ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 99–113

УДК 519.863:534

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ВИБРОСИСТЕМОЙ

В. Н. Богомаз*, И. В. Шаповал**

* *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск, 49050. E-mail: wbogomas@i.ua*

** *Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. академика В. Лазаряна, Днепропетровск, 49010. E-mail: k irash@mail.ru*

Приведены достаточные условия разрешимости одной задачи оптимального управления вибросистемой, которая встроена в уплотняющую машину каткового типа. На основании идей метода штрафа и метода локальных вариаций получено численное решение задачи управления для вибросистемы с двумя дебалансами.

Ключевые слова: вибросистема, дебаланс, функция штрафа, метод локальных вариаций.

1. Введение

На сегодняшний день типичной составляющей методов математического моделирования в задачах проектирования новой техники являются методы оптимизации режимов работы. В связи с этим актуальной проблемой является разработка численных процедур решения задач оптимального управления механическими системами. В данной работе в качестве объекта управления выступает вибросистема, встроенная в уплотняющую машину каткового типа. Ее конструкция была подробно описана в [1]. Для улучшения качества уплотнения одним из важных факторов является выбор величины и закона изменения возмущающей силы, возникающей в результате движения вибросистемы.

Основной целью данной работы является анализ кривой изменения вертикальной проекции возмущающей силы как функции времени, которая соответствует оптимальному управлению в задаче минимизации ее среднего значения на заданном промежутке времени.

2. Постановка задачи

В предыдущих работах одного из авторов [1, 2] составлена математическая модель работы вибросистемы с дебалансами, встроенной в уплотняющую машину каткового типа, и поставлена задача оптимального управления данной системой.

В векторном виде задача имеет следующее представление:

$$L(u,x(u)) = \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} B(x(u),\dot{x}(u))\,dt \to \inf, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = f(u,x), \tag{2.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{2.3}$$

$$x \in K, \tag{2.4}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.5}$$

Множества допустимых управлений и допустимых фазовых траекторий имеют вид:

$$U_\partial = \big\{u \in L_2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \mid m_{min} \le u_i(t) \le m_{max}, m_{min} = -m_{max}, \\ \forall i \in [1,n+1], \forall t \in [t_0,T]\big\}, \tag{2.6}$$

$$K = \big\{x \in H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) \mid \alpha_{min} \le x_i(t) \le \alpha_{max}, \alpha_{min} = -\alpha_{max}, \\ \forall i \in [n+2,2n+2], \forall t \in [t_0,T]\big\}. \tag{2.7}$$

Исходными данными для вибросистемы данной конструкции являются:
n — количество дебалансов;
m_i — масса i-го дебаланса;
m_{izv} — масса i-го звена водила;
R_i — длина i-го звена водила;
E_i — радиус i-го дебаланса;
r_i — эксцентриситет i-го дебаланса.

Функционал качества представляет собой среднее значение вертикальной проекции суммарной возмущающей силы при движении системы на промежутке времени $[t_0,T]$ и имеет вид:

$$L(u,x(u)) = \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} B(x(t),\dot{x}(t))\,dt, \tag{2.8}$$

где

$$B(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i[x_{2n+2}^2 R_i \ \cos x_{n+1} + \\ + \dot{x}_{2n+2}R_i \sin x_{n+1} + x_{n+i+1}^2 r_i \cos x_i + \dot{x}_{n+i+1} r_i \sin x_i] + \\ + m_{izv}\frac{R_i}{2}[\dot{x}_{2n+2}\sin(x_{n+1}+\lambda(i-1)) + x_{2n+2}^2\cos(x_{n+1}+\lambda(i-1))]).$$

Исключая $\dot{x}$ из $B(x,\dot{x})$ через правые части дифференциальных уравнений $f(u,x)$, функционал (2.8) можно представить в виде:

$$L(u,x(u)) = \frac{1}{T-t_0}\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{B}(u,x)\,dt. \tag{2.9}$$

