ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 47–60

УДК 517.977

ЗАДАЧИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. Е. Капустян, И. С. Лазаренко

Национальный технический университет Украины "КПИ".
03056, Киев, просп. Победы 37. E-mail: kapustyanv@ukr.net

Дано полное решение задачи с минимальной энергией для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и специальным критерием качества. Решения представлены в виде рядов по биортогональному базису Рисса, которые сходятся к непрерывным функциям.

Ключевые слова. нелокальные краевые условия, параболическое уравнение, задачи с минимальной энергией.

1. Параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями

В работе [6] рассмотрено однопараметрическое семейство начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\; (x,t) \;\in\; \Pi, \tag{1.1}$$

$$y(x,t_0) \;=\; \varphi(x),\; 0 \;\le\; x \;\le\; 1, \tag{1.2}$$

$$y(0,t) \;=\; 0,\; \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \;=\; \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} \;+\; \alpha\, y(1,t),\; t \;>\; 0, \tag{1.3}$$

где $\Pi \;=\; \{(x,t):\; 0 \;<\; x \;<\; 1,\; t \;>\; t_0 \;\ge\; 0\},\; \alpha \;\in\; R.$

При $\alpha = 0$ задача (1.1)–(1.3) известна как задача Самарского–Ионкина. Последний в [4], используя метод разделения переменных, доказал теорему единственности решения, представил его в виде функционального ряда и тем самым получил достаточные условия существования классического решения. Основная трудность применения метода разделения переменных заключалась в том, что система собственных функций оператора второй производной, подчиненного краевым условиям, не образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ и даже не является полной. Для получения указанных выше результатов система собственных функций дополнялась присоединенными функциями.

Приведем здесь основные результаты работы [6]. Для оператора второй производной ($Lu \;=\; -\,u''$) с краевыми условиями (1.3) задача на собственные числа имеет две серии решений:

$$\lambda_k^{(1)} \;=\; (2\,\pi\,k)^2,\; u_k^{(1)}(x) \;=\; \sin(2\,\pi\,k\,x),\; k \;=\; 1,\; 2, \ldots\,. \tag{1.4}$$

$$\lambda_k^{(2)} = (2\,\gamma_k)^2,\ u_k^{(2)}(x) = \sin(2\,\gamma_k\,x),\ k = 1,\ 2, \ldots, \tag{1.5}$$

где γ_k —решения уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma = 0.5\,\frac{\alpha}{\gamma},\ \gamma = 0.5\,\sqrt{\lambda}. \tag{1.6}$$

При $\alpha > 0$ уравнение (1.6) дополнительно имеет корень γ_0. Ему отвечают собственное значение $\lambda_0 = (2\gamma_0)^2$ и собственная функция $u_0(x) = \sin(2\gamma_0 x)$.

При $\alpha > 0$ отрицательных собственных значений не существует, а при $\alpha < 0$ существует единственное собственное значение $\lambda_0 = -(2\gamma_0)^2 < 0$, где γ_0 — корень уравнения $\operatorname{tg}(\gamma) = -0.5\,\alpha/\gamma$. Этому собственному значению отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция $u_0(x) = \operatorname{sh}(2\gamma_0 x)$.

При достаточно больших k для разности $\delta_k = \gamma_k - \pi k$ имеют место соотношения

$$\frac{|\alpha|}{2\pi k}\,(1 - (2\pi k)^{-1}) < |\gamma_k - \pi\,k| < \frac{|\alpha|}{2\pi k}\,(1 + (2\pi k)^{-1}). \tag{1.7}$$

Множество собственных значений можно упорядочить по возрастанию их значений:

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1^{(1)},\ \gamma_k^{(1)} < \gamma_k^{(2)} < \gamma_{k+1}^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots,\ \alpha > 0;$$

$$\gamma_0 < 0 < \gamma_1^{(2)},\ \gamma_k^{(2)} < \gamma_k^{(1)} < \gamma_{k+1}^{(2)},\ k = 1, 2, \ldots,\ \alpha < 0.$$

Оператор L^*, сопряженный к оператору L, имеет те же собственные значения, что и оператор L, которым соответствуют простые собственные функции

$$v_k^{(1)}(x) = \cos(2\pi k x + \tilde{\psi}_k),\ v_k^{(2)}(x) = \cos(\gamma_k(1 - 2x)),\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_0(x) = \cos(\gamma_0(1 - 2x)),\ \alpha > 0;\ v_0(x) = \operatorname{ch}(\gamma_0(1 - 2x)),\ \alpha < 0,$$

где $\tilde{\psi}_k = \operatorname{arctg}(\alpha/(2\pi k))$.

