ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2010. Вип. 2. С. 73–89

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.91

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ФИЛЬТРОВ

В. А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск, 49050.

Рассматриваются нелинейные краевые задачи теории фильтрования. Дополнительная особенность этих краевых задач состоит в том, что уравнения содержат переменные коэффициенты. Каждая краевая задача преобразована к двум самостоятельным краевым задачам Гурса для концентрации сорбата в растворе и концентрации сорбата, поглощаемого сорбентом. Каждая из таких задач решается методом, подобным методу Пуанкаре. При этом каждая из возникающих краевых задач Гурса для коэффициентов асимптотических разложений решается методом Римана. Применение метода Римана требует построения функции Римана для каждой из двух задач Гурса. Однако для построения функции Римана в явном виде требуется существование такого преобразования искомых функций, которое позволяет привести сопряженное уравнение к уравнению специального вида. Если такое преобразование существует для обеих задач Гурса, задача может быть решена до конца. С целью расширения класса задач, решаемых этим методом, предложен подход, позволяющий получать решение задачи в целом при условии, что только для одной из двух задач Гурса удается построить функцию Римана. Таким методом получены явные выражения для асимптотических разложений решений рассмотренных нелинейных задач теории фильтрования.

Ключевые слова. Задача фильтрования, нелинейные уравнения, переменные коэффициенты, асимптотическое разложение.

Введение

Система уравнений динамики сорбции (точнее, адсорбции) состоит из двух дифференциальных уравнений с частными производными. Первое из них строится на основании закона сохранения количества вещества, находящегося в фильтруемом растворе, и количества вещества, поглощенного (сорбированного) фильтром. При этом предполагается, что раствор протекает по трубе с площадью поперечного сечения S, заполненной сорбентом, со скоростью V. Ось трубы направлена по оси x, раствор входит в трубу в ее поперечном сечении $x = 0$ (см. рис. 1). Концентрация фильтруемого вещества, поглощаемого фильтром, $\varrho(x,t)$, в начальный момент времени $t = 0$ задана. Задана также концентрация фильтруемого вещества $C(x,t)$ в растворе на входе в трубу в любой момент времени $t > 0$. Таким образом, заданы следующие краевые условия:

$$C(0,t) = \varphi(t),\ t > 0;\quad \varrho(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$$

Далее рассматривается уравнение баланса фильтруемого вещества в элементе трубы, заключенном между ее поперечными сечениями $x = x$ и $x = x + dx$. Количество фильтруемого вещества, поступающего в этот элемент в течение интервала времени dt, равно

$$Q_1 = [(CVS)|_{x=x} - (CVS)|_{x=x+dx}]dt.$$

Часть фильтруемого вещества будет поглощена фильтром, другая часть будет оставаться в растворе. Поэтому в элементе $[x, x + dx]$ трубы в течение интервала времени длиной dt будет находиться следующее количество раствора:

$$Q_2 = [(S(\varrho + C))|_{t=t+dt} - ((S(\varrho + C))|_{t=t}]dx.$$

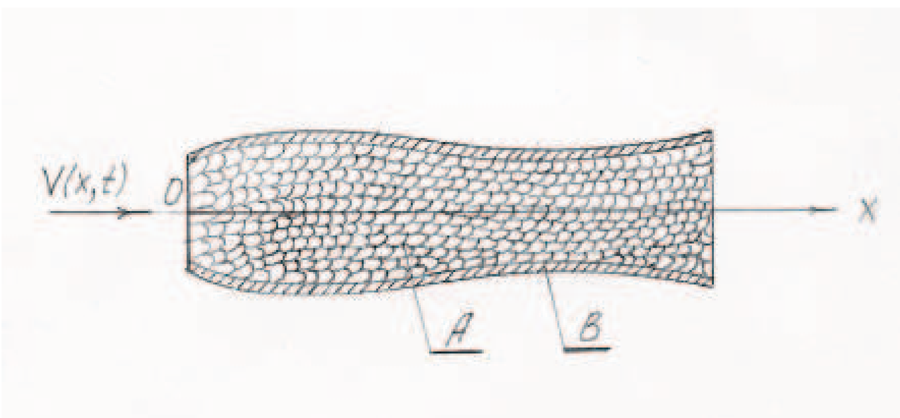

Рис. 1. Схема фильтра. A — сорбент, B — труба

Из условия сохранения количества фильтруемого вещества в элементе $[x, x + dx]$ трубы следует равенство $Q_1 = Q_2$. Подставляя в это равенство вычисленные значения Q_1 и Q_2 и применяя теорему о среднем значении, получаем:

$$-\frac{\partial(CVS)}{\partial x}\bigg|_{x=x+\theta dx} dxdt = \frac{\partial S(\varrho + C)}{\partial t}\bigg|_{t+t+\theta_1 dt} dxdt,$$

откуда после сокращения на dx и dt и перехода к пределу при $dx \to 0$; $dt \to 0$ следует уравнение сохранения количества фильтруемого вещества:

$$-\frac{\partial(CVS)}{\partial x} = \frac{\partial S(\varrho + C)}{\partial t}.$$

Второе уравнение из системы дифференциальных уравнений фильтрования строится исходя из анализа процесса поглощения фильтруемого элемента сорбентом. Этот процесс описывается уравнением кинетики сорбции, которое на основании экспериментальных данных представляется в виде:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \beta(C + a),$$