При этом система (2.2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_{n+2}; \\ & \dots \\ \dot{x}_{n+1} &= x_{2n+2}; \\ \dot{x}_{n+2} &= \frac{1}{I_{1\partial}}\left[u_1 + k_1 \sin x_1 + C_1 \sin(x_{n+1} - x_1)x_{2n+2}^2\right]; \\ & \dots \\ \dot{x}_{2n+1} &= \frac{1}{I_{n\partial}}\left[u_n + k_n \sin x_n + C_n \sin(x_{n+1} + \lambda(n-1) - x_n)\times\right. \\ & \left.\times x_{2n+2}^2\right]; \\ \dot{x}_{2n+2} &= \frac{1}{M(x)}[x_{2n+2}^2 \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) - \\ & -2x_{2n+2}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i)x_{n+1+i} + u_{n+1} + \\ & + \sum\limits_{i=1}^{n} N_i \sin(\beta_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} P_i[R_i \sin(\beta_i) + r_i \cdot \sin(x_i)]], \end{cases} \tag{2.10}$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ — вектор состояния системы; $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор управления; $\lambda = \frac{2\pi}{n}$ — угол между соседними звеньями водила (одинаковый для всех пар соседних звеньев); $I_{izv} = \frac{m_{izv}R_i^2}{3}$ — момент инерции i-го звена водила относительно оси вращения водила; $I_{i\partial} = \frac{m_i(E_i^2 - 2r_i^2)}{2}$ — момент инерции i-го дебаланса относительно центра его инерции; $\beta_i = x_{n+1} + \lambda(i-1)$ — угол поворота i-го звена водила; $L_i^2(x) = R_i^2 + r_i^2 + 2R_i r_i \cos(\beta_i - x_i)$ — квадрат расстояния от оси вращения водила до центра инерции i-го дебаланса.

Введем следующие обозначения: $C_i = m_i R_i r_i$, $k_i = m_i g r_i$, $N_i = m_{izv} g \frac{R_i}{2}$, $M(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(I_{izv} + m_i L_i^2(x))$, $P_i = m_i g$.

Заметим, что особенностями поставленной задачи оптимального управления являются:

1) наличие ограничений на управления и на фазовые траектории;
2) система уравнений существенно нелинейна относительно фазовых координат и линейна относительно управлений;
3) функционал качества линейно зависит от управления.

3. Разрешимость поставленной задачи оптимального управления

Пусть $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ — пространство управлений, а $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ — пространство фазовых траекторий. Достаточным условием существования решения системы (2.10) для любых $u \in U_\partial$ является выполнение условий Каратеодори для функций $f(u, x)$, что означает: для любого $u \in U_\partial$ в области $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2n+2} | t \geq 0\}$ выполнены условия:

1) вектор-функция $f(u, x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x;

2) вектор-функция $f(u,x)$ измерима по t при любом x;

3) $|f(u(t),x(t))| \le m(t)$ и функция $m(t)$ суммируема на $[t_0,T]$.

Теорема 3.1. *(Каратеодори) [7] Пусть $u \in U_\partial$, $(t_0,x_0) \in D$ и $f(u,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть существует суммируемая функция $l(t)$ такая, что для любых точек (t,x) и (t,y) из области D выполняется неравенство $|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \le l(t)|x-y|$. Тогда в области D существует единственное решение системы уравнений $\dot{x} = f(u,x)$.*

Как следует из теоремы 1, система (2.10) имеет единственное решение в классе $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ для любого u из U_∂.

Определение 3.1. Задачу (2.1)–(2.5) будем называть регулярной, если существует, по крайней мере, один элемент $v \in U_\partial$, при котором соответствующее решение $x(v)$ системы уравнений (2.2) удовлетворяет ограничению (2.4). При этом пару $(v,x(v))$ будем называть допустимой в задаче (2.1)–(2.5).

Поскольку объектом управления выступает реальная механическая вибросистема, то всюду далее будем предполагать, что задача (2.1)–(2.5) регулярна.

Представим систему уравнений (2.2) в виде:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau),x(\tau))\,d\tau, \tag{3.1}$$

где вектор-функция $f(u(\tau),x(\tau))$ определена правыми частями уравнений (2.10).