Собственные функции $u(x),\ v(x)$ операторов L и L^*, отвечающие различным собственным значениям $\lambda,\ \mu$, взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения в $L_2(0,1)$. Скалярные произведения собственных функций, отвечающих одинаковым собственным значениям, имеют вид:

$$(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}) = 0.5\ \sin\gamma_k(1 + (\sin 2\gamma_k)/(2\gamma_k)),$$

$$(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}) = -\,0.5\ \sin\tilde{\psi}_k,\ k = 1, 2,\ \ldots,$$

$$(u_0, v_0) = \begin{cases} 0.5\ \sin\gamma_0(1 + (\sin 2\gamma_0)/(2\gamma_0)), & \alpha > 0, \\ 0.5\ \operatorname{sh}\gamma_0(1 + (\operatorname{sh} 2\gamma_0)/(2\gamma_0)), & \alpha < 0. \end{cases}$$

Выписанная система приводится к биортонормированному виду

$$u_k^{(2)}(x) = \sin 2\,\gamma_k\,x,\ v_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)}\ \cos(\gamma_k(1 - 2\,x)),$$

$$u_k^{(1)}(x) = \sin 2\,\pi\,k\,x,\ v_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)}\ \cos(2\,\pi\,k\,x + \tilde{\psi}_k),\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$u_0(x) \ = \ \sin 2\ \gamma_0\ x,\ v_0(x) \ = \ C_0\ \cos(\gamma_0(1\ -\ 2\ x)),\ \alpha\ >\ 0,$$
$$u_0(x) \ = \ \mathrm{sh}\, 2\ \gamma_0\ x,\ v_0(x) \ = \ C_0\ \mathrm{ch}(\gamma_0(1\ -\ 2\ x)),\ \alpha\ <\ 0, \qquad (1.8)$$

где

$$C_k^{(1)} = -2(\sin\tilde{\psi}_k)^{-1},\ C_k^{(2)} = 2((\sin\gamma_k)\ (1+sinc2\gamma_k))^{-1},\ k = 1, 2, ...,$$
$$C_0 = 2((\sin\gamma_0)\ (1+sinc2\gamma_0))^{-1},\ (\alpha\ >\ 0),$$
$$C_0 = 2((\mathrm{sh}\,\gamma_0)\ (1+shc2\gamma_0))^{-1},\ (\alpha\ <\ 0),$$

причем $\sin c\gamma = (\sin\gamma)/\gamma, \mathrm{sh}\, c\gamma = (\mathrm{sh}\,\gamma)/\gamma$.

Ни система собственных функций $u_k(x)$ оператора L, ни биортогональная к ней система собственных функций оператора L^* не образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Рассмотрим вспомогательную систему функций $W_\alpha \ = \ \{w_j(x),\ j \ = 0, 1, ...\}$, элементы которой имеют вид:

$$w_{2k-1}(x) = (u_k^{(2)}(x)\ -\ u_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1} \ = \ (\sin c\delta_k x) x \cos(2\pi kx + \delta_k x),$$
$$w_{2k}(x) = u_k^{(1)}(x) \ = \ \sin(2\pi kx),\ k \ = \ 1, 2, ... \ ,\ w_0(x) = u_0(x)/2\gamma_0. \qquad (1.9)$$

Для системы функций W_α существует биортогональная к ней система функций $R_\alpha = \{r_i(x),\ i = 0, 1, ...\}$, элементы которой имеют вид:

$$r_{2k}(x) = v_k^{(2)}(x)\ +\ v_k^{(1)}(x),$$
$$r_{2k-1}(x) = 2\ \delta_k\ v_k^{(2)}(x),\ k \ = \ 1, 2, ... \ ,\ r_0(x) = 2\ \gamma_0\ v_0(x). \qquad (1.10)$$

Системы функций $W_\alpha,\ R_\alpha$ образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, а системы собственных функций для операторов L и L^* являются полными в том же пространстве.

В работе [4], как указывалось выше, для случая $\alpha = 0$ построена система собственных и присоединенных функций $W_0 \ = \ \{X_j(x),\ j \ = \ 0, 1, ...\}$, элементы которой имеют вид:

$$X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$
$$k \ = \ 1, 2, ... \ ,\ X_0(x) \ = \ x. \qquad (1.11)$$

Для системы функций W_0 существует биортогональная к ней система функций $R_0 = \{Y_i(x),\ i = 0, 1, ...\}$, элементы которой имеют вид:

$$Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx),\ Y_{2k}(x) = 4(1\ -\ x)\ \times$$
$$\times\ \sin(2\pi kx),\ k \ = \ 1, 2, ... \ ,\ Y_0(x) = 2. \qquad (1.12)$$

Системы $W_0,\ R_0$ образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0,1)$ и для любой функции $\phi(x)\ \in\ L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$r\ ||\phi||_{L_2}^2\ \le\ \sum_{k=0}^{\infty}\ \phi_k^2\ \le\ R\ ||\phi||_{L_2}^2, \qquad (1.13)$$

где $r = 3/4,\ R = 16,\ \phi_k = (\phi, Y_k)_{L_2}$.

