ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2010. Вип. 2. С. 3–26

УДК 517.9

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Белозеров, А. В. Белозеров

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: belozvye@mail.ru

Найдены новые условия существования гомоклинических и гетероклинических орбит для некоторых типов систем обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений. Реализация этих условий совместно с известными теоремами Шильникова гарантирует существование хаотических аттракторов в автономных квадратичных 3-D системах. Приведены примеры гомоклинических орбит.

Ключевые слова. Система обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений, линейное преобразование, ограниченность, отрицательная определенность, гомоклиническая орбита, гетероклиническая орбита, хаотический аттрактор.

1. Введение

В течение четырех последних десятилетий хаотическое поведение решений динамических систем остается в фокусе внимания математиков, физиков и инженеров. Существуют сотни публикаций, в которых этот феномен рассматривается в той или иной форме [1–4]. Однако имеется очень мало работ, в которых (с математической точки зрения) существование хаотической динамики в исследуемых системах дифференциальных уравнений строго доказано.

Например, строгое математическое доказательство существования хаотической динамики в модифицированной системе Лоренца представлено в статьях [5, 6, 9]. Авторы этих статей воспользовались теорией бифуркаций Шильникова для построения гомоклинических и гетероклинических орбит. В работах [8, 10, 11, 17] изучение аттракторов типа Лоренца было продолжено. И хотя эти аттракторы исследованы достаточно глубоко, много нерешенных вопросов все еще остается. Как указано в [6], численные примеры, показывающие наличие хаотической динамики, возможно, вводят в заблуждение исследователей, так как компьютерное моделирование имеет ограниченную погрешность вычислений; экспериментальные же измерения имеют ограниченную точность во временной или частотной области. Наблюдаемое хаотическое поведение, возможно, является дефектом устройства наблюдения за счет физических ограничений, которые могут присутствовать в измерителе. Поэтому строгое доказательство крайне необходимо для полного понимания хаотических процессов в различных нелинейных динамических системах. Даже для первого известного аттрактора Лоренца, который интенсивно изучался последние 40 лет, только недавно было получено строгое доказательство его хаотического поведения.

Для исследования хаотической динамики в дифференциальных уравнениях с частными производными необходимо вначале установить существование конечномерного хаотического аттрактора. Главная проблема здесь заключается в том, что уравнения с частными производными имеют бесконечномерное пространство состояний [7] и нахождение в нем компактного множества притяжения представляет сложную задачу. К сожалению, использование классических инструментов теории бифуркаций в бесконечномерном случае наталкивается на большие трудности.

Возвращаясь к обыкновенным дифференциальным уравнениям, отметим, что, как показывают недавние публикации [12–16], [18–20], основным инструментом исследования хаотических аттракторов 3-D систем автономных квадратичных дифференциальных уравнений остаются теоремы Шильникова.

И, наконец, подчеркнем, что благодаря именно этим теоремам в работе [16] был сделан весомый вклад в решение задачи классификации хаотических аттракторов. Здесь было показано, что большой класс хаотических систем может быть разделен на следующие четыре типа: хаос в системах с гомоклиническими орбитами; хаос в системах с гетероклиническими орбитами; хаос гибридного типа, то есть, в системах с гомоклиническими и гетероклиническими орбитами; хаос других типов. Простые возможные формы хаотических систем были найдены для каждого вида хаоса. Также были указаны новые типы хаотических аттракторов, в частности, хаотический аттрактор с тремя положениями равновесия, с одной гетероклинической орбитой и одной гомоклинической орбитой, или четырехленточный аттрактор с пятью положениями равновесием и двумя гетероклиническими орбитами.

В настоящей работе для большого класса квадратичных систем дифференциальных уравнений, без ограничения на число нелинейностей, установлен критерий существования гомоклинических и гетероклинических орбит. В качестве же основного инструмента, позволяющего найти хаотический аттрактор, были использованы теоремы Шильникова [16].

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ действительное пространство размерности n. Пусть $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначает неизвестный вектор, координаты которого являются функциями времени t. Пусть также $A = (a_{ij}), B_1, ..., B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — действительные матрицы, причем матрицы $B_1, ..., B_n$ предполагаются симметрическими.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j(t) + \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t) \equiv f_1(\mathbf{x}(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dot{x}_n(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j(t) + \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t) \equiv f_n(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

порядка n с вектором начальных значений $\mathbf{x}^T(0) = (x_{10}, ..., x_{n0})$.

Введем еще некоторые обозначения и определения. Предположим, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ является компактным (замкнутым и ограниченным) множеством, содержащим начало координат. Символом $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ будем обозначать решение (траекторию, орбиту) системы (1.1), удовлетворяющую начальному условию $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Расстояние между любым вектором $\mathbf{x}_k$ и множеством Q определяется по формуле: $d(\mathbf{x}_k, Q) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in Q} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$.

Определение 1. Если существует компактное множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,\ \lim_{t\to\infty} d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), Q) = 0,$$

то мы будем называть Q глобальным аттрактором системы (1.1). Если для множества $P \subset \mathbb{R}^n$ выполняется условие $\forall \mathbf{x}_0 \in P \subset \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \subseteq P$, то P будет называться положительным инвариантным множеством системы (1.1).

Определение 2. Замкнутая траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) называется гомоклинической орбитой, если эта траектория сходится к одному и тому же положению равновесия при $t \to \pm\infty$.

Пусть $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ является положением равновесия системы (1.1). Обозначим через

$$D(\mathbf{x}_e) = (\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j)(\mathbf{x}_e) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

матрицу Якоби вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x}))^T$ в положении равновесия $\mathbf{x}_e$; $i, j = 1, ..., n$.

Теорема 1. *(Гомоклиническая теорема Шильникова) [22]. Предположим, что $n = 3$, и пусть $\alpha, \beta \pm i\gamma$ являются собственными числами матрицы $D(\mathbf{x}_e)$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \beta < 0$ и $\gamma \neq 0$ (положение равновесия является седло-фокусом).*

Предположим также, что выполнены следующие условия:

1) $|\alpha| > |\beta|$;

2) существует гомоклиническая орбита, начинающаяся и заканчивающаяся в точке $\mathbf{x}_e$.

Тогда: 1) в некоторой окрестности гомоклинической орбиты существует счетное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику системы (1.1);

2) для любого достаточно малого C^1-возмущения

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), ..., g_n(\mathbf{x}))^T$$

функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в системе (1.1) возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ имеет по крайней мере конечное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику вблизи гомоклинической орбиты;

3) исходная система (1.1) и возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют один и тот же тип хаоса, порожденного подковами Смейла.

Пусть $\mathbf{x}_{e_1}$ и $\mathbf{x}_{e_2}$ – два положения равновесия системы (1.1).

Определение 3. Замкнутая траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) называется гетероклинической орбитой, если для любой точки $\mathbf{x}_0$, принадлежащей этой траектории, или $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_2}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_1}$; или $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_1}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_2}$.

Теорема 2. *(Гетероклиническая теорема Шильникова) [22]. Предположим, что $n = 3$, и пусть $\alpha_k, \beta_k \pm i\gamma_k$ являются собственными числами матрицы $D(\mathbf{x}_{e_k})$, где $k = 1, 2$; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \cdot \beta_k < 0$ и $\gamma_k \neq 0$ (оба положения равновесия $\mathbf{x}_{e_1}$ и $\mathbf{x}_{e_2}$ предполагаются седло-фокусами).*

Пусть также выполнены следующие условия:

1) $|\alpha_k| > |\beta_k|, k = 1, 2$;

2) $\alpha_1\alpha_2 > 0$ и $\beta_1\beta_2 > 0$;

3) существует гетероклиническая орбита, связывающая точки $\mathbf{x}_{e_1}$ и $\mathbf{x}_{e_2}$.

Тогда: 1) в некоторой окрестности гомоклинической орбиты существует счетное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику системы (1.1);

2) для любого достаточно малого C^1-возмущения

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), ..., g_n(\mathbf{x}))^T$$

функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в системе (1.1), возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ имеет по крайней мере конечное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику вблизи гомоклинической орбиты;

3) исходная система (1.1) и возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют один и тот же тип хаоса, порожденного подковами Смейла.

2. Треугольная форма квадратичных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим следующую однородную систему квадратичных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{x}^T(t) B_1 \mathbf{x}(t), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \\ \dot{x}_n(t) = \mathbf{x}^T(t) B_n \mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

с вектором начальных данных $\mathbf{x}^T(0)$.