где β — кинетический коэффициент, a — концентрация сорбата при адсорбционном равновесии. В дальнейшем исключают a из последнего уравнения с помощью изотерм сорбции. Эти изотермы сорбции достаточно разнообразны для различных сочетаний фильтруемого и фильтрующего веществ. Простейшей из них является изотерма Генри

$$\varrho = \frac{1}{\gamma} a,$$

где $\frac{1}{\gamma}$ — коэффициент Генри. Достаточно часто используется изотерма Лэнгмюра вида

$$\varrho = \frac{ka}{1 + ka}$$

с коэффициентом k, зависящим также от температуры. Другие изотермы сорбции имеют существенно более сложные зависимости между ϱ и a. Изложенное позволяет сделать вывод о том, что в общем случае система уравнений сорбции оказывается нелинейной и, кроме того, коэффициенты в этой системе будут переменными, например при непостоянной скорости движения раствора вдоль фильтра, переменной площади поперечного сечения фильтра, при переменном кинетическом коэффициенте и так далее. В то же время до настоящего времени получены решения лишь ограниченного количества задач фильтрования. Прежде всего, следует отметить решение линеаризованной задачи сорбции [1], в которой все параметры были приняты постоянными и использована линейная изотерма Генри. Позднее было получено асимптотическое разложение нелинейной задачи сорбции [2, 3] и доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим. Однако коэффициенты уравнений сорбции в этой работе рассматривались как постоянные. В современной практике достаточно часто используются фильтры с нелинейными характеристиками. Установлено также, что наибольшую эффективность фильтрования обеспечивают фильтрующие элементы, параметры которых изменяются вдоль фильтра. Кроме того, по мере насыщения сорбентов удерживаемыми частицами отфильтрованных веществ их параметры также изменяются. Иными словами, происходит изменение свойств фильтрующих элементов во времени. Поэтому исследование фильтров с переменными во времени и пространстве параметрами, имеющих к тому же нелинейные характеристики, представляет важную для практического применения задачу.

1. Постановка задачи

В этой связи рассматривается следующая краевая задача теории фильтрования. В области $x > 0;\ t > 0$ найти решение системы уравнений

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho(x,t) + \nu(x,t)C(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho(x,t) + \beta(x,t)C(x,t) + \varepsilon f(x,t,\varrho,C), \quad (1.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$C(0,t) = \varphi(t),\ t > 0; \quad \varrho(x,0) = \psi(x),\ x > 0. \quad (1.2)$$

Здесь $C(x,t)$ и $\varrho(x,t)$ соответственно концентрация и плотность фильтруемого вещества, ε — малый параметр. Предполагается, что выполнены условия согласования краевых условий, то есть

$$\varphi(0) = \psi(0). \quad (1.3)$$

Предполагается также, что функция $f(x,t,\varrho,C)$ является либо аналитической относительно аргументов ϱ и C в окрестности порождающего решения $\varrho_0(x,t)$, $C_0(x,t)$ либо, по крайней мере, может быть представлена по формуле Тейлора для некоторого n:

$$f(x,t,\varrho,C) = (f) + (f_\varrho)(\varrho - \varrho_0) + (f_C)(C - C_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}(f_{\varrho\varrho})^2 + \frac{1}{2!}(f_{CC})(C - C_0)^2 + (f_{\varrho C}(\varrho - \varrho_0)(C - C_0) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}(f_C^{(n)})(C - C_0)^n + R(x,t,\varrho,C). \quad (1.4)$$

Здесь $R(x,t,\varrho,C)$ — остаточный член формулы Тейлора, обладающий свойствами

$$R(x,t,\varrho,C) = o((\varrho - \varrho_0)^n), \quad (\varrho - \varrho_0) \to 0;$$
$$R(x,t,\varrho,C) = o((C - C_0)^n, \quad (C - C_0) \to 0. \quad (1.5)$$

Заключение функции f и ее производных в скобки означает

$$(f) = f(x,t,\varrho_0,C_0).$$

Заметим, что в первом уравнении (1.1) также может в принципе присутствовать нелинейное слагаемое с малым параметром. К этому случаю также применима излагаемая ниже техника построения асимптотического разложения решений. Точно так же краевые условия (1.2) могут содержать дополнительные слагаемые со степенями малого параметра.

2. Асимптотическое разложение решения

Поставленная таким образом краевая задача может быть решена методом возмущений в форме разложений по малому параметру ε:

$$\varrho(x,t) = \varrho_0(x,t) + \varrho_1(x,t)\varepsilon + \varrho_2(x,t)\varepsilon^2 + \varrho_3(x,t)\varepsilon^3 + \cdots ;$$
$$C(x,t) = C_0(x,t) + C_1(x,t)\varepsilon + C_2(x,t)\varepsilon_2 + C_3(x,t)\varepsilon_3 + \cdots \quad (2.1)$$

Подставляя разложения (1.4) и (2.1) в уравнения (1.1) и приравнивая в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial C_0(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho_0(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho_0(x,t) + \nu(x,t)C_0(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho_0(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho_0(x,t) + \beta(x,t)C_0(x,t). \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial C_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho_1(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho_1(x,t) + \nu(x,t)C_1(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho_1(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho_1(x,t) + \beta(x,t)C_1(x,t) + (f). \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial C_2(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho_2(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho_2(x,t) + \nu(x,t)C_2(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho_2(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho_2(x,t) + \beta(x,t)C_2(x,t) + [(f_\varrho)\varrho_1 + (f_C)C_1]. \quad (2.4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial C_n(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho_n(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho_n(x,t) + \nu(x,t)C_n(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho_n(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho_n(x,t) + \beta(x,t)C_n(x,t) + g_n. \quad (2.5)$$