Более того, в [7] доказано, что в пространстве $L_2(0,1)$ можно ввести эквивалентную норму по правилу

$$||\phi||_D^2 \ = \ (D\phi, \phi) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \ \phi_k^2, \tag{1.14}$$

где $D: \ L_2(0,1) \ \to \ L_2(0,1)$ — некоторый положительно определенный оператор.

В [6] эти результаты распространены на системы $W_\alpha,\ R_\alpha$. Здесь следует отметить, что системы $W_\alpha,\ R_\alpha$ не переходят в системы $W_0,\ R_0$ при $\alpha \to 0$.

Таким образом, в работе [6] для краевой задачи (1.1)–(1.3) построено формальное представление ее решения в виде ряда по системам $W_\alpha,\ R_\alpha$ и установлено, что этот ряд является единственным классическим ее решением, которое устойчиво по начальным условиям относительно эквивалентной нормы. При этом следует учесть отсутствие априорных оценок на решение, подобных задачам с локальными краевыми условиями.

При постановке для таких краевых задач задач оптимального управления следует каждый раз обращать внимание на разрешимость последних, так как методы "L_2-теории" здесь не работают.

2. Распределенное управление с эквивалентной нормой

Пусть управляемый процесс $y(x,t)$ описывается краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t} \ = \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ + \ p(x,t),\ (x,t) \ \in \ Q \ = \ \{0 < x < 1, t_0 < t \le T < \infty\}, \tag{2.1}$$

$$y(x,t_0) \ = \ \varphi(x),\ 0 \ \le \ x \ \le \ 1, \tag{2.2}$$

$$y(0,t) \ = \ 0,\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \ = \ \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} \ + \ \alpha\, y(1,t),\ t \ > \ 0. \tag{2.3}$$

Требуется найти управление $p^*(x,t) \ \in \ C(Q)$, которое переводит систему (2.1)–(2.3) в состояние

$$y(x,T) \ = \ \psi(x) \tag{2.4}$$

и минимизирует функционал

$$I(p) \ = \ \int_{t_0}^{T} ||p||_D^2 \ dt. \tag{2.5}$$

Заметим, что в задачах с минимальной энергией в случае локальных краевых условий [3] в качестве критерия выбирается функционал

$$I_1(p) \ = \ \int_Q p^2(x,t)dx \ dt, \tag{2.6}$$

который асоциируется с полной энергией системы. Критерии (2.5), (2.6) эквивалентны в смысле (1.13). Поэтому далее будем рассматривать задачу с критерием (2.5), так как при этом удается получить в определенном смысле окончательный результат. Особенности решения задачи с критерием (2.6) будут рассмотрены в конце этого пункта.

Теорема 1. *Пусть в задаче с минимальной энергией (2.1)–(2.5) функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *принадлежат области определения оператора* L *и* $\alpha \neq 0$. *Кроме того, предположим, что* $\psi(x) \in C^4(0,1)$, $\varphi(x) \in C^3(0,1)$,

$$\frac{d^2\psi(1)}{dx^2} = \frac{d^2\psi(0)}{dx^2} = 0, \ \frac{d^3\psi(1)}{dx^3} - \frac{d^3\psi(0)}{dx^3} = 0; \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2\varphi(1)}{dx^2} + \frac{d^2\varphi(0)}{dx^2} = 0. \tag{2.8}$$

Тогда задача с минимальной энергией имеет единственное непрерывное на $\bar{Q}$ *решение и это решение представимо в виде:* $p^*(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\, w_k(x)$, *где*

$$p_0(t) = \frac{2\,\lambda_0\,\mu_0\,\exp(-\lambda_0(T-t))}{1 - \exp(-2\lambda_0(T-t_0))}, \tag{2.9}$$

$$p_{2k-1}(t) = \mu_{2k-1}\,\frac{[h_{k,2},h_{k,2}]\,\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) + [h_{k,1},h_{k,2}]\,\theta_k(T-t)}{\Delta_k} -$$

$$-\mu_{2k}\,\frac{[h_{k,1},h_{k,2}]\,\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) + [h_{k,1},h_{k,1}]\,\theta_k(T-t)}{\Delta_k}, \tag{2.10}$$

$$p_{2k}(t) = \frac{\mu_{2k}\,[h_{k,1},h_{k,1}] - \mu_{2k-1}\,[h_{k,1},h_{k,2}]}{\Delta_k}\,\exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)),\ k \geq 1. \tag{2.11}$$

В (2.9)–(2.11) обозначено

$$\mu_0 = \psi_0 - \varphi_0\,\exp(-\lambda_0(T-t_0)), \tag{2.12}$$

$$\mu_{2k-1} = \psi_{2k-1} - \varphi_{2k-1}\,\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t_0)), \tag{2.13}$$

$$\mu_{2k} = \psi_{2k} + \theta_k(T-t_0)\,\varphi_{2k-1} - \varphi_{2k}\exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t_0)), \tag{2.14}$$