Заметим, что в системе (2.1) любая квадратичная форма может быть единственным образом представлена в виде суммы

$$\mathbf{x}^T B_{i+1} \mathbf{x} = U_{1,i+1}(x_1, ..., x_i) + U_{2,i+1}(x_1, ..., x_n),$$

где

$$U_{1,i+1}(x_1, ..., x_i) = (x_1, ..., x_i, 0, ..., 0) B_{i+1} (x_1, ..., x_i, 0, ..., 0)^T,$$

$$U_{2,i+1}(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}^T B_{i+1} \mathbf{x} - U_{1,i+1}$$

– квадратичные формы, зависящие от i и n переменных, и $U_{11}(x_0) \equiv 0$, $U_{21}(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}^T B_1 \mathbf{x}$; $i = 1, ..., n-1$.

Введем в систему (2.1) новую переменную $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))^T$ по формуле $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$, где $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невырожденная матрица. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} (S\mathbf{y}(t))^T B_1 (S\mathbf{y}(t)) \\ \vdots \\ (S\mathbf{y}(t))^T B_n (S\mathbf{y}(t)) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

(Таким образом, вектор начальных данных примет вид $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)$.)

Предположим, что существует обратимая матрица S такая, что в переменных $y_1, ..., y_n$ система (2.2) примет вид:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), ..., y_n(t)) \\ \vdots \\ U_{2n}(y_1(t), ..., y_n(t)) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Определение 4. Система (2.3) называется треугольной.

Например, если $n = 2$, то (2.3) имеет форму:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2, \\ \dot{y}_2(t) = \qquad\qquad 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2; \end{cases} \tag{2.4}$$

если $n = 3$, то (2.3) имеет такую форму:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_2(t) = \qquad\qquad 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 + b_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_3(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2c_{13}y_1y_3 + 2c_{23}y_2y_3 + c_{33}y_3^2. \end{cases}$$

3. Условия существования гомоклинических орбит для треугольных систем

Заметим, что в системе (2.3) последнее уравнение может быть записано так:

$$\dot{y}_n(t) = y_n(2c_{1n}y_1 + ... + 2c_{n-1,n}y_{n-1} + c_{nn}y_n),$$

где $c_{1n}, ..., c_{nn} \in \mathbb{R}$.

Следующая очевидная лемма [23] в данной работе играет ключевую роль.

Лемма 1. *Предположим, что для треугольной системы (2.3) $y_{n0} = y_n(0)$ и функция $y_n(t)$ не имеет полюсов на $[0, \infty)$. Тогда $\forall t \geq 0$ $y_n(0)y_n(t) \geq 0$.*

Формально вычислим все первые производные по времени для функций $z_1 = y_1/y_n, ..., z_{n-1} = y_{n-1}/y_n$, где $y_1(t), ..., y_n(t)$ – решения системы (2.3). Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\dot{y}_1 y_n - y_1\dot{y}_n}{y_n^2} \equiv G_1(z_1(t), ..., z_{n-1}(t))y_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\dot{y}_{n-1}y_n - y_{n-1}\dot{y}_n}{y_n^2} \equiv G_{n-1}(z_1(t), ..., z_{n-1}(t))y_n(t) \\ G_n(z_1(t), ..., z_{n-1}(t))y_n^2(t) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $G_i(z_1, ..., z_{n-1})$ — неоднородные квадратичные функции и $G_n(z_1, ..., z_{n-1})$ — неоднородная линейная функция переменных $z_1, ..., z_{n-1}$; $i = 1, ..., n-1$. (В соответствии с леммой 1, если $y_n(0) \neq 0$, то система (3.1) определена корректно.)

Введем линейную относительно переменных $z_1 ..., z_{n-1}$ функцию z по формуле

$$z = 2c_{1n}z_1 + ... + 2c_{n-1,n}z_{n-1}.$$

Построим квадратичную функцию

$$G(z_1, ..., z_{n-1}) \equiv 2c_{1n}G_1(z_1, ..., z_{n-1}) + ... + 2c_{n-1,n}G_{n-1}(z_1, ..., z_{n-1}),$$

и квадратичную форму $h_{n-1}(\mathbf{y}) = y_n^2 G(z_1, ..., z_{n-1})$.

Теорема 3. *Пусть $n > 1$. Предположим, что для треугольной системы (2.3) $y_{n0} \neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) квадратичная форма $h_{n-1}(\mathbf{y})$ отрицательно определена;

2) решения $y_i(t)$ непрерывны на $[0, \infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t)y_n(t) = 0$; $i = 1, ..., n$.

Доказательство. Предположим, что $y_{n0} > 0$. Без потери общности можно считать, что $a \in [0, \infty)$ – единственная сингулярная точка функции $y_n(t)$ ($\lim\limits_{t\to a} y_n(t) = \infty$). Тогда из леммы 1 вытекает, что $\forall t \in [0, a)$ $y_n(t) > 0$. Интегрируя последнее уравнение системы (2.3), получим:

$$y_n(t) = \frac{y_{n0}}{1 - y_{n0}\int\limits_0^t (z(\tau) + c_{nn})\, d\tau} \geq 0. \tag{3.2}$$

Из этого неравенства немедленно следует, что $\forall t \in [0, a)$

$$\int\limits_0^t (z(\tau) + c_{nn})\, d\tau = d(t) < 1/y_{n0}. \tag{3.3}$$

Кроме того, из условия отрицательной определенности формы $h_{n-1}(\mathbf{y})$ следует, что для любых $z_1, ..., z_{n-1}$ функция $G(z_1, ..., z_{n-1}) < 0$. Поэтому $\forall t \in [0, a)$ производная $\dot{z}(t) = G(z_1, ..., z_{n-1})y_n(t) < 0$. Так как $y_n(t) > 0$, то $z(t)$ – убывающая функция на интервале $[0, a)$.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 3.

1) $\Rightarrow$ *2*). Предположим, что функция $z_n(t) = z(t) + c_{nn}$ сохраняет знак на $[0, a)$. Будем считать, что $z_n(t) > 0$. Тогда из последнего уравнения системы (2.3) имеем $\dot{y}_n(t) > 0$ и, следовательно, функция $y_n(t)$ будет возрастающей на $[0, a)$. Кроме того, из условия $\dot{z}(t) < 0$, мы получаем, что $\dot{z}_n(t) < 0$ и потому $z_n(t)$ — убывающая функция. По предположению $\lim\limits_{t\to a-0} y_n(t) = \infty$. В этом случае будем иметь $\lim\limits_{t\to a-0} z_n(t) = -\infty$ и, следовательно, функция $z_n(t)$ меняет свой знак на $[0, a)$, что невозможно. Таким образом, предположение о том, что a является сингулярной точкой на интервале $[0, \infty)$, некорректно.

Следовательно, функции $z_n(t)$ и $y_n(t)$ не имеют сингулярных точек на $[0,\infty)$. Тогда мы имеем в (3.3) $d(t) > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_n(t) = y_{n0}/(1 - y_{n0} \lim\limits_{t\to\infty} d(t)) > 0$.

Если $z_n(t) < 0$, то $d(t) \le 0$ и из интегральной формулы (3.2) немедленно следует, что функция $y_n(t)$ не имеет сингулярных точек на $[0,\infty)$.

Пусть теперь a будет сингулярной точкой функции $z_n(t)$. Предположим, что $z_n(t) > 0$, но при переходе через некоторую точку $c \in [0,a)$ функция $z_n(t)$ изменяет свой знак ($z_n(c) = 0$). Так как $z_n(t)$ – убывающая функция, то для любого $\Delta t > 0$, имеем $z_n(c - \Delta t) > 0$ и $z_n(c + \Delta t) < 0$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^t z_n(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^c z_n(\tau)\,d\tau + \lim_{w\to a-0}\int\limits_c^w z_n(\tau)\,d\tau + \lim_{w\to a+0}\int\limits_w^t z_n(\tau)\,d\tau =$$

$$= Z(c) - Z(0) + \lim_{w\to a-0} Z(w) - Z(c) + Z(t) - \lim_{w\to a+0} Z(w) =$$

$$= Z(t) - Z(0) + \lim_{w\to a-0} Z(w) - \lim_{w\to a+0} Z(w), \tag{3.4}$$

где $Z(w)$— первообразная функция для $z_n(w)$; t— точка из интервала $[0,a) \bigcup (a,\infty)$.

