ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 89–92

УДК 517.91

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050.

Рассмотрена вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода отражений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова. Метод интегрального представления, телеграфное уравнение, метод отражений.

1. Введение

В физике достаточно часто используются математические модели, основой которых является телеграфное уравнение. Такого рода модели позволяют учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение первой краевой задачи [2]. В настоящей статье подобным методом строится решение второй краевой задачи в полуограниченной области.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $x - x_{н} > 0,\ t > t_{н}$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} + Cu\,(x,t) = 0, \qquad (2.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,(x,t_{н}) = 0,\ u_t\,(x,t_{н}) = 0,\ x > x_{н} \qquad (2.2)$$

и краевому условию второго типа

$$u_x\,(x_{н},t) = \nu\,(t - t_{н})\,,\ t > t_{н}. \qquad (2.3)$$

Для решения этой задачи, прежде всего, строится продолжение функции $\nu\left(t\right)$ на всю ось t:

$$N\left(t-t_{\text{н}}\right)=\begin{cases}\nu\left(t-t_{\text{н}}\right), & t>t_{\text{н}};\\ 0, & t<t_{\text{н}}.\end{cases} \tag{2.4}$$

Краевое условие (2.3) также продолжается на всю ось t:

$$u_{x}\left(x_{\text{н}},t\right)=N\left(t-t_{\text{н}}\right). \tag{2.5}$$

3. Решение задачи

Учитывая, что краевое условие (2.5) задано в виде производной, решение задачи отыскивается в виде функции [1]:

$$u\left(x,t\right)=e^{\frac{B}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}\int\limits_{0}^{t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}}J_{0}\left(z\right)e^{\frac{D\alpha^{2}}{2}\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)}N_{0}\left(\eta\right)d\eta \tag{3.1}$$

с неизвестной функцией $N_{0}\left(\eta\right)$. Здесь $J_{0}\left(z\right)$ — функция Бесселя нулевого порядка,

$$z=\sqrt{c_{1}\left[\left(x-x_{\text{н}}\right)^{2}-\alpha^{2}\left(\left(t-t_{\text{н}}\right)-\eta\right)^{2}\right]}; \tag{3.2}$$

$$c_{1}=C+\frac{D^{2}\alpha^{2}}{4}-\frac{B^{2}}{4}. \tag{3.3}$$

Функция (3.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) при произвольной функции $N_{0}\left(t\right)$.

Для анализа краевого условия (2.5) вычислим производную функции (3.1) по x. Получим:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}=-\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{B-D\alpha}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}N_{0}\left(t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}\right)+$$
$$e^{-\frac{B}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}\int\limits_{0}^{t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}}\left[-\frac{B}{2}J_{0}\left(z\right)-c_{1}\frac{x-x_{\text{н}}}{z}J_{1}\left(z\right)\right]e^{\frac{D\alpha^{2}}{2}\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)}N_{0}\left(\eta\right)d\eta. \tag{3.4}$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=c_{1}\frac{x-x_{\text{н}}}{z},$$

$$\frac{\partial J_{0}\left(z\right)}{\partial x}=\frac{dJ_{0}\left(z\right)}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c_{1}\left(x-x_{\text{н}}\right)}{z}\frac{dJ_{0}\left(z\right)}{dz}=-\frac{c_{1}\left(x-x_{\text{н}}\right)}{z}J_{1}\left(z\right),$$

так как

$$\frac{dJ_{0}\left(z\right)}{z}=-J_{1}\left(z\right).$$

Учтено также, что $z=0$ при $\eta=t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}$, а $J_{0}\left(0\right)=1$.