φ_k, ψ_k *— коэффициенты разложения функций* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *в ряды по системе* W_α,

$$\theta_k(t) = \frac{\exp(-\lambda_k^{(1)}\,t) - \exp(-\lambda_k^{(2)}\,t)}{2\,\delta_k}; \tag{2.15}$$

$$[h_{k,i},h_{k,j}] = \int_{t_0}^{T} h'_{k,i}(t)\,h_{k,j}(t)\,dt, \tag{2.16}$$

$$\Delta_k = [h_{k,1},h_{k,1}]\,[h_{k,2},h_{k,2}] - [h_{k,1},h_{k,2}]^2, \tag{2.17}$$

$$h'_{k,1}(t) = (\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)),\ 0), \tag{2.18}$$

$$h'_{k,2}(t) = (-\theta_k(T-t), \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))). \tag{2.19}$$

Значение критерия дано сходящимся рядом

$$I(p^*) = I_0(p_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{I}_k(p_{2k-1},p_{2k}), \tag{2.20}$$

где

$$I_0(p_0) \;=\; 2\;\frac{\lambda_0\mu_0^2}{1\;-\;\exp(-2\lambda_0(T-t_0))}, \tag{2.21}$$

$$\hat{I}_k(p_{2k-1},p_{2k}) \;=\; \int_{t_0}^{T}\;(p_{2k-1}^2(t)\;+\;p_{2k}^2(t))\;dt, \tag{2.22}$$

а оптимальная траектория, задаваемая рядом

$$y^*(x,t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\;y_k(t)\;w_k(x), \tag{2.23}$$

где функции $y_k(t)$ определяются как решения задач Коши

$$\dot{y}_{2k-1}(t)\;+\;\lambda_k^{(2)}\;y_{2k-1}(t)\;=\;p_{2k-1}(t),\;\;y_{2k-1}(t_0)\;=\;\varphi_{2k-1}; \tag{2.24}$$

$$\dot{y}_{2k}(t)\;+\;\lambda_k^{(1)}\;y_{2k}(t)\;=\;\frac{\lambda_k^{(1)}\;-\;\lambda_k^{(2)}}{2\delta_k}\;y_{2k-1}(t)\;+\;p_{2k}(t),$$

$$y_{2k}(t_0)\;=\;\varphi_{2k},\;\;k\;=\;1,2,...; \tag{2.25}$$

$$\dot{y}_0(t)\;+\;\lambda_0\;y_0(t)\;=\;p_0(t),\;\;y_0(t_0)\;=\;\varphi_0, \tag{2.26}$$

является классическим решением краевой задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Запишем функцию $\psi(x)$ в виде ряда по базису W_α

$$\psi(x)\;=\;w_0(x)\;\psi_0\;+\sum_{k=1}^{\infty}(w_{2k-1}(x)\;\psi_{2k-1}\;+\;w_{2k}(x)\;\psi_{2k}),\;\;\psi_k\;=(\psi,r_k). \tag{2.27}$$

Заметим, что если произвольная функция $\varrho(x)$ принадлежит области определения оператора $L\;\;(L^*)$, то для коэффициентов ее разложения по системе $W_\alpha\;\;(R_\alpha)$, согласно [6], справедливы оценки

$$|\rho_k|\;\le\;\frac{C}{k^2},\;\;k\;=\;1,...\;. \tag{2.28}$$

Задача (2.1)–(2.5) эквивалентна такой задаче: найти минимум функционала

$$I(p)\;=\;\int_{t_0}^{T}\sum_{k=0}^{\infty}p_k^2(t)\;dt$$

при ограничениях (2.24)–(2.26).

Эта задача редуцируется в последовательность конечномерных задач. При $k=0$ будем иметь такую задачу: минимизировать функционал

$$I_0(p_0)=\int_{t_0}^{T}p_0^2(t)\;dt \tag{2.29}$$

при ограничении

$$\int_{t_0}^{T}\exp(-\lambda_0(T-t))\;p_0(t)\;dt\;=\;\mu_0. \tag{2.30}$$

При $k > 0$ следует минимизировать функционал

$$\hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}) = \int_{t_0}^{T} (p_{2k-1}^2(t) + p_{2k}^2(t))dt \tag{2.31}$$

при ограничениях

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))\; p_{2k-1}(t)\; dt = \mu_{2k-1},$$

$$\int_{t_0}^{T} [-\theta_k(T-t)\; p_{2k-1}(t) + \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))\; p_{2k}(t)]\; dt = \mu_{2k}. \tag{2.32}$$

При построении моментных равенств (2.32) использовалась фундаментальная матрица $\mathcal{W}_k(t,\tau)$ для системы (2.24)–(2.25), которая имеет вид:

$$\mathcal{W}_k(t,\tau) = \begin{pmatrix} \exp(-\lambda_k^{(2)}(t-\tau)) & 0 \\ -\,\theta_k(t-\tau) & \exp(-\lambda_k^{(1)}(t-\tau)) \end{pmatrix}.$$