При исследовании интеграла (3.4) возможны следующие четыре случая:

$$1) \lim_{w\to a-0} Z(w) = d_1 \ne -\infty, \lim_{w\to a+0} Z(w) = d_1 \ne -\infty, Z(\infty) = d_2 \ne \pm\infty;$$

$$2) \lim_{w\to a-0} Z(w) = d_3 \ne -\infty, \lim_{w\to a+0} Z(w) = d_3 \ne -\infty, Z(\infty) = -\infty;$$

$$3) \lim_{w\to a-0} Z(w) = -\lim_{w\to a+0} Z(w) = -\infty, \lim_{w\to a-0} Z(w) - \lim_{w\to a+0} Z(w) = -\infty$$

$$(\text{в силу того, что } \lim_{w\to a-0} Z(w) < 0,\ \lim_{w\to a+0} Z(w) > 0),$$

и

$$4) \lim_{w\to a-0} Z(w) = \lim_{w\to a+0} Z(w) = -\infty, \lim_{w\to a-0} Z(w) - \lim_{w\to a+0} Z(w) = 0.$$

(Здесь $d_1 - d_3$ — некоторые действительные константы.)

Напомним, что a – единственная сингулярная точка. Тогда случай 1) сводится к рассмотренной ранее ситуации для $z_n(t) > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} d(t) = d_2 < 1/y_{n0}$. Случаи 2) и 3) следуют из (3.2) и (3.3) и того, что $\lim\limits_{t\to a} y_n(t) = 0$. Но $\forall t \in [0,a)$ $y_n(t) > 0$; поэтому $a = \infty$.

В случае 4) мы имеем:

$$\lim_{t\to a-0} y_n(t) = \frac{y_{n0}}{1 - y_{n0} \lim\limits_{t\to a-0} \int\limits_0^t (z(\tau) + c_{nn})\,d\tau} = 0,$$

и так как $\forall t \in [0,a)$ $y_n(t) > 0$, то $a = \infty$. В [23] было показано, что любое решение общей системы без особых точек стремится к 0 при $t \to \infty$. Следовательно, ситуация $z_n(t) > 0$ (и $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = const \ne 0$) – невозможна. Таким образом, в этом случае остается единственная возможность $z_n(t) < 0$ и $z_n(t)$ меняет свой знак с $'-'$ на $'+'$. Значит, функция $y_n(t)$ не имеет сингулярных точек на $[0, \infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$.

Рассматривая поведение функции $y_n(t)$ при $y_{n0} < 0$, приходим к тому же заключению: $y_n(t)$— непрерывная функция на $[0, \infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$. Заметим, что в условиях теоремы 3 из доказательства вытекает, что переменные $z_1, ..., z_{n-1}$ являются непрерывными функциями для $t \in [0, \infty)$. Функции $G_1(z_1, ..., z_{n-1}), ..., G_{n-1}(z_1, ..., z_{n-1})$ и $G(z_1, ..., z_{n-1})$ являются полиномами относительно переменных $z_1, ..., z_{n-1}$ и потому эти функции также непрерывны $\forall t \in [0, \infty)$.

Запишем последнее уравнение системы (2.3) в интегральной форме:

$$y_n(t) = y_{n0} + \int\limits_0^t (z(\tau) + c_{nn}) y_n^2(\tau)\, d\tau.$$

Тогда из условия $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$ следует, что несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty (z(\tau) + c_{nn}) y_n^2(\tau)\, d\tau$$

сходится. Это возможно только в случае $\lim\limits_{t\to\infty} (z(t) + c_{nn}) y_n^2(t) = 0$, что эквивалентно предельному неравенству

$$\lim_{t\to\infty} (2c_{1n} y_1(t) y_n(t) + ... + 2c_{n-1,n} y_{n-1}(t) y_n(t)) = 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим уравнение

$$\dot z(t) = G(z_1(t), ..., z_{n-1}(t)) y_n(t),$$

которое может быть представлено интегральным соотношением

$$z(t) y_n^2(t) = z_0 y_n^2(t) + y_n^2(t) \int\limits_0^t G(z_1(\tau), ..., z_{n-1}(\tau)) y_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= z_0 y_n^2(t) + y_n^2(t) \int\limits_0^t \frac{h_{n-1}(y_1(\tau), ..., y_n(\tau))}{y_n(\tau)}\, d\tau,$$

где $h_{n-1}(y_1, ..., y_n)$ – квадратичная форма, введенная выше.

Перейдем к пределу в обеих частях последнего равенства. Тогда в силу (3.5) и $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$, будем иметь:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) y_n^2(t) = \lim_{t\to\infty} y_n^2(t) \int\limits_0^t \frac{h_{n-1}(x_1(\tau), ..., x_n(\tau))}{y_n(\tau)}\, d\tau = 0. \tag{3.6}$$

Здесь возможны две ситуации:

$$1) \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{h_{n-1}(y_1(\tau),...,y_n(\tau))}{y_n(\tau)}\,d\tau = const \neq \infty;$$

$$2) \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{h_{n-1}(y_1(\tau),...,y_n(\tau))}{y_n(\tau)}\,d\tau = \pm\infty.$$

В первом случае из сходимости несобственного интеграла следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h_{n-1}(y_1(t),...,y_n(t))}{y_n(t)} = 0,$$

и так как $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} h_{n-1}(y_1(t)...,y_n(t)) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} y_n^2(t) h_{n-1}(y_1(t),...,y_n(t)) = 0. \tag{3.7}$$

Во втором случае равенство (3.6) может быть переписано так:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(\int\limits_0^t \frac{h_{n-1}(y_1(\tau),...,y_n(\tau))}{y_n(\tau)}\,d\tau\right)/(1/y_n^2(t))\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0.$$

Применяя правило Лопиталя к последнему пределу, будем иметь:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{h_{n-1}(y_1(t),...,y_n(t))}{y_n(t)}\right)/(-2\dot{y}_n(t)/y_n^3(t))\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{y_n^2(t) h_{n-1}(y_1(t),...,y_n(t))}{-2\dot{y}_n(t)} = 0. \tag{3.8}$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{y}_n(t) = 0$, то из (3.8) следует (3.7).

В силу отрицательной определенности формы $h_{n-1}(\mathbf{y})$ предел (3.7) имеет вид:

$$-\lim_{t\to\infty}\left((\sum_{i=1}^n d_{1i} y_i(t) y_n(t))^2 + ... + (\sum_{i=1}^n d_{ni} y_i(t) y_n(t))^2)\right) = 0,$$

где d_{ij} — некоторые действительные числа.

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}(\sum_{i=1}^n d_{1i} y_i(t) y_n(t)) = 0, ..., \lim_{t\to\infty}(\sum_{i=1}^n d_{ni} y_i(t) y_n(t)) = 0$$

или, в матричной форме, имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} d_{11} & ... & d_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ d_{n1} & ... & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) y_n(t) \\ \vdots \\ y_n(t) y_n(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.9}$$

В силу отрицательной определенности формы $h_{n-1}(\mathbf{y})$, строки матрицы D в (3.9) (с элементами d_{ij}) должны быть линейно независимы. Тогда $\det D \neq 0$ и из (3.9) немедленно следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t)y_n(t) = 0;\ i = 1, ..., n$.

2) $\Rightarrow$ *1)*. Без потери общности систему (2.1) можно рассматривать как систему, приведенную к форме (2.3). Теперь предположим, что $y_{n0} \neq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t)y_n(t) = 0$ и функция $y_i(t)y_n(t)$ не имеет сингулярных точек на интервале $[0, \infty)$; $i = 1, ..., n$.

Пусть $y_{n0} > 0$. Тогда в соответствии с леммой 1 $\forall t \in [0, \infty)$, имеем $y_n(t) > 0$. Следовательно, для достаточно больших $t > 0$ функция $y_n(t)$ убывающая и потому $\dot{y}_n(t) < 0$. Теперь, если мы вернемся к последнему уравнению системы (2.3) и формуле (3.2), то из этих соотношений и условия $\dot{y}_n(t) < 0$ для достаточно больших $t > 0$ следует, что $z_n(t) < 0$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$ и функция $y_n(t)$ не имеет сингулярных точек, то отсюда следует, что функции $z_n(t)$ и $z(t)$ также не имеют таких точек. Следовательно, возможны два случая: 1) $\lim\limits_{t\to\infty} z_n(t) = \lim\limits_{t\to\infty} z(t) = -\infty$, и 2) $\lim\limits_{t\to\infty} z_n(t) = d_n \leq 0 (\neq -\infty)$.