Здесь, благодаря наличию множителя ε в правой части второго уравнения (1.1), функции g_n зависят от $t, x, \varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}, C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$, но не зависят от ϱ_n и C_n. Подставляя разложения решений (2.1) в краевые условия (1.2) и приравнивая в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при одинаковых степенях ϱ, получаем:

$$C_0(0,t) = \varphi(t),\ t > 0; \quad \varrho_0(x,0) = \psi(x), \quad x > 0. \quad (2.6)$$

$$C_i(0,t) = 0,\ t > 0; \quad \varrho_i(x,0) = 0,\ x > 0, \quad i = 1,2,\ldots \quad (2.7)$$

Таким образом, для каждой пары функций ϱ_i, C_i получается достаточно однотипная система уравнений вида:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\varrho(x,t) + \nu(x,t)C(x,t);$$
$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\varrho(x,t) + \beta(x,t)C(x,t) + g. \quad (2.8)$$

3. Преобразование к задачам Гурса

Системы уравнений (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) необходимо интегрировать последовательно по мере возрастания индекса i. При этом для каждой пары таких уравнений удобно выполнить такое их преобразование, чтобы получить краевые задачи, отдельные для концентрации и плотности. С этой целью, продифференцировав систему (2.8) по t, получим:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \varrho(x,t)}{\partial t^2} + \gamma_t \varrho + \gamma \varrho_t + \nu_t C + \nu C_t;$$
$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \alpha_t \varrho + \alpha \varrho_t + \beta_t C + \beta C_t + g_t. \quad (3.1)$$

Подставив $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}$ из второго уравнения (3.1) в первое, получим:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} = (\nu - \beta) C_t + (\nu_t - \beta_t) C + (\gamma - \alpha) \varrho_t + (\gamma_t - \alpha_t) \varrho - g_t.$$

Подставляя в это равенство ϱ_t из второго уравнения (2.8), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} = (\nu - \beta) C_t + [\nu_t - \beta_t + \beta(\gamma - \alpha)] C +$$
$$+ [\gamma_t - \alpha_t + \alpha(\gamma - \alpha)] \varrho + [(\gamma - \alpha) g - g_t]. \quad (3.2)$$

В результате подстановки ϱ_t из второго уравнения (2.8) в первое получаем:

$$C_x = (\gamma - \alpha) \varrho + (\nu - \beta) C - g, \quad (3.3)$$

откуда

$$\varrho = \frac{C_x - (\nu - \beta) C + g}{\gamma - \alpha}.$$

Подставляя это последнее выражение в (3.2), получим уравнение, содержащее только C:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} = -a \frac{\partial C}{\partial x} - b \frac{\partial C}{\partial t} + cC = F_C, \quad (3.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$a = \frac{\gamma_t - \alpha_t}{\gamma - \alpha} + \alpha; \quad b = \nu - \beta; \quad F_C = \left(\frac{\gamma_t - \alpha_t}{\gamma - \alpha} + \gamma\right) g - g_t;$$
$$c = -\left[\nu_t - \beta_t + \beta(\gamma - \alpha) - (\nu - \beta)\left(\frac{\gamma_t - \alpha_t}{\gamma - \alpha} + \alpha\right)\right]. \quad (3.5)$$

Аналогично может быть получено уравнение для ϱ. С этой целью продифференцируем второе уравнение (2.8) и подставим в него значение C_x из первого уравнения (2.8). Получим:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial t} = \alpha \varrho_x - \beta \varrho_t + (\alpha_x + \beta\gamma) \varrho + (\beta_x + \beta\nu) C + g_x.$$

А так как из второго уравнения (2.8) следует

$$C = \frac{\varrho_t - \alpha\varrho - g}{\beta},$$

уравнение для ϱ будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial t} - a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x} - b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + c_1 \varrho = F_\varrho, \tag{3.6}$$

где обозначено

$$a_1 = \alpha; \quad b_1 = -(\beta - \nu - \frac{\beta_x}{\beta});$$
$$c_1 = -\left[\alpha_x + \beta\gamma - \alpha(\frac{\beta_x}{\beta} + \nu)\right]; \quad F_\varrho = -\left[(\frac{\beta_x}{\beta} + \nu)g - g_x\right]. \tag{3.7}$$

Таким образом, уравнения (3.4) и (3.6) для C и ϱ представляют собой достаточно однотипные телеграфные уравнения. Каждому из этих уравнений соответствует только одно из краевых условий (2.6) или (2.7). Однако для получения единственного решения каждого из этих уравнений одного краевого условия недостаточно. Для получения недостающего краевого условия для функции C положим в уравнении (3.3) $t = 0$ и проинтегрируем получившееся уравнение с учетом краевого условия (2.6) или (2.7) для ϱ. Его общим решением будет функция

$$C(x,0) = \exp\left(-\int_0^x [\beta(y,0) - \nu(y,0)]\,dy\right) \times$$
$$\times \left[D + \int_0^x [(\gamma(z,0) - \alpha(z,0))\psi(z) - g] e^{\left(\int_0^z [\beta(y,0) - \nu(y,0)]\,dy\right)}\,dz\right]. \tag{3.8}$$

