(\mathcal{U}, \widetilde{y}_\varepsilon) \longrightarrow (\mathcal{U}, \widetilde{y}) \ \text{ сильно в } \ L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p (D).$$

Теорему доведено. □

5. Поняття Моско-стійкості для задачі оптимального керування

Введемо таке поняття:

Означення 6. Будемо говорити, що задача оптимального керування (2.1)–(2.3) є Моско-стійкою в $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p (D)$ відносно збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω, якщо:

(MS_1) множина допустимих пар Ξ_Ω для (2.1)–(2.3) є границею в сенсі Моско послідовності $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ множин допустимих пар збурених задач (2.6)–(2.8);

(MS_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — числова послідовність, яка збігається до 0, а послідовність $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ є такою, що

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \ \text{ і}$$

$$(\mathcal{U}_k, \widetilde{y}_k) \xrightarrow{\ \tau\ } (\mathcal{U}, y) \ \text{ в } \ L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p (D), \ \text{ де } \ (\mathcal{U}, y|_\Omega) \in \Xi_\Omega,$$

то $\liminf_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) \geq L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega)$;

(MS_3) для кожної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, знайдеться послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ така, що $\mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}$ сильно в $L^{n\times n}_\infty(D)$, $\widetilde{y}_\varepsilon \to \widetilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^1_p (D)$, і

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq L_\Omega(\mathcal{U}, y).$$

Теорема 6. *Припустимо, що для заданого збурення* $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *області* Ω, *задача оптимального керування* (3.3)–(3.5) *є Моско-стійкою в просторі*

$$L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D).$$

Нехай $\left\{(\mathcal{U}^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon)\in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}$ *— це послідовність оптимальних розв'язків відповідних збурених задач* (2.6)–(2.8). *Тоді ця послідовність є відносно* τ*-компактною в* $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ *та кожна її* τ*-гранична пара є оптимальним розв'язком вихідної задачі* (3.3)–(3.5). *Більше того, якщо*

$$(\mathcal{U}^0_\varepsilon, \widetilde{y}^{\,0}_\varepsilon) \xrightarrow{\ \tau\ } (\mathcal{U}^0, y^0), \tag{5.1}$$

то $(\mathcal{U}^0, y^0\big|_\Omega)\in \Xi_\Omega$ *і*

$$\inf_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U},y) = L_\Omega(\mathcal{U}^0, y^0\big|_\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{(\mathcal{U}_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_{\Omega_\varepsilon}} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon). \tag{5.2}$$

Доведення. Як уже не раз наголошувалось, довільна послідовність допустимих пар збурених задач (2.6)–(2.8) є рівномірно обмеженою у просторі

$$L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D),$$

а, отже, те саме торкається і послідовності оптимальних пар

$$\left\{(\mathcal{U}^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon)\in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}.$$

Отже, можна зробити висновок, що дана послідовність є відносно τ-компактною в $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$, і припустити, що існує підпослідовність

$$\left\{(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, y^0_{\varepsilon_k})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

і пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ такі, що $(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, \widetilde{y}^{\,0}_{\varepsilon_k}) \xrightarrow{\ \tau\ } (\mathcal{U}^*, y^*)$ при $k\to\infty$. Тоді за теоремою 5 (див. властивість (ΞM_2)), отримаємо $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega)\in\Xi_\Omega$. А тоді, згідно з умовою (MS_2) означення 6, маємо:

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}\min_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U},y) &= \liminf_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, y^0_{\varepsilon_k}) \geq \\ &\geq L_\Omega(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \geq \min_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U},y) = L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}).\end{aligned} \tag{5.3}$$

З іншого боку, умова (MS_3) стверджує існування такої послідовності $\left\{(\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon)\in\Xi_{\Omega_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}$, що

$$(\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \widetilde{\widehat{y}}_\varepsilon) \xrightarrow{\ \tau\ } (\mathcal{U}^{opt}, \widetilde{y}^{opt}), \text{ і } L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon).$$