Предположим, что имеет место случай 2). Тогда, воспользовавшись правилом Лопиталя, получим:

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{y_i(t)}{y_n(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{y_i(t)y_n(t)}{y_n^2(t)} = \left(\frac{0}{0}\right) = z_i^*; i = 1, ..., n-1.$$

В этом случае, при условии $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$, система (2.3) может быть сведена к системе

$$G_1(z_1, ..., z_{n-1}) = ... = G_{n-1}(z_1, ..., z_{n-1}) = 0. \tag{3.10}$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} z_n(t) = 2c_{1n} \lim_{t\to\infty} z_1(t) + ... + 2c_{n-1,n} \lim_{t\to\infty} z_{n-1}(t) + c_{nn} =$$
$$= 2c_{1n}z_1^* + ... + 2c_{n-1,n}z_{n-1}^* + c_{nn} = d_n \neq -\infty,$$

мы получаем, что система (3.10) имеет одно решение $(z_1^*, ..., z_{n-1}^*) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Далее, так как $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$, $y_n(t) > 0$ и $d_n \leq 0$, то из (3.2) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} y_{n0} \int\limits_0^t (z(\tau) + c_{nn})\, d\tau = -\infty.$$

Поэтому для достаточно больших t функция $y_{n0}(z(t)+c_{nn})$ должна быть убывающей и отрицательной. Значит, условие $y_{n0}\dot{z}(t) = y_{n0}G(z_1, ..., z_{n-1})y_n(t) < 0$ необходимо удовлетворено. Так как $y_{n0}y_n(t) > 0$, то функция $G(z_1, ..., z_{n-1})$ должна быть отрицательной и, следовательно, $G(z_1, ..., z_{n-1}) \neq 0\ \forall (z_1, ..., z_{n-1})$. Это противоречит заключению, сделанному выше о том, что существуют вещественные решения системы (3.10). Следовательно, случай 2) невозможен. Напротив, случай 1) имеет место, и, как показано выше, $\forall (z_1, ..., z_{n-1})$ условие $G(z_1, ..., z_{n-1}) < 0$ должно быть удовлетворено. Последнее неравенство в терминах форм эквивалентно отрицательной определенности формы $h_{n-1}(\mathbf{y})$. Это завершает доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1) и теоремы 3. $\square$

Обозначим через $\mathbb{Y}_i$ линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности i, порожденное всеми векторами $\mathbf{y}_i = (y_1, ..., y_i, 0, ..., 0)^T; i = 1, ..., n$.

Построим цепочку включений $0 = \mathbb{Y}_0 \subset \mathbb{Y}_1 \subset ... \subset \mathbb{Y}_{n-1} \subset \mathbb{Y}_n = \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}|_{\mathbb{Y}_i}$ ограничение оператора $\mathbf{W}$ на подпространство $\mathbb{Y}_i$. Легко проверить, что $\mathbf{W}(\mathbb{Y}_i) = \mathbb{Y}_i; i = 1, ..., n$.

Введем треугольные системы:

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_i(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{W}_i(\mathbf{y}_i(t)) = \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), ..., y_i(t), 0, ..., 0) \\ \vdots \\ U_{2i}(y_1(t), ..., y_i(t), 0, ...0) \end{pmatrix}; \; i = 1, ..., n. \quad (3.11)$$

(Очевидно, что при $i = n$ система (3.11) совпадает с системой (2.3).)

По аналогии с системой (2.3) введем формы $h_{i-1}(\mathbf{y}_i)$ для систем (3.11); $i = 2, ..., n$. (Здесь $h_{n-1}(\mathbf{y}_n) \equiv h_{n-1}(\mathbf{y})$).

Теорема 4. *Пусть $n > 1$. Предположим, что для треугольной системы (2.3) $y_{n0} \neq 0$ и*

1) $\forall i \in \{2, ..., n\}$ квадратичная форма $h_{i-1}(\mathbf{y}_i)$ отрицательно определена;

2) для $i = 2$ (это будет система (2.4)) $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$.

Тогда любая траектория $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ системы (2.3) является гомоклинической орбитой и положение равновесия 0 представляет собой единственный аттрактор (глобальный) этой системы.

Доказательство. Покажем, что все решения $y_1(t), ..., y_n(t)$ системы (2.3) ограничены на $[0, \infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$; $i = 1, ..., n$.

Из теоремы 3 следует, что любое решение $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_n(t)$ системы (2.3) при $t \to \infty$ переходит из многообразия $\mathbb{R}^n = \mathbb{Y}_n$ на инвариантное многообразие $\mathbb{Y}_{n-1}$ меньшей размерности. (Последняя координата вектора $\mathbf{y}(t)$ стремится к нулю.) Так же, как и для системы (2.3), мы можем показать, что решения $\mathbf{y}_i$ системы (3.11) ограничены для $i = n$, $i = n - 1$ и так далее.

В результате мы сведем доказательство к случаю системы (2.4). Условия ограниченности решений этой системы указаны в [23]; неравенство $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$ является следствием этих условий.

Теперь мы изменим знак времени: $t \to -t$. Тогда система (2.3) перейдет в систему

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = -\mathbf{W}(\mathbf{y}(t)) = -\begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), ..., y_n(t)) \\ \vdots \\ U_{2n}(y_1(t), ..., y_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Ясно, что для системы (3.12) условия 1) и 2) теоремы 4 выполнены. Следовательно, если $y_{n0} \neq 0$, то для любого решения $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ системы (3.12) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0) = 0$. В условиях теоремы 4 системы (2.3) и (3.12) имеют единственное положение равновесия $\mathbf{y}_e = 0$, то есть $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0) = 0$. Это завершает доказательство теоремы 4. □

4. Гомоклинические и гетероклинические орбиты системы (1.1)

Предположим, что существует обратимое линейное преобразование $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, сводящее систему (2.1) к системе (2.3). Применяя преобразование S к системе (1.1), будем иметь:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = C\mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t),...,y_n(t)) \\ \vdots \\ U_{2n}(y_1(t),...,y_n(t)) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $C = S^{-1}AS$ и $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)$.

Теорема 5. *Пусть $n > 1$. Предположим, что для треугольной системы (2.3) выполнены условия 1) и 2) теоремы 4. Если одномерное пространство $\mathbb{Y}_1$ не является собственным вектором матрицы C или $\mathbf{y}(0) \notin \mathbb{Y}_1$, тогда для любых начальных данных все решения системы (4.1) ограничены.*

Доказательство. 1. Предположим, что матрица C в системе (4.1) может быть приведена к вещественной диагональной форме

$$P = HCH^{-1} = \mathrm{diag}\,(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

с помощью подходящего обратимого преобразования $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Введем новую переменную $\mathbf{z}$ в систему (4.1) по формуле $\mathbf{y} = H^{-1}\mathbf{z}$, где $\mathbf{z}^T = (z_1,...,z_n)$. Тогда будем иметь:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = P\mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{z}^T(t)L_1\mathbf{z}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^T(t)L_1\mathbf{z}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $L_1,...,L_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметрические матрицы и $\mathbf{z}(0) = H\mathbf{y}(0)$.

Теперь заменим переменную $\mathbf{z}$ в системе (4.2) на переменную

$$\mathbf{w} = (w_1,...,w_n)^T = \Big(\frac{1}{z_1},...,\frac{1}{z_n}\Big)^T. \tag{4.3}$$

Тогда, после простых линейных преобразований, получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 w_1 \\ \vdots \\ -\alpha_n w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(w_1/w_1,...,w_1/w_n) \\ \vdots \\ L_n(w_n/w_1,...,w_n/w_n) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где $L_i(w_i/w_1,...,w_i/w_n) \equiv w_i^2\mathbf{w}^T L_i\mathbf{w}, i = 1,...,n$.

С помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных [24] находим решение системы (4.4). Это решение имеет форму:

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha_1 t)w_{10} \\ \vdots \\ \exp(-\alpha_n t)w_{n,0} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \int\limits_0^t \exp(-\alpha_1(t-\tau))L_1(w_1/w_1,..,w_1/w_n)\,d\tau \\ \vdots \\ \int\limits_0^t \exp(-\alpha_n(t-\tau))L_n(w_n/w_1,..,w_n/w_n)\,d\tau \end{pmatrix}.$$

Если с помощью формул (4.3) мы вернемся к переменным $z_1,...,z_n$, то из последней системы можно получить решения $z_1(t),...,z_n(t)$ в следующей форме:

$$\begin{cases} z_1(t) = \dfrac{z_{10}\exp(\alpha_1 t)}{1+z_{10}\int\limits_0^t \exp(\alpha_1\tau)L_1(z_1(\tau)/z_1(\tau),...,z_n(\tau)/z_1(\tau))\,d\tau}, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \\ z_n(t) = \dfrac{z_{n0}\exp(\alpha_n t)}{1+z_{n0}\int\limits_0^t \exp(\alpha_n\tau)L_n(z_1(\tau)/z_n(\tau),...,z_n(\tau)/z_n(\tau))\,d\tau}. \end{cases} \tag{4.5}$$

(Если для некоторого $k \in \{1,...,n\}$ и для некоторого $b \in [0,\infty)$ $\lim\limits_{t\to b} z_k(t) = 0$, то в формулах (4.5) мы полагаем $\lim\limits_{t\to b} z_k(t) = z_k(b) = 0$.)