Полагая в (3.8) $x = 0$, с учетом (1.3) получаем $D = \psi(0)$. Поэтому из (3.8) окончательно получаем второе краевое условие для функции C:

$$C(x,0) = \exp\left(-\int_0^x [\beta(y,0) - \nu(y,0)]\,dy\right) \times$$
$$\times \left[\psi(0) + \int_0^x [(\gamma(z,0) - \alpha(z,0))\psi(z) - g] e^{\left(\int_0^z [\beta(y,0) - \nu(y,0)]\,dy\right)}\,dz\right]. \tag{3.9}$$

Аналогично, полагая во втором уравнении (2.8) $x = 0$ и интегрируя это уравнение, с учетом (1.3) получим недостающее краевое условие для функции ϱ:

$$\varrho(0,t) = \exp(\int_0^t \alpha(0,\tau)\,d\tau) \times$$
$$\times \left[\varphi(0) + \int_0^t [\beta(0,\tau)\varphi(\tau) + g] \exp(-\int_0^\tau \alpha(0,z)\,dz)\,d\tau\right]. \tag{3.10}$$

Таким образом, и для уравнения (3.4), и для уравнения (3.6) возникают однотипные краевые задачи Гурса с краевыми условиями, заданными на характеристиках. В самом деле, прямые $x = 0$ и $t = 0$ являются характеристиками как уравнения (3.4), так и уравнения (3.6). Для уравнения (3.4) краевыми условиями являются условие (3.9) и

$$C(0,t)=\varphi(t),\quad t>0, \tag{3.11}$$

причем для всех $C_i(0,t)$, кроме $C_0(0,t)$, необходимо полагать $\varphi(t)=0$. Для уравнения (3.6) краевыми условиями являются условие (3.10) и

$$\varrho(x,0)=\psi(x),\quad x>0, \tag{3.12}$$

причем для всех $\varrho_i(x,0)$, кроме $\varrho_0(x,0)$, необходимо полагать $\psi(x)=0$. До настоящего времени наиболее универсальным методом решения задач Гурса для телеграфных уравнений остается метод Римана. Этот метод состоит в следующем. Для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (3.6), сопряженным в смысле Лагранжа является дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+\frac{\partial(a_1v)}{\partial x}+\frac{\partial(b_1v)}{\partial t}+c_1v=0, \tag{3.13}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+a_1\frac{\partial v}{\partial x}+b_1\frac{\partial v}{\partial t}+hv=0, \tag{3.14}$$

где

$$h=\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_1. \tag{3.15}$$

Функцией Римана называется дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3.14) $v(x_0,t_0,x,t)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{gathered}v(x_0,t_0,x_0,t_0)=1;\\ -\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{x=x_0}=-a_1(x_0,t)v(x_0,t,x_0,t_0);\quad -\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{t=t_0}=-b_1(x,t_0)v(x,t_0,x_0,t_0).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Если функция Римана для уравнения (3.6) известна, то решение задачи Гурса для этого уравнения с краевыми условиями (3.10) и (3.12) в произвольной точке $(x1,t1)$ имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}u(x_1,t_1)&=u(x_0,t_0)v(x_0,t_0,x_1,t_1)+\\ &+\int_{t_0}^{t_1}v(x_0,t,x_1,t_1)[\Phi'(t)+a_1(x_0,t)\Phi(t)]\,dt+\\ &+\int_{x_0}^{x_1}v(x,t_0,x_1,t_1)[\psi'(x)+b_1(x,t_0)\psi(x)]\,dx+\\ &+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}v(x,t,x_1,t_1)F_\varrho(x,t)\,dt\,dx.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь через Φ обозначена правая часть равенства (3.10); t_0 и x_0 — те значения t, x, при которых заданы краевые условия (3.10) и (3.12); в данном случае $t_0=0$, $x_0=0$.

4. Построение функции Римана

Построение функции Римана для телеграфных уравнений общего вида (3.14) представляет собой достаточно сложную и не разрешенную до настоящего времени проблему. Однако существует такой подкласс уравнений вида (3.14), для которых функция Римана может быть построена. Речь идет о таком подклассе уравнений вида (3.14), которые преобразованием искомой функции

$$v(x,t) = w(x,t)Q(x,t) \tag{4.1}$$

могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + Hw = 0. \tag{4.2}$$

Выполнив в уравнении (3.14) преобразование (4.1), получим:

$$\begin{aligned} &Qw_{xt} + (Q_t + a_1 Q)w_x + \\ &\qquad + (Q_x + b_1 Q)w_t + (Q_{xt} + a_1 Q_x + b_1 Q_t + hQ)w = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для того чтобы уравнение (4.3) приняло вид (4.2), необходимо, прежде всего, чтобы функция Q удовлетворяла двум дифференциальным уравнениям:

$$Q_t + a_1 Q = 0; \quad Q_x + b_1 Q = 0. \tag{4.4}$$

Общее решение каждого из этих уравнений есть

$$Q(x,t) = D_1(x)\exp(-\int a_1(x,t)\,dt); \tag{4.5}$$

$$Q(x,t) = D_2(t)\exp(-\int b_1(x,t)\,dx). \tag{4.6}$$

Для того чтобы уравнения (4.4) были совместны, необходимо и достаточно чтобы выполнялось равенство

$$D_1(x)\exp(-\int a_1(x,t)\,dt) = D_2(t)\exp(-\int b_1(x,t)\,dx). \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует

$$D_1(x)\exp\left(-\int a_1(x,t)\,dt + \int b_1(x,t)\,dx\right) = D_2(t). \tag{4.8}$$