Використовуючи цей факт, маємо

$$\begin{aligned}\min_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U},y) &= L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon) \geq \\ &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0}\min_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_{\Omega_\varepsilon}} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U},y) \geq \limsup_{k\to\infty}\min_{(\mathcal{U},y)\in\Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U},y) = \\ &= \limsup_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, y^0_{\varepsilon_k}).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Звідси і з (5.3), робимо висновок, що

$$\liminf_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, y^0_{\varepsilon_k}) \geq \limsup_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_k}, y^0_{\varepsilon_k}).$$

Тепер, об'єднуючи співвідношення (5.3) та (5.4), і переписуючи їх у формі рівностей, отримаємо

$$L_\Omega(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) = L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) = \min_{(\mathcal{U},\, y)\in\, \Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U}, y), \tag{5.5}$$

$$L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) = \lim_{k\to\infty} \min_{(\mathcal{U},\, y)\in\, \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}, y). \tag{5.6}$$

Оскільки рівності (5.5)–(5.6) справедливі для кожної τ-збіжної підпослідовності вихідної послідовності $\left\{(\mathcal{U}^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}$ оптимальних розв'язків , робимо висновок, що границі в (5.5)–(5.6) співпадають, а отже, $L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt})$ є границею всієї послідовності мінімальних значень

$$\left\{L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) = \inf_{(\mathcal{U},y)\in\, \Xi_{\Omega_\varepsilon}} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}, y)\right\}_{\varepsilon>0}.$$

Теорему доведено. □

6. Достатні умови Моско-стійкості

Наступною метою є виведення достатніх умов для Моско-стійкості задачі оптимального керування (3.3)–(3.5). Для цього використаємо наступний результат.

Лема 2. *Нехай Ω — відкрита підмножина D. Припустимо, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює деяке допустиме збурення області Ω (в сенсі означення 5). Нехай $\{\chi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність відповідних характеристичних функцій. Нехай χ^* — її $*$-слабка границя в $L_\infty(D;[0,1])$. Тоді*

$$\chi_\Omega (1-\chi^*) = 0 \quad \text{м. с. в} \quad D. \tag{6.1}$$

Доведення. Легко бачити, що для фіксованого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ множини Ω, з точністю до підпослідовності, існує функція χ^* така, що $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ збігається $*$-слабко до χ^* в $L_\infty(D;[0,1])$.

Нехай $\left\{y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ — довільна послідовність, така що $\widetilde{y}_\varepsilon \rightharpoonup y^*$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ і $y^*|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Згідно з твердженням 4 такий вибір є завжди можливим. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_D \widetilde{y}_\varepsilon \varphi\, dx = \int_D y^* \varphi\, dx = \int_D \chi_\Omega y^* \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in L_q(D).$$

З іншого боку, використовуючи той факт, що $\widetilde{y}_\varepsilon \to y^*$ сильно в $L_p(D)$, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_D \widetilde{y}_\varepsilon \varphi\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{y}_\varepsilon \varphi\, dx = \int_D \chi^* y^* \varphi\, dx = $$
$$= \int_D \chi^* \chi_\Omega y^* \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in L_q(D)$$

як границя добутку сильно та $*$-слабко збіжних послідовностей. Лему доведено. □

Наступна теорема торкатиметься достатніх умов Моско-стійкості класу задач оптимального керування (3.3)–(3.5).

Теорема 7. *Нехай Ω — відкрита підмножина D. Припустимо, що розподілення $z_\partial \in L_p(D)$ у функціоналі якості (3.3) є таким, що*

$$z_\partial(x) = z_\partial(x)\chi_\Omega(x) \quad \text{для м. в.} \quad x \in D. \tag{6.2}$$

І нехай виконується принаймні одна з умов $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c-допустимим збуренням області Ω.

Тоді задача оптимального керування (3.3)–(3.5) є Моско-стійкою в просторі $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$.

Доведення. Перевіримо пункти (MS_1)–(MS_3) означення 6.