Пусть $t = a > 0$ будет сингулярной точкой (полюсом) решения $z_i(t)$ системы (4.2). Тогда в силу общности системы (4.2) все оставшиеся решения $z_j(t), j \neq i; j = 1,...,n$ также имеют ту же сингулярную точку $t = a$. Известно [23, 25], что при $t \to a$ решение $z_i(t)$ системы (4.2) может быть представлено в виде: $z_i(t) \simeq (M_i + s_i(t))/(t-a)$, где $s_i(a) = 0, M_i = const \neq 0; i = 1,...,n$. Тогда, подставляя эти эквивалентности в систему (4.2) и устремляя $t \to a$, мы получим:

$$F_1(z_1,...,z_{n-1}) = 0, ..., F_{n-1}(z_1,...,z_{n-1}) = 0,$$

где $F_1(...),...,F_{n-1}(...)$ – квадратичные функции относительно неизвестного вектора $\mathbf{z} = (M_1/M_n,...,M_{n-1}/M_n)^T$. Последняя система эквивалентна системе (3.10), которая не имеет решений. Это возможно только в случае, если $a = \infty$. Другими словами, решения $z_1(t),...,z_n(t)$ не имеют сингулярных точек. (См. доказательство теоремы 3.)

Теперь перейдем к пределу в (4.5),

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{z_{i0}\exp(\alpha_i t)}{1+z_{i0}\int\limits_0^t \exp(\alpha_i\tau)L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau),...,z_n(\tau)/z_i(\tau))\,d\tau};$$

$i = 1,...,n$.

Так как для любых $i \in \{1,...,n\}$ решения $z_i(t)$ не имеют полюсов на $[0,\infty)$, то

$$\forall t \in [0,\infty)\ 1 + z_{i0}\int_0^t \exp(\alpha_i\tau)L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau),...,z_n(\tau)/z_i(\tau))\,d\tau \neq 0,$$

и, следовательно, возможны следующие три случая.

1a) $\alpha_i > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} z_i(t) = (\infty/\infty)$. Тогда, применяя правило Лопиталя к (4.5), мы получим:

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_i}{L_i\left(\dfrac{z_1(t)}{z_i(t)},...,\dfrac{z_i(t)}{z_i(t)},...,\dfrac{z_n(t)}{z_i(t)}\right)} = r_i \neq \pm\infty.$$

1b) $\alpha_i < 0$,

$$\lim_{t\to\infty}(1 + z_{i0}\int\limits_0^t \exp(\alpha_i\tau)L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau),...,z_n(\tau)/z_i(\tau))\,d\tau) = 0,$$

и $\lim\limits_{t\to\infty} z_i(t) = (0/0)$. Используя правило Лопиталя в (4.5), приходим к тому же результату, что и в случае 1a).

1c) $\alpha_i < 0$ и

$$\lim_{t\to\infty}(1 + z_{i0}\int\limits_0^t \exp(\alpha_i\tau)L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau),...,z_n(\tau)/z_i(\tau))\,d\tau) = const \neq 0.$$

В этом случае ясно, что $\lim\limits_{t\to\infty} z_i(t) = 0$.

Таким образом, во всех трех случаях вектор $\mathbf{h} = (h_1,...,h_n)^T = \lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{z}(t)$ является решением системы

$$\alpha_1 h_1 + \mathbf{h}^T L_1\mathbf{h} = 0, ..., \alpha_n h_n + \mathbf{h}^T L_n\mathbf{h} = 0,$$

и, следовательно, $\|\mathbf{z}(t)\| < \infty$.

2. Теперь мы предположим, что матрица C в системе (4.1) не может быть приведена к диагональной форме. (Это возможно в случае если матрица C имеет комплексные или кратные собственные числа.)

Пусть $a \in [0,\infty)$ – вещественный полюс кратности k. Тогда любое решение $y_i(t)$ уравнения (4.1) может быть записано как: $y_i(t) = \frac{f_i(t)}{(t-a)^k}$, $f_i(a) \neq 0$; $i = 1,...,n$. С учетом последнего равенства система (4.1) может быть представлена так:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot f_1(t)(t-a)^k - k(t-a)^{k-1}f_1(t) = (t-a)^k\sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j}f_j(t) + U_{21}(f_1(t),...,f_n(t)), \\ .\ , \\ \dot f_n(t)(t-a)^k - k(t-a)^{k-1}f_n(t) = (t-a)^k\sum\limits_{j=1}^{n} c_{nj}f_j(t) + U_{2n}(f_1(t),...,f_n(t)). \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Пусть $t \to a$. Тогда, если $k = 1$, то последняя система может быть переписана в следующей форме:

$$\left\{\begin{array}{l} -f_1(a) = U_{21}(f_1(a),...,f_n(a)), \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ -f_n(a) = U_{2n}(f_1(a),...,f_n(a)). \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Если ввести обозначения $w_1 = f_1(a)/f_n(a), ..., w_{n-1} = f_{n-1}(a)/f_n(a)$, то система (4.7) будет эквивалентна системе (3.10), которая не имеет решений. Это возможно только в случае $a = \infty$. Поэтому решения $y_1(t), ..., y_n(t)$ не имеют сингулярных точек.

Если $k \neq 1$, то система (4.6) имеет форму

$$\begin{cases} 0 = U_{21}(f_1(a), ..., f_n(a)), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \\ 0 = U_{2n}(f_1(a), ..., f_n(a)). \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f_1(a) = ... = f_n(a) = 0$, и, потому, $y_1(a) = ... = y_n(a) = 0$.

В этом случае мы применяем правило Лопиталя к функции $y_i(t)$ $k-1$ раз. Тогда получим: $\lim\limits_{t\to a} y_i(t) = \lim\limits_{t\to a} \frac{f_i^{(k-1)}(t)}{k!(t-a)}$. Подставляя последнее выражение в систему (4.1) при $t \to a$, будем иметь:

$$\begin{cases} -k!v_1(a) = U_{21}(v_1(a), ..., v_n(a)), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \\ -k!v_n(a) = U_{2n}(v_1(a), ..., v_n(a)), \end{cases} \tag{4.8}$$

где $v_i(a) = f_i^{(k-1)}(a); i = 1, ..., n$.

Ясно, что если система (4.7) не имеет решений, то система (4.8) также не имеет решений. Поэтому решения $y_1(t), ..., y_n(t)$ не имеют сингулярных точек.

3. Обозначим через $\mathbb{C}$ поле комплексных чисел. Теперь мы будем считать, что матрица P имеет диагональную структуру и может содержать элементы из $\mathbb{C}$. Пусть $\alpha_1 = r + js$, $\alpha_2 = r - js$ – два комплексно-сопряженных собственных числа матрицы P; другие собственные числа предполагаются вещественными (здесь $j = \sqrt{-1}$ мнимая единица).

В этом случае мы доказываем отсутствие полюсов у решений системы (4.2) тем же способом, как и в случаях 1, 2 или как в [23].

Если $r \neq 0$, то доказательство теоремы 5 может быть сведено к случаям 1, 2. Поэтому, предположим, что $r = 0$ и $z_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $i = 1, ..., n$. Тогда из (4.5) можно получить:

$$\begin{cases} z_1(t) = \dfrac{z_{10} \cdot (\cos(st) + j\sin(st))}{1 + z_{10} \int\limits_0^t (\cos(s\tau) + j\sin(s\tau)) L_1(z_1(\tau)/z_1(\tau), ..., z_n(\tau)/z_1(\tau))\, d\tau}, \\ z_2(t) = \dfrac{z_{20} \cdot (\cos(st) - j\sin(st))}{1 + z_{20} \int\limits_0^t (\cos(s\tau) - j\sin(s\tau)) L_2(z_1(\tau)/z_2(\tau), ..., z_n(\tau)/z_2(\tau))\, d\tau}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что для $i = 1, 2$

$$1 + z_{i0} \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t (\cos(s\tau) \pm j\sin(s\tau)) L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau), ..., z_n(\tau)/z_i(\tau))\, d\tau = 0.$$

Эти несобственные интегралы могут сходиться только если

$$\lim_{\tau\to\infty} z_1(\tau)/z_2(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} z_2(\tau)/z_1(\tau) = 0,$$

что невозможно. Следовательно, мы должны иметь: $\forall\, t \geq 0$

$$1 + z_{i0} \int\limits_0^t (\cos(s\tau) \pm j \sin(s\tau)) L_i(z_1(\tau)/z_i(\tau), ..., z_n(\tau)/z_i(\tau))\, d\tau \neq 0;\;\; i = 1, 2.$$

Таким образом, из формул для $z_1(t)$, $z_2(t)$, мы получим:

$$|z_1(t)| < K_1, \quad |z_2(t)| < K_2,$$

где $K_1 > 0, K_2 > 0$ — некоторые константы.