Дифференцируя равенство (4.8) по x, получаем:

$$\left[D_1'(x) + \left(-\int \frac{\partial a_1}{\partial x}\,dt + b_1\right)D_1(x)\right]e^{\left(-\int a_1(x,t)\,dt + \int b_1(x,t)\,dx\right)} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь при условии

$$D_1'(x) + \left(-\int \frac{\partial a_1}{\partial x}\,dt + b_1\right)D_1(x) = 0. \tag{4.9}$$

Общее решение уравнения (4.9) есть

$$D_1(x) = E_1 \exp\left(\int \left(\int \frac{\partial a_1}{\partial x}\, dt - b_1\right)\, dx\right). \tag{4.10}$$

Правая часть равенства (4.10) не будет зависеть от t (ибо D_1 от t не зависит), если ее производная по t будет равна нулю, то есть должно выполняться равенство

$$\int \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial t}\right)\, dx\, \exp\left(-\int a_1(x,t)\, dt + \int b_1(x,t)\, dx\right) = 0.$$

В свою очередь, последнее равенство возможно лишь при условии

$$\int \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial t}\right)\, dx = 0,$$

откуда вследствие непрерывной дифференцируемости функций a_1 и b_1 следует необходимое и достаточное условие того, чтобы однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.6), могло быть приведено к виду (4.2):

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial b_1}{\partial t}. \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует:

$$a_1(x,t) = \int \frac{\partial b_1}{\partial t}\, dx + \chi_1(t); \quad b_1(x,t) = \int \frac{\partial a_1}{\partial x}\, dt + \chi_2(x). \tag{4.12}$$

Подставляя значение b_1 из (4.12) в (4.10), получим:

$$D_1(x) = E_1 \exp\left(-\int \chi_2(x)\, dx\right).$$

Наконец, подставив в первое равенство (4.5) это значение D_1 и a_1 из (4.12), получим выражение для функции Q:

$$Q(x,t) = E_1 \exp\left(-\int \chi_1(t)\, dt - \int b_1(x,t)\, dx\right). \tag{4.13}$$

Уравнению (4.3) будет соответствовать уравнение (4.2), если

$$H = \frac{Q_{xt} + a_1 Q_x + b_1 Q_t + hQ}{Q}. \tag{4.14}$$

Подставив (4.13) в (4.14), с учетом (4.12) получим:

$$H = -\frac{\partial a_1}{\partial x} - a_1 b_1 + h.$$

Отсюда и равенств (3.15) и (4.11) следует:

$$H = \frac{\partial a_1}{\partial x} - a_1 b_1 + c_1.$$

поэтому

$$c_1 = H - \frac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1. \tag{4.15}$$

Таким образом, равенства (4.11) и (4.15) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы сопряженное с однородным уравнением, соответствующим (3.6), уравнение (3.14) могло быть преобразовано к виду (4.2). Точно таким же образом к виду (4.2) может быть преобразовано уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial t} + h_1 v = 0, \tag{4.16}$$

где

$$h_1 = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} + c, \tag{4.17}$$

сопряженное в смысле Лагранжа с однородным уравнением, соответствующим (3.4). Для этого в уравнении (4.16) необходимо выполнить преобразование (4.1). И тогда для того чтобы преобразование уравнения (4.16) к виду (4.2) было возможно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t}; \quad c = H - \frac{\partial a}{\partial x} + ab. \tag{4.18}$$

Требуемое для построения функции Римана решение уравнения (4.2) при $H = const$ отыскивается известным способом [1, 4]. С этой целью решение уравнения (4.2) ищут в форме

$$w(x,t,x_0,t_0) = w(z), \tag{4.19}$$

где

$$z = 2\sqrt{H(x-x_0)(t-t_0)}. \tag{4.20}$$

В результате выполнения преобразования (4.19) уравнение (4.2) приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка, ограниченным решением которого является функция

$$w(z) = C(x_0,t_0) J_0(z), \tag{4.21}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Поэтому, например, решение уравнения (4.2) имеет вид:

$$\begin{gathered} v(x,t,x_0,t_0) = C(x_0,t_0) J_0(2\sqrt{H(x-x_0)(t-t_0)})\times \\ \times \exp\left(-\int \chi_1(t)\,dt - \int b_1(x,t)\,dx\right). \end{gathered} \tag{4.22}$$

Из (4.22) и первого краевого условия (3.16) следует:

$$C(x_0,t_0) = \exp\left(\int \chi_1(t)\,dt + \int b_1(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}}. \tag{4.23}$$

Заметим, что для функции Q наряду с представлением (4.13) справедливо также равенство

$$Q(x,t) = E_1 \exp\left(-\int \chi_2(x)\,dx - \int a_1(x,t)\,dt\right). \tag{4.24}$$

Не слишком сложно проверить, что функция (4.22) при любом значении $C(x_0,t_0)$ удовлетворяет второму и третьему краевым условиям (3.16). Таким образом, функцией Римана для уравнения (3.6) будет функция

$$v(x,t,x_0,t_0) = \exp\left(\int \chi_1(t)\,dt + \int b_1(x,t)\,dx\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}} \times \\ \times J_0(2\sqrt{H(x-x_0)(t-t_0)})\exp\left(-\int \chi_1(t)\,dt - \int b_1(x,t)\,dx\right). \quad (4.25)$$

Следовательно, решения задач Гурса для уравнения (3.6) с краевыми условиями (3.10) и (3.12) представляются формулой (3.17), в которую в качестве функции v следует подставлять функцию (4.25). Совершенно аналогично может быть построена функция Римана для уравнения (3.4) при условии, что сопряженное в смысле Лагранжа с соответствующим (3.4) однородным уравнением уравнение (4.16) также может быть приведено к виду (4.2).