Очевидно, что для любого $t \in [t_0,T]$ выполняется следующее неравенство:

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(u(\tau),x(\tau))|\,d\tau.$$

Из условий Каратеодори и линейности $f(u,x)$ относительно u следует существование константы $C > 0$ такой, что для почти всех $t \in [t_0,T]$ выполняется неравенство $|f(u(t),x(t))| \le C \cdot |x(t)| + |u(t)|$.

Таким образом, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le |x(t_0)| + C\int_{t_0}^{t} |x(\tau)| + |u(\tau)|\,d\tau \le \\ &\le (|x(t_0)| + \|u\|_{L^1(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})}) + C\int_{t_0}^{t} |x(\tau)|\,d\tau, \forall t \in [t_0,T]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Приведем один известный результат:

Лемма 3.1. *(Гронуолла – Беллмана) Пусть $g(t)$ и $s(t)$ при $t_0 < t < \infty$ — непрерывные функции и, кроме того, $g(t) > 0$ и $s(t) > 0$. Если выполнено неравенство*

$$g(t) \le c + \int_{t_0}^{t} g(\tau)s(\tau)\,d\tau,$$

где $c > 0$, *то при всех* $t \in [t_0, \infty)$ *справедливо:*

$$g(t) \leq c\, e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)|\, d\tau}.$$

Согласно теореме вложения Соболева функция $x(t)$ как элемент пространства $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ непрерывна. Применяя лемму Гронуолла – Беллмана к неравенству (3.2), получаем следующую оценку:

$$|x(t)| \leq (|x(t_0)| + \|u\|_{L^1(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})}) e^{C(t-t_0)} \leq A, \forall t \in [t_0, T], \tag{3.3}$$

где A — некоторая константа.

Откуда находим:

$$\|x\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} \leq \int_{t_0}^{T} x^2(t)\, dt = A^2(T - t_0). \tag{3.4}$$

Для оценки производных от фазовых траекторий возведем обе части уравнений системы (2.10) в квадрат, проинтегрируем на отрезке $[t_0, T]$. Используя неравенство Минковского, получим следующее неравенство:

$$\begin{gathered}
\|\dot{x}\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} |\dot{x}(t)|^2\, dt} \leq \sqrt{\int_{t_0}^{T} (C|x(t)| + |u(t)|)^2\, dt} \leq \\
\leq C\sqrt{\int_{t_0}^{T} (|x(t)|)^2 dt} + \sqrt{\int_{t_0}^{T} (|u(t)|)^2\, dt} \leq \\
\leq C\|x\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} + \|u\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})} \leq B,
\end{gathered}$$

где B — некоторая константа.

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\|x\|_{H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} = \|x\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} + \|\dot{x}\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} \leq A + B. \tag{3.5}$$

Из оценки (3.5) следует, что для любого $u \in U_\partial$ соответствующее решение $x(u)$ системы (2.10) ограничено в пространстве $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Введем для рассмотрения множество допустимых пар (u, x) в задаче (2.1)–(2.5):

$$\begin{aligned}
\Xi = \big\{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \mid \dot{x} = f(u, x), \\
x(t_0) = x_0, u \in U_\partial, x \in K\big\}.
\end{aligned}$$

Ввиду регулярности задачи (2.1)–(2.5), имеем: множество Ξ — непусто. Взяв во внимание то, что множество U_∂ ограничено в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ и решение системы (2.10) ограничено в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ для любого u из U_∂, получим, что множество Ξ ограничено по норме $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$:

$$\|(u, x)\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} = \|x\|_{H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} + \|u\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})} \leq S.$$

Поскольку пространство $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ является рефлексивным, то, используя теорему Банаха о слабой компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве, имеем: Ξ — секвенциально слабо компактное множество в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$.