Из условий теоремы 5 следует, что вектор решений $\mathbf{y}(t)$ системы (4.1) для любого $t \in [0, \infty)$ не принадлежит одномерному многообразию $\mathbb{Y}_1$ и, потому, $\|\mathbf{y}(t)\| < \infty$. Предположим, что $\mathbf{y}_0 = \mathbb{Y}_1$. Тогда $\forall t > 0$ решение системы (4.1) оставляет одномерное многообразие $\mathbb{Y}_1$ и попадает в область устойчивости (это конус) системы (2.3). Последнее замечание завершает доказательство теоремы 5. $\square$

Приравняем нулю правую часть системы (4.1). Согласно [25] система алгебраических уравнений $C\mathbf{y} + \mathbf{W}(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ имеет ровно 2^n комплексных решений, включая тривиальное.

Пусть $\mathbf{e}_0, ..., \mathbf{e}_{p-1}$ — все вещественные положения равновесия системы (4.1). (Ясно, что $p = 2^k, 0 < k \leq n$.)

Теорема 6. *Пусть точка* $\mathbf{e}_0$ *является положением равновесия седлового типа. Предположим также, что* 1*-мерное подпространство* $\mathbb{Y}_1$ *не является собственным вектором матрицы* C*. Тогда в условиях теоремы 5 среди решений системы (4.1) существуют либо гомоклинические, либо гетероклинические орбиты.*

Доказательство. 1) $p = 1$. Устойчивое и неустойчивое многообразия $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ и $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ для точки $\mathbf{e}_0$ могут быть определены как

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n | \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0) = \mathbf{e}_0\},$$

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n | \lim_{t\to-\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0) = \mathbf{e}_0\}.$$

Теорема об устойчивом и неустойчивом многообразиях [26, 27] утверждает, что локально неустойчивое многообразие $\mathbb{W}^u_{loc}(\mathbf{e}_0)$ существует в некоторой окрестности точки $\mathbf{e}_0$. Кроме того, $\mathbb{W}^u_{loc}(\mathbf{e}_0)$ является гладким многообразием, касающимся неустойчивого инвариантного подпространства $\mathbb{E}^u(\mathbf{e}_0)$ матрицы $D(\mathbf{e}_0)$ в точке $\mathbf{e}_0$. (Здесь $D(\mathbf{e}_0)$ – матрица Якоби правой части системы (4.1).) Это означает, что мы можем определить глобальное неустойчивое многообразие следующим образом:

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t>0} \phi^t(\mathbb{W}^u_{loc}(\mathbf{e}_0)),$$

где ϕ^t обозначает поток системы (4.1).

Известно [26, 27], что $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ является l-мерным многообразием (l – количество собственных чисел матрицы C с положительной действительной частью), определенным как глобализация $\mathbb{W}^u_{loc}(\mathbf{e}_0)$ под действием потока ϕ^t. Заметим, что локально устойчивое многообразие $\mathbb{W}^s_{loc}(\mathbf{e}_0)$ и устойчивое многообразие $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ определяются подобным образом после операции замены знака времени $t \to -t$, а именно:

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t<0} \phi^t(\mathbb{W}^s_{loc}(\mathbf{e}_0)).$$

В соответствии с теоремой 5 решение $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ ограничено. Докажем существование гомоклинической орбиты.

Пусть $n = 3$, $l = n - 1 = 2$, $\mathbf{e}_0 = 0$ и $C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – действительный собственный вектор, соответствующий единственному вещественному отрицательному собственному числу $\lambda < 0$ матрицы C. Предположим, что $\mathbf{y}_0 \subset \mathbf{v}$ и перейдем к обратному времени $t \to -t$ в уравнении (4.1). Тогда получим уравнение

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = -C\mathbf{y}(t) - \mathbf{W}(\mathbf{y}(t)) \tag{4.9}$$

с вектором начальных данных $\mathbf{y}_0$. ($\mathbf{W}(\mathbf{y})$ имеет форму (2.3)). Рассмотрим траекторию $\mathbf{y}^-(t, \epsilon\mathbf{y}_0)$ (решение системы (4.9)), выпущенную из точки $\epsilon\mathbf{y}_0$ (она будет касаться вектора $\mathbf{v}$ в начале координат), где величина ϵ предполагается достаточно малой ($\epsilon \to 0$).

Пусть $\mathbb{H}$ будет инвариантным подпространством в $\mathbb{R}^3$ таким, что ограничение $C|_{\mathbb{H}}$ оператора C на подпространство $\mathbb{H}$ имеет собственные числа только с положительными действительными частями. Предположим, что $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ — произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{H}$.

Рассмотрим теперь траекторию $\mathbf{y}^+(t, \epsilon\mathbf{h})$ (решение системы (4.1)), выпущенную из точки $\epsilon\mathbf{h}$ (она будет касаться подпространства $\mathbb{H}$ в начале координат).

Напомним, что $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$. Пусть t^- – момент времени, для которого $y_3^-(t^-, \epsilon\mathbf{y}_0) = 0$. Аналогично, пусть t^+ – момент времени, для которого $y_3^+(t^+, \epsilon\mathbf{h}) = 0$. Далее, выберем вектор $\mathbf{h}$ (пусть это будет вектор $\mathbf{h}_0$) таким образом, чтобы $y_2^-(t^-, \epsilon\mathbf{y}_0) = y_2^+(t^+, \epsilon\mathbf{h}_0)$. И, наконец, необходимо решить относительно неизвестных элементов матрицы C (которые играют роль параметров) уравнение

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_1^-(t^-, \epsilon\mathbf{y}_0) = \lim_{\epsilon\to 0} y_1^+(t^+, \epsilon\mathbf{h}_0),$$

которое представляет собой условие "сшивания" траекторий

$$\mathbf{y}^-(t, \epsilon\mathbf{y}_0) \ \text{ и } \ \mathbf{y}^+(t, \epsilon\mathbf{h}).$$

Очевидно, что если такая матрица C существует, то множество

$$\mathbb{W}^s(0) \cap \mathbb{W}^u(0)$$

будет непустым. Это и означает, что в системе (4.1) существует гомоклиническая орбита.

Согласно теореме 5 при $C = 0$ любая траектория системы (4.1), начинающаяся из любой точки $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{v}$, является гомоклинической. Таким образом, если $C \neq 0$, то при достачно большой величине $|t|$ траектория $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ системы (4.1) находится вблизи траектории системы (2.3) и потому приближается к точке $\mathbf{e}_0$ либо по устойчивому (при $t > 0$), либо по неустойчивому (при $t < 0$) многообразию. Так как в системе (4.1) нет других положений равновесия, кроме точки $\mathbf{e}_0$, то можно утверждать о наличии гомоклинической орбиты.

2) $p > 1$ и все положения равновесия — точки седлового типа. В этом случае любая траектория системы, начинающаяся вблизи точки $\mathbf{e}_i$, либо вернется к этой же точке через некоторое время (гомоклиничекая орбита), либо приблизится к другой точке $\mathbf{e}_j$. Если при замене знака времени траектория, начинающаяся вблизи точки $\mathbf{e}_j$, вернется к точке $\mathbf{e}_i$, то это означает наличие гетероклинической траектории, связывающей точки $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$.

Пусть теперь при $t > 0$ траектория, выйдя из некоторой окрестности точки $\mathbf{e}_i$, пойдет по направлению к точке $\mathbf{e}_j$, а при $t < 0$ траектория, выйдя из некоторой окрестности точки $\mathbf{e}_j$, пойдет по направлению к точке $\mathbf{e}_k$ $(k \neq i)$ и так далее. В силу гомоклиничности решений системы (2.3) (все решения, стартующие из любой точки $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{v}$, при $t \to \pm\infty$ заканчиваются в точке $\mathbf{e}_0$) и отсутствия других положений равновесия, кроме седловых, найдется точка $\mathbf{e}_{j_m}, j_m \leq p$, замыкающая гетероклинический контур. Другими словами, при $t > 0$ имеем траекторию

$$\mathbf{e}_{i_1} \to \mathbf{e}_{i_2} \to \ldots \to \mathbf{e}_{i_m},$$

а при $t < 0$ – траекторию $\mathbf{e}_{j_1} \to \mathbf{e}_{j_2} \to \ldots \to \mathbf{e}_{j_m}$, где $i_1 = j_m$ и $i_m = j_1$. Соединение этих двух траекторий и дает гетероклиническую орбиту

$$\mathbf{e}_{i_1} \to \mathbf{e}_{i_2} \to \ldots \to \mathbf{e}_{i_m} = \mathbf{e}_{j_1} \to \mathbf{e}_{j_2} \to \ldots \to \mathbf{e}_{j_m} = \mathbf{e}_{i_1}.$$

3) $p > 1$ и среди положений равновесия кроме седловых встречаются также устойчивые или неустойчивые положения равновесия.