5. Модификация метода

Казалось бы, описанный метод позволяет полностью решить краевую задачу теории фильтрования (1.1), (1.2), (1.3). Однако применение этого метода наталкивается на значительные осложнения. Дело в том, что коэффициенты уравнений (3.4) и (3.6) связаны с коэффициентами системы (1.1) первыми тремя равенствами (3.5) и первыми тремя равенствами (3.7). Таким образом, если величины $a, b, c, a1, b1, c1$ выбраны из условия приведения уравнений (3.14) и (4.16) к виду (4.2), для определения четырех коэффициентов системы (1.1) $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ получается система из шести уравнений, то есть переопределенная система. В принципе возможно к этой системе из шести уравнений с четырьмя неизвестными добавить условия совместности. Однако эти условия совместности существенно сузят класс систем (1.1), решаемых таким методом.

Поэтому здесь предлагается несколько иной подход к решению данной проблемы. Это предложение состоит в том, чтобы рассматривать приведение к проблеме Гурса задачи о нахождении только одной искомой функции: концентрации C или плотности ϱ. Пусть одна из этих функций найдена, например ϱ. Тогда концентрация C может быть найдена как решение задачи Коши для первого уравнения (1.1), в правую часть которого подставлена найденная функция ϱ, с начальным условием в виде первого равенства (1.2). В этом случае для отыскания C вообще не требуется строить функцию Римана, поэтому класс задач, разрешимых этим методом, существенно расширяется.

Таким образом, предложен следующий алгоритм построения асимптотического разложения решения краевых задач теории фильтрования. Здесь будет описан алгоритм, использующий функции Римана для отыскания только функций ϱ. Алгоритм, использующий функции Римана для отыскания только функций C, строится совершенно аналогично.

На основании соображений, приведенных в начале статьи, решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) отыскивается в виде (2.1). Для коэффициентов разложения (2.1) получаются системы дифференциальных уравнений (2.2), (2.3), (2.4), (2.5). В системе уравнений (2.2) для функции ϱ получают уравнение вида (3.6), в котором в данном случае $F_\varrho = 0$. Краевыми условиями для ϱ_0 на характеристиках являются условия (3.10) при $g = 0$ и (3.12). Затем, используя первые три равенства (3.7), то есть равенства

$$a_1 = \alpha; \quad b_1 = -(\beta - \nu - \frac{\beta_x}{\beta}); \quad c_1 = -\left[\alpha_x + \beta\gamma - \alpha(\frac{\beta_x}{\beta} + \nu)\right], \tag{5.1}$$

проверяют, существуют ли такие функции a_1, b_1, c_1, удовлетворяющие дополнительно условиям (4.12) и (4.15) при произвольном постоянном H, что равенства (5.1) выполняются.

Если таких функций не существует, данный метод, по крайней мере для функции ϱ, не применим. В этом случае следует попытаться выполнить ту же процедуру относительно уравнения (3.4) для C. Мы далее предполагаем, что такие функции a_1, b_1, $c1$ существуют. В этом случае описанным выше способом строится функция Римана (4.22) и получается решение задачи Гурса для функции ϱ_0 в виде функции (3.17). Это значение ϱ_0 подставляется в первое уравнение (2.2), после чего для этого уравнения находится решение задачи Коши с начальным условием в виде первого равенства (2.6):

$$C_0(x,t) = \exp\left(\int_0^x v(y,t)\,dy\right) \times$$
$$\times\left[\varphi(t) + \int_0^x \left(-\frac{\partial\varrho_0(z,t}{\partial t} + \gamma(z,t)\varrho_0(z,t)\exp(-\int_0^z v(y,t)\,dy\right)\,dz\right]. \tag{5.2}$$

Затем рассматривается система уравнений (2.3). Так как коэффициенты в системе (2.3), а также в системах (2.4) и (2.5) одинаковы, уравнения для ϱ в этих системах могут быть решены методом Римана. В частности, для ϱ_1 в соответствии с краевыми условиями (2.7), в которых $\varphi(t) = 0$ и $\psi(x) = 0$, по (3.10) имеем:

$$\Phi(t) = \varrho_1(0.t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(0,\tau)\,d\tau\right)\int_0^t (f)\exp\left(-\int_0^\tau \alpha(0,z)\,dz\right)\,d\tau. \tag{5.3}$$

Поэтому по формуле (3.17) получаем, что

$$\varrho_1(x_1,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(x_0,t,x_1,t_1)[\Phi'(t) + a_1(x_0,t)\Phi(t)]\,dt +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1} v(x,t,x_1,t_1)(f)(x,t,)\;dt\;dx. \tag{5.4}$$

Подставляя это значение ϱ_1 в первое уравнение (2.3) и решая для него задачу Коши с нулевым начальным условием (2.7), получаем:

$$C_1(x,t) = \exp(\int_0^x v(y,t)\,dy) \times$$
$$\times\left[\int_0^x \left(-\frac{\partial\varrho_1(z,t}{\partial t} + \gamma(z,t)\varrho_1(z,t)\exp(-\int_0^z v(y,t)\,dy\right)\,dz\right]. \tag{5.5}$$