Значит, из любой последовательности $\{(u_k,x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Xi$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, что означает: существует такая пара $(u^*,x^*) \in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, что при $k\to\infty$ выполняется условие $(u_k,x_k) \to (u^*,x^*)$ (с точностью до подпоследовательности). Так как при каждом значении k выполняется $(u_k,x_k) \in U_\partial \times K$, а множество $U_\partial \times K$, согласно его определению (см. формулы (2.6), (2.7)) является слабо замкнутым, то, очевидно, что $(u^*,x^*) \in U_\partial \times K$. Покажем, что пара (u^*,x^*) удовлетворяет системе уравнений (2.10). Для этого заменим ее эквивалентной системой интегральных уравнений

$$x_k(t) = x_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(x_k(\tau)) + u_k(\tau))\,d\tau. \tag{3.6}$$

Как известно, из $x_k \rightharpoonup x^*$ в $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ (теорема Релиха – Кондрашова и теорема о вложении Соболева) следует, что $x_k \to x^*$ в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ и $C(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$. Согласно определению слабой сходимости, при $k\to\infty$ имеем $(1,u_k)_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})} \to (1,u^*)_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})}$. Следовательно, переходя к пределу в правой и левой частях уравнений (3.6) при $k\to\infty$ и применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получим уравнение:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(x^*(\tau)) + u^*(\tau))\,d\tau. \tag{3.7}$$

Следовательно, $(u^*,x^*) \in \Xi$, что и требовалось установить.

Тем самым получен следующий результат:

Следствие 3.1. *Множество допустимых пар в задаче (2.1)–(2.5) является секвенциально слабо компактным относительно слабой топологии в пространстве* $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$.

Определение 3.2. Функционал $L : L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ будем называть секвенциально полунепрерывным снизу относительно слабых топологий в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})$ и $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, если из того, что $U_\partial \ni u_k \rightharpoonup u$ в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})$ и $K \ni x_k \rightharpoonup x$ в $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ вытекает неравенство

$$\liminf_{k\to\infty} L(u_k,x_k) \geq L(u,x).$$

Как следует из представления (2.8), типичными составляющими функционала L выступают следующие выражения:

$$L_1(u,x) = C_1 \int_{t_0}^{T} x^2(t) \cos x(t)\,dt, \tag{3.8}$$

$$L_2(u,x) = C_2 \int_{t_0}^{T} \dot{x}(t) \sin x(t)\,dt, \tag{3.9}$$

где C_1, C_2 – константы, зависящие от параметров системы.

В силу компактности вложения $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ в $C(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ имеем, что $x_k^2(t)\cdot\cos x_k(t) \to x^{*2}(t)\cdot\cos x^*(t)$ равномерно при $k\to\infty$. Таким образом, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, находим:

$$\lim_{k\to\infty} L_1(u_k,x_k) = \lim_{k\to\infty} C_1\int_{t_0}^{T} x_k^2(t)\cos x_k(t)\,dt = \\ = C_1\int_{t_0}^{T} x^{*2}(t)\cos x^*(t)\,dt = L_1(u^*,x^*). \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что $L_1(u,x)$ является непрерывным функционалом относительно слабой топологии в пространстве $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})\times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$.

Приведем известный из функционального анализа результат:

Лемма 3.2. *Пусть в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ заданы последовательности: $\{v_k\}$ и $\{y_k\}$ такие, что $v_k \rightharpoonup v^*$ в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, $y_k\to y^*$ в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$. Тогда $(y_k,v_k)_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} \to (y^*,v^*)_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})}$ при $k\to\infty$.*

Применяя лемму 2 и то, что вложение $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ компактно, имеем:

$$\lim_{k\to\infty} L_2(u_k,x_k) = \lim_{k\to\infty} C_2\int_{t_0}^{T} \dot{x}_k(t)\cos x_k(t)\,dt = \\ = C_2\int_{t_0}^{T} \dot{x}^*(t)\sin x^*(t)\,dt = L_2(u^*,x^*). \quad (3.11)$$

Тем самым получен следующий результат:

Следствие 3.2. *Функционал качества (2.8) полунепрерывен снизу относительно слабой топологии в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})\times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$.*

Представим задачу (2.1)–(2.5) в следующем виде:

$$\inf_{(u,x)\in\Xi} L(u,x), \quad (3.12)$$

$$\Xi = \left\{(u,x)\in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})\times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) | \dot{x} = f(u,x), \right. \\ \left. x(t_0)=x_0, u\in U_\partial, x\in K\right\}. \quad (3.13)$$

Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса [4] о том, что секвенциально полунепрерывный снизу функционал относительно слабой топологии пространства, на котором он определен, на секвенциально слабо компактном множестве ограничен снизу и достигает своей нижней грани, получим, что задача (3.12)–(3.13) имеет решение.