Задачи (2.29)–(2.32) представляют собой конечномерные задачи с минимальной энергией. Решение первой из них, согласно [3], задается формулами (2.9), (2.21). Оптимальное управление во второй задаче, согласно [2], ищется в виде:

$$\hat{p}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} \beta_{k,j}\; h_{k,j}(t),$$

где $\hat{p}_k'(t) = (p_{2k-1}(t),\; p_{2k}(t))$, а коэффициенты $\beta_{k,j}$ однозначно определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\beta_{k,1}\;[h_{k,1}, h_{k,1}] + \beta_{k,2}\;[h_{k,1}, h_{k,2}] = \mu_{2k-1},$$
$$\beta_{k,1}\;[h_{k,1}, h_{k,2}] + \beta_{k,2}\;[h_{k,2}, h_{k,2}] = \mu_{2k}.$$

Вычислим скалярные произведения $[h_{k,i}, h_{k,j}]$:

$$[h_{k,1}, h_{k,1}] = \frac{1 - \exp(-2\,\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}},$$

$$[h_{k,1}, h_{k,2}] = -\frac{1}{2\delta_k}\,(\frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} -$$
$$- \frac{1 - \exp(-2\,\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}}),$$

$$[h_{k,2}, h_{k,2}] = \frac{1}{4\delta_k^2}\,(\frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\,\lambda_k^{(1)}} -$$
$$-2\,\frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} + \frac{1 - \exp(-2\,\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}})+$$
$$+ \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\,\lambda_k^{(1)}}.$$

Определитель выписанной системы имеет вид:

$$\Delta_k = \frac{1+4\delta_k^2}{4\delta_k^2}\ \frac{(1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0)))(1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{4\ \lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}} - \\ - \frac{1}{4\delta_k^2}\ \frac{(1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0)))^2}{(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})^2}.$$

Тогда управления принимают вид (2.10)–(2.11).

Далее рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$. Оценим дроби $[h_{k,i}, h_{k,j}]/\Delta_k$. Так как

$$\Delta_k \geq \frac{1}{4^2\ \delta_k^2\ \lambda_k^{(1)}\ \lambda_k^{(2)}}\ (2\ \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0)) - \\ - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0)) - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0))) = \frac{1}{4^2\ \delta_k^2\ \lambda_k^{(1)}\ \lambda_k^{(2)}}\times \\ \times (1 - (\exp(-\lambda_k^{(1)}\ (T - t_0)) - \exp(-\lambda_k^{(2)}\ (T - t_0)))^2) \geq \\ \geq \frac{(1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}\ (T - t_0)))\ (1 - \exp(-\lambda_k^{(2)}\ (T - t_0)))}{4^2\ \delta_k^2\ \lambda_k^{(1)}\ \lambda_k^{(2)}},$$

то

$$\frac{[h_{k,1}, h_{k,1}]}{\Delta_k} \leq \frac{C\ \lambda_k^{(1)}(1 + \exp(-\lambda_k^{(2)}\ (T - t_0)))}{1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}\ (T - t_0))},$$

$$\frac{|[h_{k,1}, h_{k,2}]|}{\Delta_k} \leq \frac{1}{2\delta_k\ \Delta_k}\ (\frac{1 - \exp(-2\ \lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\ \lambda_k^{(1)}} + \\ + \frac{1 - \exp(-2\ \lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}}) \leq \frac{C\ \lambda_k^{(2)}(1 + \exp(-\lambda_k^{(2)}\ (T - t_0)))}{1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}\ (T - t_0))},$$

$$\frac{|[h_{k,2}, h_{k,2}]|}{\Delta_k} \leq \frac{1}{4\delta_k^2\ \Delta_k}\ (\frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\ \lambda_k^{(1)}} + \\ + 2\ \frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} + \frac{1 - \exp(-2\ \lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}})+ \\ + \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\ \lambda_k^{(1)}\ \Delta_k} < \frac{C\ \lambda_k^{(2)}(1+\exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{1-\exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}.$$

Тогда для выписанных коэффициентов управления получим оценки:

$$|p_{2k-1}(t)| \leq |\mu_{2k-1}|\ \frac{|[h_{k,2}, h_{k,2}]| + |[h_{k,1}, h_{k,2}]|\ C/k}{|\Delta_k|}+ \\ + |\mu_{2k}|\ \frac{|[h_{k,1}, h_{k,2}]| + |[h_{k,1}, h_{k,1}]|\ C/k}{|\Delta_k|} \leq C\ (|\mu_{2k-1}| + |\mu_{2k}|)\lambda_k^{(2)},$$

$$|p_{2k}(t)| = \frac{|\mu_{2k}|\ |[h_{k,1}, h_{k,1}]| + |\mu_{2k-1}|\ |[h_{k,1}, h_{k,2}]|}{|\Delta_k|} \leq C\ (|\mu_{2k-1}| + |\mu_{2k}|)\lambda_k^{(2)}.$$