Предположим, что точка $\mathbf{e}_1$ представляет неустойчивое положение равновесия. Ясно, что при $t > 0$ траектория, начавшаяся вблизи точки $\mathbf{e}_0$ и уходящая от нее по неустойчивому многообразию, должна со временем вернуться в окрестность этой же точки по ее устойчивому многообразию. Если же $t < 0$, то, вообще говоря, траектория будет приближаться к точке $\mathbf{e}_1$ (и удаляться от точки $\mathbf{e}_0$) по неустойчивому многообразию. Однако, согласно теореме Гробмана–Хартмана [27], существует окрестность точки $\mathbf{e}_0$, топологически эквивалентная некоторой окрестности этой же точки для линейной системы $\dot{\mathbf{y}}(t) = -C\mathbf{y}(t)$. Точка $\mathbf{e}_0$ является положением равновесия седлового типа. Следовательно, должна существовать траектория, приближающаяся к этой точке (при $t < 0$) по ее неустойчивому многообразию. В силу ограниченности любой траектории системы (4.1) это означает наличие у точки $\mathbf{e}_0$ гомоклинической орбиты. Перенесение последнего результата на пространства размерности $n > 3$ очевидно. Это и завершает доказательство теоремы 6. $\square$

5. Примеры

В следующих примерах 1 – 4 выполняются условия теоремы 6 и теорем 1 или 2. Следовательно, во всех этих системах присутствует хаотический аттрактор.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -3y_1(t) + 2y_1^2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t) + 2y_1(t)y_2(t) + y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_2(t) = 1y_2(t) + 30y_3(t) - y_1^2(t) + y_2^2(t) - y_3^2(t) + 2y_1(t)y_2(t) + y_2(t)y_3(t), \\ \dot{y}_3(t) = y_1(t) - 30y_2(t) + 1y_3(t) + 2y_1(t)y_3(t) + 3y_2(t)y_3(t) + y_3^2(t). \end{cases} \tag{5.1}$$

Среди четырех положений равновесия последней системы присутствуют три седло-фокуса:

$$(0,0,0)^T, \ (-14.7552, 12.0166, 15.9651)^T \ \text{ и } \ (3.8395, -19.1331, 20.4123)^T,$$

и один неустойчивый фокус $(1.4143, 0.0553, 0.0604)^T$.

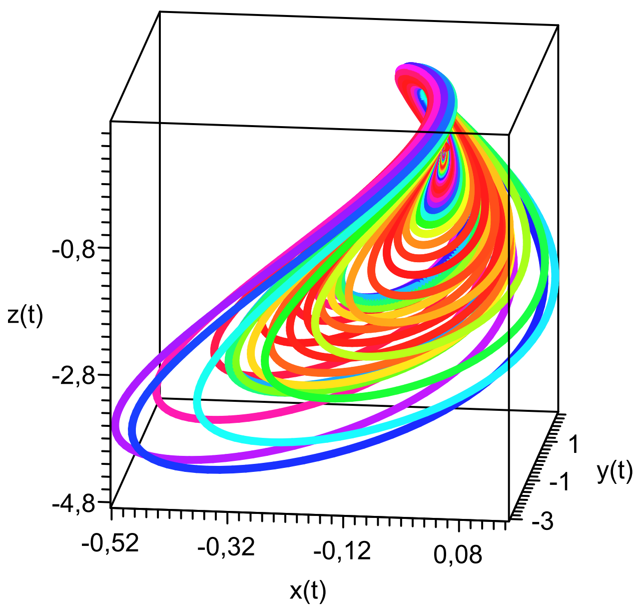

Рис. 1. Фазовый портрет системы (5.1) для $t = 40$

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -0.05y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 0.02y_2(t) + 4y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = 0.1y_1(t) - 4y_2(t) + 0.02y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t). \end{cases} \tag{5.2}$$

В этой системе присутствуют два седло-фокуса:

$$(0,0,0)^T \quad \text{и} \quad (0.8090, 1.1378, -1.6758)^T,$$

и два неустойчивых фокуса: $(-0.8376, -1.6932, -2.8030)^T$ и $(0.0057, 0.0001, -0.0000)^T$.

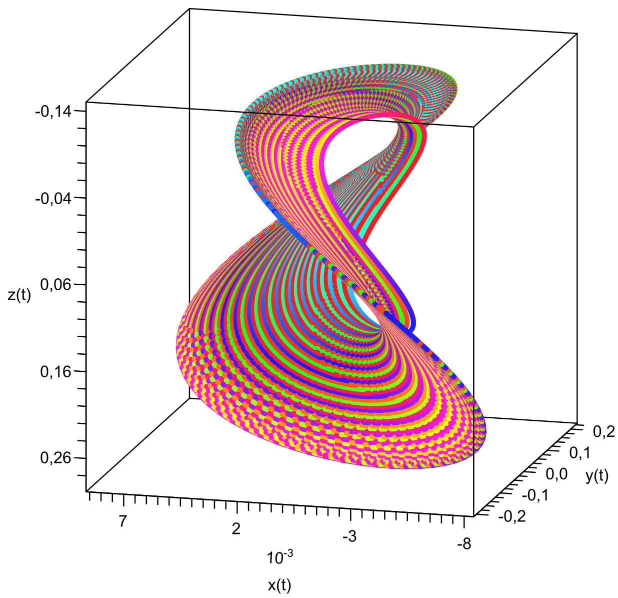

Рис. 2. Фазовый портрет системы (5.2) для $t = 100$

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -0.7y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 0.2y_2(t) - 20y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = y_1(t) + 20y_2(t) + 0.2y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t). \end{cases} \tag{5.3}$$

Система (5.3) имеет четыре положения равновесия:

$$(0,0,0)^T \quad (\text{седло}), \quad (0.0745, -0.0037, -0.0002)^T \quad (\text{неустойчивый фокус}),$$

$$(-4.1638, -5.9069, 8.5266)^T \quad (\text{седло}) \text{ и}$$

$$(4.0954, 8.4400, 14.1305)^T \quad (\text{устойчивый фокус}).$$

На рисунках 3,4 показана эволюция траектории в сингулярном аттракторе вокруг нулевого положения равновесия в системе (5.3).

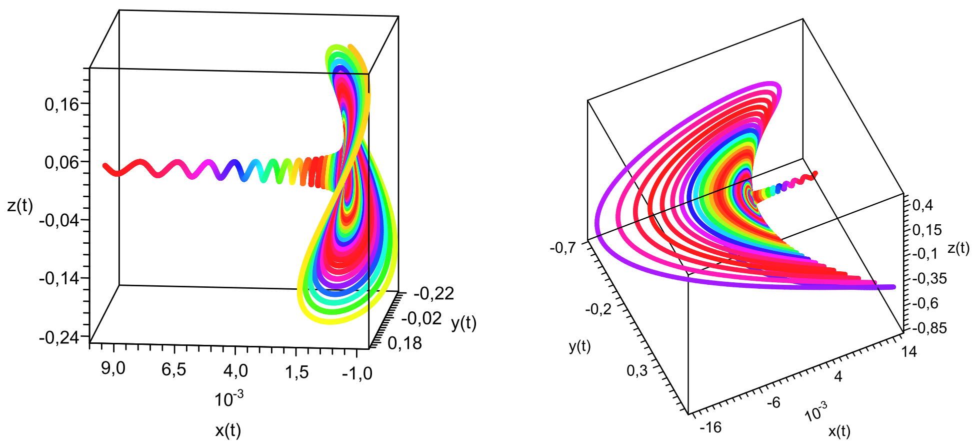

Рис. 3. Фазовые портреты системы (5.3) при $t = 15$ и $t = 20$.

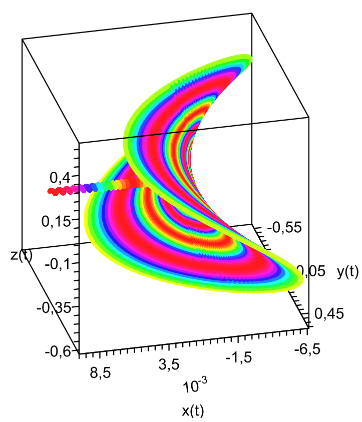

Рис. 4. Фазовый портрет системы (5.3) при $t = 30$.