Таким образом, приходим к следующему результату:

Теорема 3.2. *Пусть множество U_∂ ограничено в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})$, уравнения системы $\dot{x} = f(u,x)$ являются уравнениями Каратеодори, правые части которых удовлетворяют условию Липшица относительно x, функционал качества $L : L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) \to \overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии в $L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, элементы множества K поточечно ограничены. Тогда задача (3.12)–(3.13) разрешима в том и только в том случае, если она регулярна.*

Доказательство. Обратное утверждение очевидно, поскольку из разрешимости задачи (3.12)–(3.13) следует, что множество допустимых пар Ξ непусто, а значит она регулярна. Прямое утверждение следует из разрешимости задачи (3.12)–(3.13). Теорема доказана. □

Необходимым условием оптимальности для задачи (3.12)–(3.13) является принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. Но при его реализации возникают существенные трудности, связанные с появлением в правых частях сопряженных уравнений слагаемых, зависящих от некоторой меры.

Таким образом, для упрощения реализации необходимых условий оптимальности предлагается заменить фазовые ограничения на некоторую функцию штрафа.

Введем для рассмотрения следующие множества:

$$\Xi_1 = \left\{(u,x) \in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) | \dot{x} = f(u,x), \right.$$
$$\left. x(t_0) = x_0, u \in U_\partial \right\}.$$

$$\Xi_2 = \left\{(u,x) \in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) | x \in K \right\}.$$

Очевидно, что $\Xi = \bigcap_{i=1}^{2} \Xi_i$ — множество допустимых пар в задаче (3.12)–(3.13).

Пусть $\beta : H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — некоторая полунепрерывная снизу относительно слабой топологии в пространстве $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ функция такая, что $\beta(x) > 0$ при $x \notin K$ и $\beta(x) = 0$ для любого x из K.

Таким образом, задача (3.12)–(3.13) после замены фазовых ограничений функцией штрафа будет иметь вид:

$$\inf_{(u,x)\in\Xi_1} L_\varepsilon(u,x), \tag{3.14}$$

$$\Xi_1 = \left\{(u,x) \in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}) | \dot{x} = f(u,x), \right.$$
$$\left. x(t_0) = x_0, u \in U_\partial \right\}, \tag{3.15}$$

где $L_\varepsilon(u,x) = L(u,x) + \varepsilon^{-1}\beta(x)$.

Для задачи (3.14)–(3.15) приведем следующий результат:

Лемма 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ задача (3.14)–(3.15) разрешима. Последовательность пар $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$, которые являются решениями в задаче (3.14)–(3.15) при монотонно убывающих значениях параметра штрафа ε, слабо сходится к решению задачи (3.12)–(3.13) при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Согласно своему определению, множество Ξ_1 (см. формулу (3.15)) секвенциально слабо компактно в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. Из следствия 3 следует, что функционал $L_\varepsilon(u, x)$ является ограниченным снизу на Ξ_1 в силу неотрицательности функции штрафа.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в силу теоремы 2 существует пара $(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Xi_1$ такая, что выполняется неравенство: $L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq L_\varepsilon(u, x)$, для любых $(u, x) \in \Xi_1$.

Очевидно, что для каждого $\varepsilon > 0$ пара $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$ является ограниченной в пространстве $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. А поскольку $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ рефлексивно, то, переходя к подпоследовательностям и сохраняя обозначение нумерации, имеем $(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \rightharpoonup (u^*, x^*)$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая регулярность задачи (3.12)–(3.13) и то, что U_∂ слабо замкнуто в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$, имеем $(u^*, x^*) \in \Xi_1$.