Умова (MS_1) була доведена в теоремі 5. Нехай $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність, що задовольняє властивості, описані в пункті (MS_2), і нехай $(\mathcal{U}, y)$ є її τ-границею. Тоді $|\widetilde{y}_k - z_\partial|^p \to |y - z_\partial|^p$ сильно в $L_1(D)$, і

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla \widetilde{y}_k\|^p_{\mathbf{L}_p(D)} \ge \|\nabla y\|^p_{\mathbf{L}_p(D)},$$

оскільки норма є напівнеперервною знизу функцією відносно слабкої збіжності. Отже,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) = \\
&\qquad = \liminf_{k\to\infty}\left(\int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\widetilde{y}_k - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla \widetilde{y}_k|^p\,dx\right) \ge \\
&\qquad \ge \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla y|^p\,dx = \\
&\qquad = \{\text{ згідно (6.2) }\} = \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^p\,dx = \\
&\qquad = \{\text{ згідно (6.1) }\} = \int_\Omega |y - z_\partial|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^p\,dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega).
\end{aligned}$$

Отже, пункт (MS_2) перевірено. Залишається зробити перевірку останньої умови означення 6. Однак це легко випливає із сильної збіжності $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \to (\mathcal{U}, y)$ в $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ та властивостей (6.1)–(6.2). Справді, в цьому випадку маємо:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\widetilde{y}_\varepsilon - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla \widetilde{y}_\varepsilon|^p\,dx\right) = \\
&= \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla y|^p\,dx = \\
&= \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^p\,dx = \\
&= \int_\Omega |y - z_\partial|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^p\,dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega).
\end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Наприкінці наведемо ще одне твердження, яке торкається варіаційних властивостей задачі оптимального керування (3.3)–(3.5) при Моско-стійких збуреннях.

Теорема 8. *Припустимо, що виконуються всі припущення теореми 6. Нехай* $(\mathcal{U}^0, y^0)$ *— оптимальна пара задачі оптимального керування* (3.3)–(3.5), *а* $\left\{(\mathcal{U}^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}$ *— послідовність оптимальних пар для задач* (2.6)–(2.8) *така, що*

$$(\mathcal{U}^0_\varepsilon, \widetilde{y}^0_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^0, \widetilde{y}^0) \quad \text{в} \quad L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D). \tag{6.3}$$

Тоді з умови (6.2) *випливає, що*

$$\widetilde{y}^0_\varepsilon \to \widetilde{y}^0 \ \text{сильно в} \ \overset{\circ}{W}{}^1_p(D), \tag{6.4}$$

і

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\mathcal{U}^0_\varepsilon |\nabla y^0_\varepsilon|^{p-2}\nabla y^0_\varepsilon, \nabla y^0_\varepsilon\right)_{\mathbb{R}^n} dx = \\ = \int_\Omega \left(\mathcal{U}^0 |\nabla y^0|^{p-2}\nabla y^0, \nabla y^0\right)_{\mathbb{R}^n} dx. \tag{6.5}$$

Доведення. Як випливає з доведення теореми 7, для заданого збурення області Ω задача оптимального керування (3.3)–(3.5) на Ω є Моско-стійкою в $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$. Більше того, згідно з теоремою 6, довільна послідовність оптимальних пар збурених задач (2.6)–(2.8) є відносно τ-компактною в $L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ і кожна її τ-гранична точка є оптимальним розв'язком для вихідної задач (3.3)–(3.5). Отже, припущення (6.3) не є обмежливим.

Для доведення (6.4), скористаємось співвідношенням (5.2). Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon}|\widetilde{y}^0_\varepsilon - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla \widetilde{y}^0_\varepsilon|^p\,dx\right) = \\ = \int_D \chi_\Omega |\widetilde{y}^0 - z_\partial|^p\,dx + \int_D |\nabla\widetilde{y}^0|^p\,dx. \tag{6.6}$$

За теоремою вкладення Соболєва, маємо $\widetilde{y}^0_\varepsilon \to \widetilde{y}^0$ сильно в $L_p(D)$. Звідси, користуючись властивостями (6.1)–(6.2), отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon}|\widetilde{y}^0_\varepsilon - z_\partial|^p\,dx = \int_D \chi^*\chi_\Omega|\widetilde{y}^0 - z_\partial|^p\,dx = \\ = \int_D \chi_\Omega|\widetilde{y}^0 - z_\partial|^p\,dx. \tag{6.7}$$

Поєднуючи це з (6.6), приходимо до співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D |\nabla\widetilde{y}^0_\varepsilon|^p\,dx = \int_D |\nabla\widetilde{y}^0|^p\,dx,$$

яке разом зі слабкою збіжністю в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ дає (6.4).