4. Следующая система

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -7y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 3y_2(t) - 20y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = y_1(t) + 20y_2(t) + 3y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t) \end{cases} \tag{5.4}$$

является модификацией системы (5.3). Здесь коэффициент при y_1 изменен с -0.7 на -7; коэффициент 0.2 при y_2 и y_3 был заменен коэффициентом 3 (начальные условия сохранены). Система (5.4) имеет четыре положения равновесия: $(0,0,0)^T$ (седло), $(0.7523, -0.0288, -0.0165)^T$ (неустойчивый фокус), $(-5.1700, -7.2022, 8.5445)^T$ (седло) и $(3.4382, 7.8559, 13.9812)^T$ (устойчивый фокус).

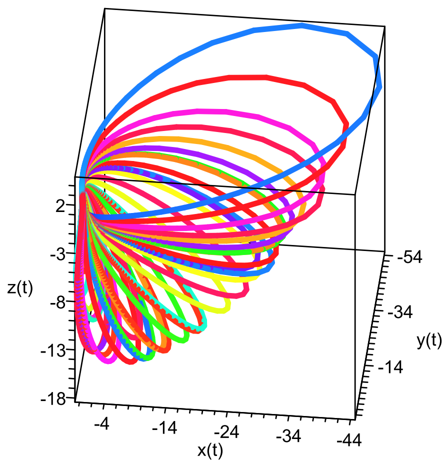

Рис. 5. Фазовый портрет системы (5.4) при $t = 20$

5. Приведем еще пример квадратичной системы, удовлетворяющей теореме 6, но не удовлетворяющей условиям теоремы 1.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 2y_1(t) - 20y_3(t) + 3y_1^2(t) - 2y_2^2(t) - y_3^2(t) - 2y_2(t)y_3(t) - 2y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_2(t) = -0.5y_2(t) + 4y_2^2(t) + y_3^2(t) + 8y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t)y_3(t) + 4y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_3(t) = 20y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) + 4y_1(t)y_3(t) + 2y_2(t)y_3(t) + y_3^2(t). \end{cases} \tag{5.5}$$

Эта система имеет два положения равновесия: $(0,0,0)^T$ и $(-0.0067, 0.1410, -0.0026)^T$. При этом точка $(0,0,0)^T$ является единственным седло-фокусом, а точка $(-0.0067, 0.1410, -0.0026)^T$ является неустойчивым фокусом.

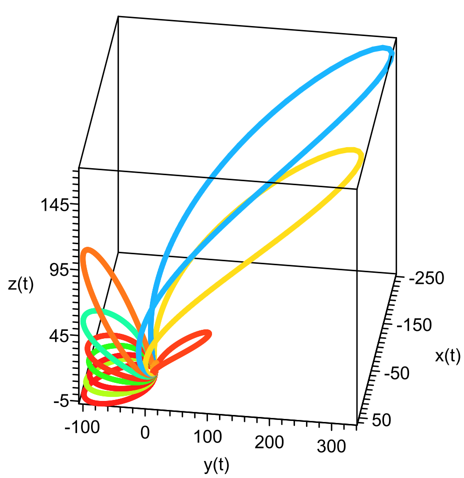

Рис. 6. Фазовый портрет системы (5.5) при $t = 10$

6. Заключение

Как показывают приведенные примеры, во всех случаях в системах наблюдается только хаос гомоклинического типа. Очевидно, это связано с тем, что однородная система (2.3) является системой гомоклинического типа. Кроме того, как показывают некоторые примеры, хаос может наступить и в системах, для которых не выполняются условия теорем 1 или 2. Это говорит о том, что в указанных системах могут существовать другие сценарии перехода к хаосу, отличные от бифуркаций гомоклинических и гетероклинических петель сепаратрисс.

Библиографические ссылки

1. *Wang X.F., Chen G.* Chaotification via arbitrarily small feedback controls: Theory, method, and applications // Int. J. Bifur. Chaos, 2000. – Vol. 10. – P. 549 – 570.
2. *Tang K.S., Man K.F., Zhong G.Q., Chen G.* Generating chaos via $x|x|$ // IEEE Trans. Circ. Syst.-I, 2001. – Vol. 48. – P. 636 – 641.
3. *Wang X.F., Chen G.* Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control // IEEE Trans. Circ. Syst.-I, 2000. – Vol. 47. – P. 410 – 415.
4. *Wang X.F., Chen G., Yu X.* Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delayed feedback // Int. J. Bifur. Chaos, 2000. – Vol. 10. – P. 771 – 779.
5. *Shang D., Han M.* The existence of homoclinic orbits to saddle-focus // Applied Mathematics and Computation, 2005. – Vol. 163. – P. 621 – 631.
6. *Li Z., Chen G., Halang W. A.* Homoclinic and heteroclinic orbits in a modified Lorenz system // Information Sciences, 2004. – Vol. 165. – P. 235 – 245.
7. *Li Y. C.* Existence of Chaos in Evolution Equations, Mathematical and Computer Modelling, 2002. – Vol. 36. – P. 1211 – 1219.
8. *Li X.-F., Chlouverakis K. E., Xu D.-L.* Nonlinear dynamics and circuit realization of a new chaotic flow: A variant of Lorenz, Chen and Lu // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009. – Vol. 10. – P. 2357 – 2368.
9. *Lu Q.* Codimension 2 bifurcation of twisted double homoclinic loops // Computers and Mathematics with Applications, 2009. – Vol. 57. – P. 1127 – 1141.
10. *Wanga J., Zhaoa M., Zhanga Y., Xiong X.* Shilnikov-type orbits of Lorenz-family systems // Physica A, 2007. – Vol. 375. – P. 438 – 446.
11. *Huanga D., Zhangb L.* Dynamics of the Lorenz–Robbins system with control // Physica D, 2006. – Vol. 218. – P. 131 – 138.
12. *Zhou T., Chen G., Yang Q.* Constructing a new chaotic system based on the Shilnikov criterion // Chaos, Solitons and Fractals, 2004. – Vol. 19. – P. 985 – 993.
13. *Li T.-C., Chen G., Tang Y.* On stability and bifurcation of Chen's system // Chaos, Solitons and Fractals, 2004. – Vol. 19. – P. 1269 – 1282.
14. *Liu C., Liu T., Liu L., Liu K.* A new chaotic attractor // Chaos, Solitons and Fractals, 2004. – Vol. 22. – P. 1031 – 1038.
15. *Buzzi C.A., Llibre J., Medradoc J. C.* Periodic orbits for a class of reversible quadratic vector field on $\mathbb{R}^3$ // J. Math. Anal. Appl., 2007. – Vol. 335. – P. 1335 – 1346.
16. *Zhou T., Chen G.* Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems-I. Basic framework and methods // Int. J. Bifur. Chaos, 2006. – Vol. 16. – No. 9. – P. 2459 – 2479.
17. *Mello L.F., Messias M., Braga D.C.* Bifurcation analysis of a new Lorenz-like chaotic system // Chaos, Solitons and Fractals, 2008. – Vol. 37. – P. 1244 – 1255.
18. *Chen Z., Yang Y., Yuan Z.* A single three-wing or four-wing chaotic attractor generated from a three-dimensional smooth quadratic autonomous system // Chaos, Solitons and Fractals, 2008. – Vol.38. – P. 1187 – 1196.

19. *Qi G., Chen G., van Wyk M.A., van Wyk B. J., Zhang Y.* A four-wing chaotic attractor generated from a new 3-D quadratic autonomous system // Chaos, Solitons and Fractals, 2008. – Vol. 38. – P. 705 – 721.
20. *Zhou T., Chen G, Yang Q.* Constructing a new chaotic system based on the Shilnikov criterion // Chaos, Solitons and Fractals, 2004. – Vol. 19. – P. 985 – 993.
21. *Yu P., Liao X.* Globally Attractive and Positive Invariant Set of the Lorenz System // Int. J. Bifur. Chaos, 2006. – Vol. 16. – No. 3. – P. 757 – 764.
22. *Silva C.P.* Shilnikov's Theorem – A tutorial // IEEE Trans. Circuit Systems, 1993. – Vol. 40. – P. 675 – 682.
23. *Belozyorov V. Ye.* Invariant Approach to an Existence Problem of Nontrivial Asymptotic Stability Cone // Canadien Applied Mathematics Quarterly, 2007. – Vol. 15. – No. 2. – P. 125 – 168.
24. *Khalil H.* Nonlinear Systems: Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New-Jersey, 1996.
25. *Belozyorov V. Ye.* Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2002. – Vol. 12. – No. 4. – P. 493 – 511.
26. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, 2nd edition, Springer-Verlag, New-York, 1986.
27. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory, 2nd edition, Springer-Verlag, New-York, 1998.

Надійшла до редакції 15.04.2010