Покажем, что $x^* \in K$ и пара (u^*, x^*) является оптимальным решением в задаче (3.12)–(3.13).

Пусть $(\omega, x(\omega)) \in \Xi_1$ – некоторая допустимая пара в задаче (3.12)–(3.13). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо $L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq L_\varepsilon(\omega, x(\omega)) \leq L(\omega, x(\omega))$, поскольку имеет место равенство $\beta(x(\omega)) = 0$. В силу полунепрерывности снизу функционала $L_\varepsilon(u, x)$ выполняется неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} L(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq L(u^*, x^*).$$

Отсюда следует, что $\beta(x_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon$, где $c - const$. В силу полунепрерывности снизу функции $\beta(x)$ справедливо: $\beta(x^*) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \beta(x_\varepsilon) \leq 0$. Отсюда немедленно следует оптимальность управления u^* и то, что $x^* \in K$, т. е. $(u^*, x^*) \in \Xi$. Лемма доказана. □

Для задачи (3.12)–(3.13) в качестве функции $\beta(x)$ выберем:

$$\beta(x) = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \left(\|\mu_1^+(x_k(t))\|^2_{L^2(t_0,T)} + \|\mu_2^+(x_k(t))\|^2_{L^2(t_0,T)} \right), \tag{3.16}$$

где $\mu_1^+(x_k(t)) = \max\{0, x_k(t) - \alpha_{max}\}, \mu_2^+(x_k(t)) = \max\{0, \alpha_{min} - x_k(t)\}$.

Покажем, что функция $\beta(x)$ является полунепрерывной снизу относительно слабой топологии в пространстве $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Пусть $x_n \rightharpoonup x^*$ в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, тогда в силу компактности вложения $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, имеем $x_n \to x^*$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ (теорема Релиха – Кондрашова). Отсюда следует, что выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})} = \|x^*\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})},$$

значит норма пространства $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2n+2})$ непрерывна относительно слабой топологии в $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$.

Очевидно, что функции $\mu_1^+(x_k(t)),\mu_2^+(x_k(t))$ равномерно непрерывны по x_k. Используя компактность вложения $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$ в $C(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, получим следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_1^+(x_n)\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})}=\|\mu_1^+(x^*)\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})},$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_2^+(x_n)\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})}=\|\mu_2^+(x^*)\|_{L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})}.$$

Это дает основание утверждать, что функция $\beta(x)$ является непрерывной относительно слабой топологии в $H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})$, а значит и полунепрерывной снизу. После замены фазовых ограничений функцией штрафа $\beta(x)$ задача (3.14)–(3.15) будет иметь вид:

$$\inf_{(u,x)\in\Xi_1}\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\widetilde{B}_\varepsilon(u,x)dt, \tag{3.17}$$

$$\Xi_1=\big\{(u,x)\in L^2(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1})\times H^1(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2})|\dot{x}=f(u,x),\\ x(t_0)=x_0,u\in U_\partial\big\}, \tag{3.18}$$

где $\widetilde{B}_\varepsilon(u,x)=\widetilde{B}(u,x)+\varepsilon^{-1}\sum\limits_{k=n+2}^{2n+2}(|\mu_1^+(x_k(t))|^2+|\mu_2^+(x_k(t))|^2)$; ε — параметр штрафа.

Применяя к задаче (3.17)–(3.18) лемму 3, получим следующий результат:

Следствие 3.3. *Последовательность пар $(u_\varepsilon,x_\varepsilon)$, которые являются решениями задачи (3.17)–(3.18) при различных монотонно убывающих значениях параметра штрафа ε, слабо сходится к решению задачи (3.12)–(3.13) при $\varepsilon\to 0$.*

4. Необходимые условия оптимальности

Как известно, для задачи (3.17)–(3.18) при фиксированном $\varepsilon>0$ необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина.