В приведенных оценках использовано неравенство из [6]:

$$0 \ \leq \ \theta_k(t) \ \leq \ \frac{C}{k}.$$

Рассмотрим ряд

$$\hat{p}(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (p_{2k-1}(t) \ w_{2k-1}(x) \ + \ p_{2k}(t) \ w_{2k}(x)). \tag{2.33}$$

Так как $|w_j(x)| \ \leq \ 1, \ j \ \geq \ 1$, то

$$|\hat{p}(x,t)| \ \leq \ C \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \ (|\psi_{2k-1}| \ + \ |\psi_{2k}| + \ |\varphi_{2k-1}| \ (\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t_0)) \ +$$
$$+ \ \theta_k(T-t_0)) \ + \ |\varphi_{2k}| \ \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t_0))).$$

Так как числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \ (|\varphi_{2k-1}| \ \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t_0)) \ + \ |\varphi_{2k}| \ \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t_0)))$$

сходится, то для равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (2.33), нужно убедиться в сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \ (|\psi_{2k-1}| \ + \ |\psi_{2k}| \ + \ |\varphi_{2k-1}| \ \theta_k(T-t_0)). \tag{2.34}$$

Ряд (2.34) сходится. Действительно, в силу определения ψ_{2k-1}, получим:

$$\psi_{2k-1} = (\psi, r_{2k-1}) = 2\delta_k \ (\psi, v_k^{(2)}) = -2\delta_k \ C_k^{(2)} \ \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} (\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(\gamma_k(1-2x))).$$

Отдельно преобразуем скалярное произведение:

$$(\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(\gamma_k(1-2x))) \ = \ -\frac{1}{2\gamma_k} \ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \ \sin(\gamma_k(1-2x))|_0^1 \ +$$
$$+ \ \frac{1}{4\gamma_k^2} \ \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} \ \cos(\gamma_k(1-2x))|_0^1 \ - \ \frac{1}{4\gamma_k^2} \ (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \ \cos(\gamma_k(1-2x))).$$

Тогда, в силу (2.7), будем иметь:

$$\psi_{2k-1} \ = \ \frac{1}{(\lambda_k^{(2)})^2} \ (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \ r_{2k-1}).$$

Возвращаясь к ряду (2.34), для его первой суммы получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \ |\psi_{2k-1}| \ \leq \ C \ \sum_{k=1}^{\infty} \ \frac{1}{k^2} \ < \ \infty,$$

так как $|r_k(x)| \ \leq \ C_r, \ k = 0, 1, ...$ в силу необходимого условия базисности системы функций R_α (элементы системы должны быть почти нормированными).

Для второй суммы ряда (2.34) будет справедливым аналогичный результат. Действительно, согласно определению ψ_{2k}, будем иметь:

$$\psi_{2k} \ = \ (\psi, r_{2k}) = (\psi, v_k^{(2)} + v_k^{(1)}) = (L\psi, \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} v_k^{(1)} \ + \ \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} v_k^{(2)}) \ =$$
$$= \ (L\psi, \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} C_k^{(1)} \ \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k) \ + \ \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} C_k^{(2)} \ \cos(\gamma_k(1 - 2x))).$$

Второе скалярное произведение было исследовано выше. Поэтому остановимся на первом скалярном произведении, т. е.:

$$(\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)) = \frac{1}{2\pi k} \ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \sin(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)|_0^1 \ + \ \frac{1}{(2\pi k)^2} \times$$
$$\times \ \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)|_0^1 \ - \ \frac{1}{(2\pi k)^2} (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)).$$

Отсюда, учитывая свойства функции $\psi(x)$, получим:

$$\psi_{2k} \ = \ (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2} r_{2k} \ + \ \frac{1}{2\delta_k} \ (\frac{1}{(\lambda_k^{(2)})^2} - \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2}) r_{2k-1}) \ =$$
$$= \ \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2} \ (\frac{d^4\psi}{dx^4}, r_{2k} + \frac{(\lambda_k^{(1)})^2 - (\lambda_k^{(2)})^2}{2\delta_k (\lambda_k^{(2)})^2} r_{2k-1}).$$

Так как

$$|\frac{(\lambda_k^{(1)})^2 - (\lambda_k^{(2)})^2}{2\delta_k (\lambda_k^{(2)})^2}| \ < \ \frac{C}{k},$$

то

$$|\psi_{2k}| \ < \ \frac{C}{k^4}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ \lambda_k^{(2)} \ |\psi_{2k}| \ < \ \infty.$$

Третья сумма ряда (2.34) сходится в силу свойств функций $\varphi(x), \ \theta_k(t)$ (см. сходимость первой суммы этого ряда).