Для системы уравнений (2.5) с произвольным значением индекса n снова сводим задачу для функции ϱ_n к проблеме Гурса и по формуле (3.17) получаем ее решение:

$$\varrho_n(x_1,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(x_0,t,x_1,t_1)[\Phi'(t) + a_1(x_0,t)\Phi(t)]\,dt + \\ + \int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1} v(x,t,x_1,t_1)g_n(x,t,)\;dt\;dx, \quad (5.6)$$

где

$$\Phi(t) = \varrho_n(0.t) = \exp(\int_0^t \alpha(0,\tau)\,d\tau)\int_0^t g_n(0,\tau)\exp(-\int_0^\tau \alpha(0,z)\,dz)\,d\tau. \quad (5.7)$$

Подставляя значение ϱ_n из (5.6) в первое уравнение (2.5) и решая для него задачу Коши с нулевым начальным условием (2.7), получаем:

$$C_n(x,t) = \exp(\int_0^x v(y,t)\,dy)\times \\ \times\left[\int_0^x \left(-\frac{\partial\varrho_n(z,t}{\partial t} + \gamma(z,t)\varrho_n(z,t)\exp(-\int_0^z v(y,t)\,dy\right)\,dz\right]. \quad (5.8)$$

Таким образом, функции ϱ_n и C_n могут быть вычислены для любого значения индекса n. Заметим также, что все функции ϱ_n и C_n представляют собой интегралы от непрерывных функций. При этом функции g_n являются полиномами от непрерывных функций. Это значит, что при конечных x и t функции ϱ_n и C_n являются ограниченными. Следовательно, разложения (2.1) являются асимптотическими. Отметим также, что равенства (5.1) могут быть использованы для синтезирования таких систем уравнений теории фильтрования (1.1), которые могут быть проинтегрированы предложенным здесь способом. Для этого достаточно задать функции a_1, b_1 и c_1, удовлетворяющие условиям (4.12) и (4.15), а затем по формулам (4.20) вычислить коэффициенты системы (1.1). При этом, учитывая тот факт, что уравнений (4.20) три, а коэффициентов системы (1.1) четыре, выясняем, что класс уравнений теории фильтрования, решаемых предложенным методом, является достаточно обширным.

Никаких принципиальных трудностей не возникает также при решении краевых задач теории фильтрования, в которых правые части краевых условий (1.2) представляют собой разложения по малому параметру.

6. Пример

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \left[-H\exp(-\frac{1}{2}x^2t^2 + \cos x) + x^2t + \sin t\right]\varrho + \\ + \exp(\frac{1}{2}x^2t^2 - \cos x)C;$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = (x^2t + \sin t)\varrho + \exp(\frac{1}{2}x^2t^2 - \cos x)C + \varepsilon\sin(\varrho C) \quad (6.1)$$

с краевыми условиями (1.2) и (1.3). Здесь $H = const$. В системе (6.1)

$$\alpha(x,t) = x^2 t + \sin t; \quad \beta(x,t) = \nu(x,t) = \exp(\frac{1}{2}x^2t^2 - \cos x);$$
$$\gamma(x,t) = -H\exp(-\frac{1}{2}x^2t^2 + \cos x) + x^2t + \sin t. \quad (6.2)$$

Поэтому по формулам (3.7) получаем:

$$a_1(x,t) = x^2t + \sin t; \quad b_1(x,t) = xt^2 + \sin x; \quad \chi_1(t) = \sin t; \quad \chi_2(x) = \sin x;$$
$$c_1(x,t) = H - 2xt + (x^2t + \sin t)(xt^2 + \sin x). \quad (6.3)$$

Нетрудно проверить, что условия (4.12) и (4.15) для функций a_1, b_1, c_1 выполняются. Решение рассматриваемой краевой задачи строится в виде разложений (2.1) и для коэффициентов этих разложений получаются уравнения (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) с краевыми условиями (2.6), (2.7).

Далее в системе уравнений (2.2) задача для функции ϱ_0 сводится к задаче Гурса для уравнения вида (3.6), которое в данном примере принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x \partial t} - (x^2t + \sin t)\frac{\partial \varrho_0}{\partial x} - (xt^2 + \sin x)\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} +$$
$$+ \left[H - 2xt + (x^2t + \sin t)(xt^2 + \sin x)\right] \varrho_0 = 0. \quad (6.4)$$

Краевые условия для уравнения (6.4) получаются из (2.6) и (3.10) и имеют вид:

$$\varrho_0(x,0) = \psi(x), \quad x > 0;$$
$$\varrho_0(0,t) = \exp(\int_0^t \sin\tau\, d\tau)\left[\varphi(0) + \int_0^t [e^{-1}\varphi(\tau)\exp(-\int_0^\tau \sin z\, dz)\, d\tau\right]. \quad (6.5)$$

После вычислений

$$\varrho_0(0,t) = \exp(1 - \cos t)\left[\varphi(0) + \int_0^t [e^{-1}\varphi(\tau)\exp(\cos\tau - 1)\, d\tau\right]. \quad (6.6)$$

Теперь по формуле (4.25) строим функцию Римана:

$$v(x,t,x_0,t_0) = \exp(\frac{1}{2}x_0^2t_0^2 - \cos x_0 - \cos t_0)\times$$
$$\times J_0(2\sqrt{H(x-x_0)(t-t_0)})\exp(-\frac{1}{2}x^2t^2 + \cos x + \cos t). \quad (6.7)$$