Введем для рассмотрения функцию Понтрягина в виде:

$$H_\varepsilon(t,x,u,p,\lambda)=(p\mid f(u,x))_{\mathbb{R}^{2n+2}}-\lambda\widetilde{B}_\varepsilon(u,x), \tag{4.1}$$

и функцию $\mathsf{H}_\varepsilon(t,x,p,\lambda)$ в виде:

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t,x,p,\lambda)=\sup_{u\in U_\partial}H_\varepsilon(t,x,u,p,\lambda), \tag{4.2}$$

где $(.|.)_{\mathbb{R}^{2n+2}}$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Приведем принцип максимума Понтрягина:

Теорема 4.1. *[3] Пусть $(u_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t))$ – оптимальный процесс управления в задаче (3.17)–(3.18), определенный на множестве $[t_0, T]$. Тогда существуют не равные одновременно нулю число $\lambda > 0$, векторы $l_0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{2n+2}$ и вектор-функция $p(t)$ такие, что:*

1) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{p} = -f_x^*(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \cdot p + \lambda \widetilde{B}_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon); \tag{4.3}$$

2) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности (поскольку правый конец фазовой траектории свободный)

$$p(T) = -h_{1x}^*(x(T)) \cdot l_1 = 0; \tag{4.4}$$

3) почти при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = \mathcal{H}_\varepsilon(t, x, p, \lambda). \tag{4.5}$$

Если $\lambda = 0$, то вследствие условия (4.4) все множители будут равны нулю, что исключено согласно принципу максимума. Тогда для определенности примем $\lambda = 1$.

Для задачи (3.17)–(3.18) функция Понтрягина имеет вид:

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = \sum_{i=1}^{2n+2} p_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} p_{i+n+1} \frac{u_i}{I_{1\partial}} + p_{2n+2} \frac{u_{n+1}}{M(x)} - \widetilde{B}_\varepsilon(u, x), \tag{4.6}$$

где $f_i(x) = f_i(u, x)$, $\forall i \in [1, n+1]$, $f_i(x) = f_i(u, x) - \frac{u_{i-n-1}}{I_{i-n-1\partial}}$, $\forall i \in [n+2, 2n+1]$, $f_{2n+2}(x) = f_{2n+2}(u, x) - \frac{u_{n+1}}{M(x)}$, $\forall i \in [n+1, 2n+1]$.

Уравнения (4.3) имеют вид:

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^{2n+2} p_i f_{ix_j}(x) + p_{2n+2} u_{n+1} \left(\frac{1}{M(x)} \right)_{x_j} + \widetilde{B}_{\varepsilon x_j}(u, x), \forall j = \overline{1, 2n+2}. \tag{4.7}$$

Опуская элементарные вычисления, выражение (4.6) можно привести к виду:

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = F_\varepsilon(x, p) + \sum_{i=1}^{n+1} u_i \varphi_i(t, x), \tag{4.8}$$

где

$$F_\varepsilon(x, p) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_{n+1+i} + \sum_{i=n+2}^{2n+2} (p_i(f_i(x)) - \sum_{i=1}^{n} (m_i [x_{2n+2}^2 R_i \cos x_{n+1} +$$

$$+ (f_{2n+2}(x)) R_i \sin x_{n+1} + x_{n+i+1}^2 r_i \cos x_i + (f_{i+n+1}(x)) r_i \sin x_i +$$

$$+ m_{izv} \frac{R_i}{2} [(f_{2n+2}(x)) \sin(x_{n+1} + \lambda(i-1)) + x_{2n+2}^2 \cos(x_{n+1} + \lambda(i-1))]) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \sum_{k=n+2}^{2n+2} (|\mu_1^+(x_k(t))|^2 + |\mu_2^+(x_k(t))|^2),$$

$$\varphi_i(t,x) = \frac{1}{I_{i\partial}}(p_{i+n+1} - m_i r_i \sin x_i), \tag{4.9}$$

$$\varphi_{n+1}(t,x) = \frac{1}{M(x)}(p_{2n+2} - \sin(x_{n+1})\sum_{i=1}^{n} m_i R_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} m_{izv}\frac{R_i}{2}\sin(x_{n+1} + \lambda(i-1))). \tag{4.10}$$