Тем самым ряд (2.33) определяет непрерывную на $\bar{Q}$ функцию $\hat{p}(x,t)$ и при этом сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ \hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}).$$

Таким образом, мы доказали, что оптимальное управления $p^*(x,t)$ непрерывно в области $\bar{Q}$ и сходимость ряда, определяющего значение критерия качества.

Аналогично [6] устанавливаем, что ряд (2.23) определяет единственное классическое решение краевой задачи (2.1)–(2.3).

Если $\alpha < 0$, то получим тот же результат, так как при этом в приведенных оценках следует заменить собственные числа $\lambda_k^{(2)}$ на числа $\lambda_k^{(1)}$. □

Рассмотрим ту же задачу с минимальной энергией, но с критерием (2.6). В этом случае задача не распадается на последовательность одномерных и двумерных задач. Действительно, учитывая представление функции $p(x,t)$ в виде ряда по базису W_α, критерий (2.6) примет вид:

$$I_1(p) \;=\; \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{t_0}^{T} \; p_i(t)\; p_j(t)\; \mathcal{A}_{i,j}\; dt, \tag{2.35}$$

где

$$\mathcal{A}_{i,j} \;=\; \int_0^1 \; w_i(x)\; w_j(x)\; dx.$$

Кроме того, при этом должны выполняться моментные равенства (2.30), (2.32).

Из [1] следует, что матрица $\mathcal{A} \;=\; \{\mathcal{A}_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}$ представляет собой линейный ограниченный обратимый оператор в l_2.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(t_0,T)$, элементами которого выступают последовательности $\tilde{p}(t) \;=\; \{p_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ с нормой

$$||\tilde{p}||_{\mathcal{L}_2(t_0,T)} \;=\; \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \; \int_{t_0}^{T} \; p_i^2(t)\; dt}. \tag{2.36}$$

В силу [6] верна оценка

$$I_1(p) \;\geq\; \gamma_1 \; ||\tilde{p}||^2_{\mathcal{L}_2(t_0,T)}.$$

Тогда матрица $\mathcal{A}$ представляет собой положительно-определенный оператор в пространстве $\mathcal{L}_2(t_0,T)$ и определяет в нем энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}}(t_0,T)$ с нормой вида

$$[\tilde{p}]^2_{H_{\mathcal{A}}} \;=\; \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{t_0}^{T} \; p_i(t)\; p_j(t)\; \mathcal{A}_{i,j}\; dt.$$

Из [3] следует, что $H_{\mathcal{A}}(t_0,T) \;\subseteq\; \mathcal{L}_2(t_0,T)$. Перепишем задачу с минимальной энергией (2.35), (2.30), (2.32) в терминах пространства $H_{\mathcal{A}}(t_0,T)$. С этой целью определим последовательности $\varrho^l(t) \;\in\; H_{\mathcal{A}}(t_0,T),\; l \;=\; 0,1,...$ как решения уравнений

$$\mathcal{A}\; \varrho^l(t) \;=\; f^l(t),\;\; l \;=\; 0,1,..., \tag{2.37}$$

где

$$f^0(t) \;=\; \{\exp(-\lambda_0(T-t)), 0, ...\},$$

$$f^{2k-1}(t) \;=\; \{\underbrace{0,...,0}_{2k-2}, \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)), 0, ...\},$$

$$f^{2k}(t) \;=\; \{\underbrace{0,...,0}_{2k-2}, -\theta_k(T-t),\ \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)), 0, ...\},\ k=1, ...\ .$$

Так как $f^l(t) \in H_{\mathcal{A}}(t_0,T)$, то и $\varrho^l(t) \in H_{\mathcal{A}}(t_0,T)$, $l = 0,1,...$. Тогда задача с минимальной энергией формулируется таким образом: минимизировать критерий

$$I_1(p) \;=\; [\tilde{p}]^2_{H_{\mathcal{A}}} \tag{2.38}$$

при ограничениях

$$[\varrho^l, \tilde{p}]_{H_{\mathcal{A}}} \;=\; \mu_l,\ l \;=\; 0,1,...\ . \tag{2.39}$$

Предположим, что последовательности $\{\varrho^l(t)\}_{l=0}^{\infty}$ образуют базис пространства $H_{\mathcal{A}}(t_0,T)$. Тогда решение задачи (2.38)–(2.39) можно представить в виде:

$$\tilde{p}(t) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\ \varrho^j(t),$$

где числа α_j однозначно определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\ [\varrho^k, \varrho^j]_{H_{\mathcal{A}}} \;=\; \mu_j,\ j \;=\; 0,1,...\ .$$

При этом последовательность $\tilde{p}(t)$ должна быть такой, чтобы индуцируемое ею оптимальное управление $p(x,t)$ было непрерывным.