С учетом того, что в данном примере $t_0 = 0$; $x_0 = 0$, из (6.7) получаем:

$$v(x,t,0,0) = e^{-2}J_0(2\sqrt{Hxt})\exp(-\frac{1}{2}x^2t^2 + \cos x + \cos t). \quad (6.8)$$

Поэтому с помощью формулы (3.17) получаем:

$$\varrho_0(x,t) = \psi(0)v(0,0,x,t) + \int_0^t v(0,t_1,x,t)[\varrho_0'(0.t_1) + \sin t_1 \varrho_0(0,t_1)]\, dt_1 +$$
$$+ \int_0^x v(x_1,0,x,t)[\psi'(x_1) + \sin x_1\, \psi(x_1)]\, dx_1, \quad (6.9)$$

причем значения v и $\varrho_0(0,t)$ следует подставлять в (6.9) из (6.6) и (6.8). После этого по формуле (5.2) вычисляем $C_0(x,t)$:

$$C_0(x,t) = \exp\left(\int_0^x \exp(\frac{1}{2}y^2t^2 - \cos y)\,dy\right)\left[\varphi(t) + \int_0^x \left(-\frac{\partial \varrho_0(z,t)}{\partial t} + \right.\right.$$
$$+ \left(-H\exp(-\frac{1}{2}z^2t^2 + \cos z) + z^2t + \sin t\right)\varrho_0(z,t)\ )\times$$
$$\left.\times \exp\left(-\int_0^z \exp(\frac{1}{2}y^2t^2 - \cos y)\,dy\right)\right)\,dz\Bigg]. \quad (6.10)$$

Затем переходим к решению системы (2.3) при краевых условиях (2.7). Для этого, заметив, что в рассматриваемом примере $(f) = sin(\varrho_0\, C_0)$, по формуле (5.3) получаем:

$$\varrho_1(0,t) = \exp(1-\cos t)\int_0^t \sin(\varrho_0 C_0)\exp(\cos\tau - 1)\,d\tau. \quad (6.11)$$

Поэтому по формуле (5.4) получаем, что:

$$\varrho_1(x,t) = \int_0^t v(0,t_1,x,t)[\varrho_1'(0,t_1) + \sin t_1 \varrho_1(0,t_1)]\,dt_1 +$$
$$+ \int_0^x \int_0^t v(x_1,t_1,x,t)\sin(\varrho_0 C_0)(x_1,t_1)\,dt_1\,dx_1. \quad (6.12)$$

Далее по формуле (5.5) получаем:

$$C_1(x,t) = \exp\left(\int_0^x \exp\left(\frac{1}{2}y^2t^2 - \cos y\right)\,dy\right)\left[\int_0^x \left(-\frac{\partial \varrho_1(z,t)}{\partial t} + \right.\right.$$
$$+ \left(-H\exp\left(-\frac{1}{2}z^2t^2 + \cos z\right) + z^2t + \sin t\right)\varrho_1(z,t)\ )\times$$
$$\left.\times \exp\left(-\int_0^z \exp\left(\frac{1}{2}y^2t^2 - \cos y\right)\,dy\right)\right)\,dz\Bigg].$$

После этого аналогичным образом может быть получено при краевых условиях (2.7) решение системы (2.4) и вообще системы (2.5) до любого значения индекса n. Следовательно, предложенный метод может быть использован для получения асимптотических разложений достаточно широкого класса нелинейных краевых задач теории фильтрования с переменными параметрами фильтрующих элементов.

7. Выводы

Таким образом, построен метод решения нелинейных задач фильтрования с переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях. Этот метод может быть применен к решению нелинейных задач фильтрования с произвольными нелинейностями, при условии, что эти нелинейные члены допускают представление вида (1.4). Тогда может быть построено асимптотическое разложение решения задачи по малому параметру.

Отыскание коэффициентов асимптотического разложения сведено к решению двух задач Гурса. Однако в случае переменных коэффициентов в дифференциальных уравнениях фильтрования этот метод может быть применен лишь тогда, когда коэффициенты в уравнениях удовлетворяют условиям (4.11), (4.15) и (4.18), так как только при выполнении этих условий функция Римана может быть построена существующими методами. В противном случае для построения функций Римана должны использоваться другие методы.

Однако удалось показать, что достаточно построить функцию Римана только для одной из искомых функций. В этом случае эта искомая функция отыскивается с помощью метода Римана. Отыскание другой искомой функции сводится к решению задачи Коши.

Получено в явном виде асимптотическое решение нелинейной задачи фильтрования с переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях. Доказано, что полученное разложение решения действительно является асимптотическим.

Библиографические ссылки

1. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики /Тихонов А. Н., Самарский А. А.//М. : Наука, 1966.— С. 724.
2. *Остапенко В. А.* Асимптотическое разложение решения нелинейной задачи сорбции. Республиканская научная конференция "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения". Тезисы докладов. Одесса, 22–24 сентября 1987 г. Часть 2, Одесса, 1987. — С. 52–53.
3. *Остапенко В. А.* Асимптотическое решение нелинейной задачи сорбции. Сб. ”Дифференциальные уравнения и их приложения”, Днепропетровск, 1985. — С. 3–14.
4. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики// М. : Высшая школа, 1964.— С. 599.
5. *Ostapenko V. A.* A novel asymptotic solution of one nonlinear problem of filtering./ Ostapenko V. A., Awrejcewicz J.// International Journal of Modern Physics B. vol. 22 № 15 (2008), pp. 2383–2398.

Надійшла до редакції 28.02.2010