Залишається довести збіжність енергій (6.5). Для цього скористаємось рівностями (3.4) і (2.7), замінивши там y на y^0, та y_ε на y_ε^0, відповідно. Тоді для відповідних інтегральних тотожностей візьмемо за пробні функції $\widetilde{y}^0$ та $\widetilde{y}_\varepsilon^0$, відповідно. В результаті граничного переходу в (2.7) отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \left(\mathcal{U}_\varepsilon^0|\nabla\widetilde{y}_\varepsilon^0|^{p-2}\nabla\widetilde{y}_\varepsilon^0,\nabla\widetilde{y}_\varepsilon^0\right)_{\mathbb{R}^n}dx+\int_D a_0|\widetilde{y}_\varepsilon^0|^p\,dx\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D f\widetilde{y}_\varepsilon^0\,dx=\int_D f\widetilde{y}^0\,dx=$$
$$=\int_D\left(\mathcal{U}^0|\nabla\widetilde{y}^0|^{p-2}\nabla\widetilde{y}^0,\nabla\widetilde{y}^0\right)_{\mathbb{R}^n}dx+\int_D a_0|\widetilde{y}^0|^p\,dx.$$

Тепер залишається тільки скористатися рівністю

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D a_0|\widetilde{y}_\varepsilon^0|^p\,dx=\int_D a_0|\widetilde{y}^0|^p\,dx$$

(див. (6.7)). Твердження доведене. □

7. Висновки

У роботі отримано достатні умови на збурення області, за виконання яких послідовність множин допустимих розв'язків збурених задач Моско-збігається в $L_\infty^{n\times n}(D)\times\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ до множини допустимих розв'язків вихідної задачі. Авторами сформульоване поняття Моско-стійкості задачі оптимального керування і доведено, що відносно обраного типу збурень області, розглянута у роботі оптимізаційна задача є стійкою.

Бібліографічні посилання

1. *Жиков В. В.* Усреднение дифференциальных операторов /В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. Л. Олейник. — М. : Физматлит, 1993.
2. *Иваненко В. И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. — К. : Наукова думка, 1988. — 324с.
3. *Капустян В.Є.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування коефіцієнтами в головній частині нелінійного еліптичного оператора // В. Є. Капустян , О. П. Когут // Нелінійні коливання. — 2009. — Т.12. — № 1. — С. 59 – 72.
4. *Марченко В. А.* Усредненные модели микронеоднородных сред / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. — К.: Наукова думка, 2005. — 550 с.
5. *Ball J.M., Mizel V.J.* One-dimentional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler–Lagrange equation // Arch. Rational Mech. Anal. — 1985. — № 90. — p. 325–388.
6. *Bucur D., Buttazzo G.*, Variational Methodth in Shape Optimization Problems // in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. —Boston: Birkhäuser. — Vol. 65. — 2005.

7. *Bucur D., Trebeschi P.* Shape optimization problem governed by nonlinear state equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. —(1998). — Ser. A. —Vol. 128. —p. 943–963.
8. *Bucur D., Zolésio Z.P.* N-Dimensional Shape Optimization under Capacitary Constraints // J. Differential Equations. — 1995. — Vol. 123. — № 2. — p. 504-–522.
9. *Dal Maso G., Defranceschi A.* Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains // Mnuskr.math. — 1988. — №6. — p. 251–278.
10. *Dal Maso G., Ebobisse F., Ponsiglione M.* A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations// J. Math. Pures Appl. — 2003. —Vol. 82. —p. 503-532.
11. *Dal Maso D., Murat F.*, Asymproric behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators // Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl.Sci.. — 1997. —no. 4. —Vol. 24. — p. 239–290.
12. *Dancer E.N.* The effect of domains shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations // J. Diff. Equations. — 1990. — Vol. 87. — p. 316–339.
13. *Daners D.* Domain perturbation for linear and nonlinear parabolic equations // J. Diff. Equations. — 1996. — Vol. 129. — Issue 2. —p. 358–402.
14. *Falconer K.J.* The Geometry of Fractal Sets. — Cambridge:Cambridge University Press, 1985.
15. *Mosco U.* Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities // Adv. Math. — 1969. — vol. 3. — p. 510–585.

Надійшла до редакції 01.09.2009