Изложенный алгоритм решения задачи с минимальной энергией носит формальный характер, так как требует обоснования на каждом шаге. Последнее упирается в изучение свойств матриц $\mathcal{A}^{-1}$ и $\{[\varrho^k, \varrho^j]_{H_{\mathcal{A}}},\ k,j = 0,1,...\}^{-1}$. Этот вопрос пока остается открытым. Поэтому предложенный здесь подход к решению задачи с минимальной энергией с использованием критерия качества (2.5) является целесообразным.

Замечание 1. В случае $\alpha = 0$ получим результат, аналогичный теореме 1.

3. Разделенное управление

Пусть управляемый процесс $y(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \;+\; g(x)\ p(t), \tag{3.1}$$

с краевыми условиями (2.2)–(2.3), где $g(x) \in C(0,1)$.
Требуется найти управление $p^*(t) \in C(t_0,T)$, доставляющее минимум критерию качества

$$J(p) \;=\; \int_{t_0}^{T} p^2(t)\ dt \tag{3.2}$$

и удовлетворяющее условию (2.4) ($\alpha > 0$.)

Учитывая представление решения краевой задачи (3.1), (2.2)–(2.3) в виде ряда по системе W_α, получим такую формулировку задачи с минимальной энергией: найти $p^*(t) \in C(t_0,T)$, доставляющее минимум (3.2) при ограничениях

$$g_0 \int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_0(T-t))\ p(t)\ dt \ = \ \mu_0, \tag{3.3}$$

$$g_{2k-1} \int_{t_0}^{T} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t))\ p(t)\ dt \ = \ \mu_{2k-1},$$

$$\int_{t_0}^{T} [-\theta_k(T-t)\ g_{2k-1} \ + \ \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))\ g_{2k}]\ p(t)\ dt \ = \ \mu_{2k},\ k>0, \tag{3.4}$$

где g_j — коэффициенты разложения функции $g(x)$ в ряд по системе W_α.

Переформулируем проблему моментов (3.3) - (3.4). С этой целью введем две последовательности: 1) $b = \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$, где $b_0 = \mu_0/g_0$; $b_{2k-1} = \mu_{2k-1}/g_{2k-1}$,

$$b_{2k} \ = \ \frac{2\ \delta_k\ \mu_{2k} \ - \ \mu_{2k-1}}{2\ \delta_k\ g_{2k} \ - \ g_{2k-1}},\ k \ = \ 1, \dots \ .$$

2) $\chi = \{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$, где $\chi_0 = \lambda_0$; $\chi_{2k-1} = \lambda_k^{(1)}$, $\chi_{2k} = \lambda_k^{(2)}$, $k = 1, \dots$. Тогда проблема моментов (3.3)–(3.4) принимает вид:

$$\int_{t_0}^{T} \exp(-\chi_j(T-t))\ p(t)\ dt \ = \ b_j,\ j \ = \ 0,1, \dots \ . \tag{3.5}$$

Пусть $b \in l_2$. Тогда мы полностью попадаем в условия разрешимости задачи с минимальной энергией для параболического уравнения с локальными краевыми условиями, изложенные в [3]. Действительно, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_k} \ < \ \infty,$$

то, согласно теореме Мюнца [5], система функций $\{\exp(-\chi_j(T-t))\}_{j=0}^{\infty}$ не является полной в $L_2(t_0,T)$. Решение задачи с минимальной энергией (3.2), (3.5) ищется в полном (относительно метрики пространства $L_2(t_0,T)$) пространстве $H_\lambda(t_0,T) \subset L_2(t_0,T)$ в виде: $p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(-\chi_k(T-t))$, где числовая последовательность $c = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ определяется как единственное решение системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{k,j}\ c_k \ = \ b_j,\ j \ = \ 0,1, \dots \ ,$$

$$M_{k,j} \ = \ \frac{1 \ - \ \exp(-(\chi_k+\chi_j)(T-t_0))}{\chi_k+\chi_j},\ \sum_{k,j=0}^{\infty} M_{k,j}\ c_k\ c_j \ < \ \infty.$$

Матрица M определяет в l_2 положительный оператор. Поэтому последовательность $\{c_k\}$ принадлежит энергетическому пространству M_λ положительного оператора M ($l_2 \subset M_\lambda$).

Такой результат, вообще говоря, нас не устраивает: нет достаточных условий разрешимости не только в $C(t_0,T)$, но и в $L_2(t_0,T)$. Но большего пока достичь не удается.

Замечание 2. В случае $\alpha \leq 0$ результат будет аналогичным.

Библиографические ссылки

1. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами. — К. : Наукова думка, 1988. — 278 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. - М. : Наука, 1978. — 463 с.
4. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. — Т. 13, N 2. — С. 294–304.
5. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М. : Наука, 1966. — 448 с.
6. Мокин А. Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения, 2009. — Т. 45, N 1. — С. 123–137.
7. *Мокин А. Ю.* Согласованость норм при исследовании разностных схем для задачи Самарского–Ионкина // Дифференциальные уравнения, 2006. — Т. 42, N 7. — С. 969–978.

Надійшла до редакції 27.09.2009