Подставим теперь форму решения (3.1) в краевое условие (2.5) с учетом (3.4). Получим:

$$-\frac{1}{\alpha}N_0\left(t-t_{\text{н}}\right)-\int\limits_0^{t-t_{\text{н}}}\frac{B}{2}J_0\left(z\right)e^{\frac{D\alpha^2}{2}\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)}N_0\left(\eta\right)d\eta=N\left(t-t_{\text{н}}\right). \qquad (3.5)$$

В равенстве (3.5) следует принимать

$$z|_{x=x_{\text{н}}}=\alpha\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)\sqrt{-c_1}. \qquad (3.6)$$

Равенство (3.5) представляет собой интегральное уравнение для определения функции N_0. Выполним в уравнении (3.5) преобразование

$$\tau=t-t_{\text{н}}. \qquad (3.7)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид:

$$-\frac{1}{\alpha}N_0\left(\tau\right)-\int\limits_0^{\tau}\frac{B}{2}J_0\left(\alpha\left(\tau-\eta\right)\sqrt{-c_1}\right)e^{\frac{D\alpha^2}{2}\left(\tau-\eta\right)}N_0\left(\eta\right)d\eta=N\left(\tau\right). \qquad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) и свойства (2.4) функции $N\left(\tau\right)$ следует, что функция $N_0\left(\tau\right)$ обладает следующим свойством:

$$N_0\left(\tau\right)\equiv 0,\ \tau<0. \qquad (3.9)$$

В силу свойства (3.9) функции $N_0\left(\tau\right)$ функция (3.1) будет удовлетворять начальным условиям (2.2). Действительно, при $t=t_{\text{н}}$ из формулы (3.1) получаем:

$$u\left(x,t_{\text{н}}\right)=e^{-\frac{B}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}\int\limits_0^{-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}}J_0\left(z\right)e^{-\frac{D\alpha^2}{2}\eta}N_0\left(\eta\right)d\eta.$$

При $x-x_{\text{н}}>0$ верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (3.9) функции $N_0\left(\tau\right)$, $u\left(x,t_{\text{н}}\right)$. Иными словами, функция (3.1) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Продифференцируем функцию (3.1) по t. Получим:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=e^{-\frac{B}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}\left[e^{\frac{D\alpha}{2}\left(x-x_{\text{н}}\right)}N_0\left(t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.\int\limits_0^{t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}}\left[\frac{D\alpha^2}{2}J_0\left(z\right)+c_1\alpha^2\frac{t-t_{\text{н}}-\eta}{z}J_1\left(z\right)\right]e^{\frac{D\alpha^2}{2}\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)}N_0\left(\eta\right)d\eta\right]. \qquad (3.10)$$

При вычислении производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{c_1\alpha^2\left(t-t_{\text{н}}-\eta\right)}{z},$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{dJ_0(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1\alpha^2(t-t_{\text{н}}-\eta)}{z}\frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1\alpha^2(t-t_{\text{н}}-\eta)}{z}J_1(z).$$

Из формулы (3.10) при $t = t_{\text{н}}$ получаем:

$$u_t(x,t_{\text{н}}) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_{\text{н}})}\left[e^{\frac{D\alpha}{2}(x-x_{\text{н}})}N_0\left(-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}\right) + \int\limits_0^{-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}}\left[\frac{D\alpha^2}{2}J_0(z) - c_1\alpha^2\frac{\eta}{z}J_1(z)\right]e^{-\frac{D\alpha^2}{2}\eta}N_0(\eta)\,d\eta\right].$$

В правой части этой формулы при $x - x_{\text{н}} > 0$ верхний предел интегрирования и аргумент функции $N_0(\tau)$ отрицательны. Поэтому, на основании свойства (3.9) функции $N_0(\tau)$, $u_t(x,t_{\text{н}}) = 0$. А это значит, что функция (3.1) удовлетворяет второму начальному условию (2.2).

Таким образом, показано, что функция (3.1) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

4. Выводы

В результате применения комбинации интегрального представления решения и метода продолжений получено в квадратурах решение второй краевой задачи для телеграфного уравнения. Анализ формулы (3.1), представляющей решение задачи, показывает, что это решение имеет характер распространяющихся со скоростью α волн. В то же время в процессе распространения происходит искажение этих волн, зависящее от коэффициентов B и D при первых производных в уравнении (2.1).

Разработанный метод может быть применен для решения других краевых задач подобного типа. В частности, с его помощью могут быть решены краевые задачи для полуограниченных областей с иными краевыми условиями. В дополнительной комбинации с методом отражений могут быть также получены решения краевых задач для ограниченных областей.

Библиографические ссылки

1. *Остапенко В. А.* Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 3–17.
2. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 18–20.

Надійшла до редакції 28.09.2009