Таким образом, условие стационарности (4.5) в задаче (3.17)–(3.18) примет вид:

$$u_i = \alpha_{max} sign[\varphi_i(t,x)], i = \overline{1, n+1}. \tag{4.11}$$

5. Численное решение задачи

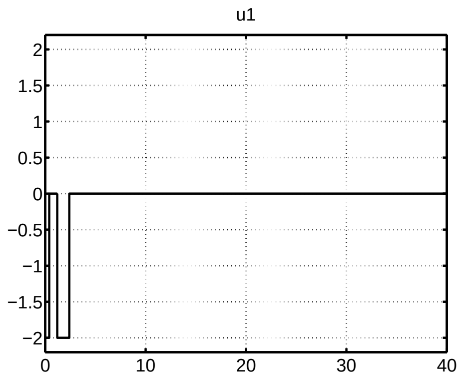
Для численного расчета была рассмотрена вибросистема с двумя одинаковыми дебалансами и одинаковыми звеньями водила ($n = 2$). Динамика системы наблюдалась в течение промежутка времени $[0, 40]$ секунды. Масса одного дебаланса $m = 4$ кг, масса одного звена водила $m_{zv} = 2$ кг, длина звена каждого водила $R = 0,35$ м, радиус дебаланса $E = 0,12$ м, эксцентриситет дебаланса $r = 0,072$ м, предельно допустимая угловая скорость вращения дебалансов и водила $\alpha_{max} = -\alpha_{min} = 150$рад/с, максимальный момент вращения приводов для дебалансов $m_{max} = 2$ Нм, а для водила $m_{max} = 1$ Нм, начальное состояние вибросистемы определяет вектор $x^0 = (\pi, \pi, 0, 0, 0, 0)^T$.

Замечание 5.1. Поскольку в рассматриваемом случае количество дебалансов четное, то подынтегральное выражение несколько упрощается из-за того, что возмущающие силы от вращения звеньев водила компенсируют друг друга.

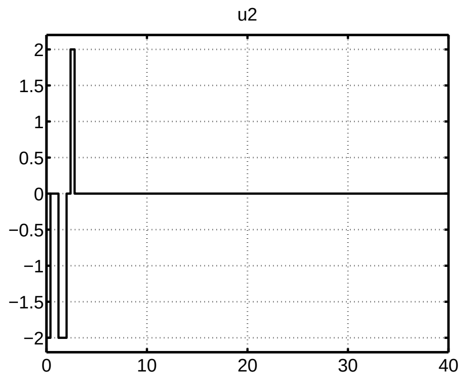
Таким образом, функционал (2.8) для заданной вибросистемы будет иметь вид:

$$L(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{40}\int_0^{40} \left[2mR(x_6^2\cos x_3 + \dot{x}_6 \sin x_3) + \\ + mr(x_4^2 \cos x_1 + \dot{x}_4 \sin x_1 + x_5^2 \cos x_2 + \dot{x}_5 \sin x_2)\right] dt.$$

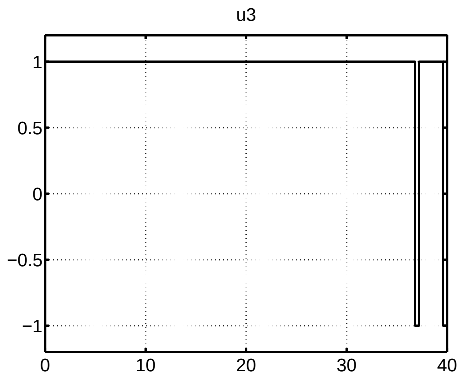
Для численного решения задачи оптимального управления использовался метод локальных вариаций. Полученные законы оптимальных управлений u_1, u_2, u_3 имеют вид, представленный на рисунке 1.



(a) Функция управления $u_1(t)$



(b) Функция управления $u_2(t)$



(c) Функция управления $u_3(t)$

Рис. 1. Функции управления

Кривая изменения вертикальной возмущающей силы, соответствующая оптимальному управлению, приведена на рисунке 2. Функционал качества на оптимальном управлении равен – 26,95 Н.

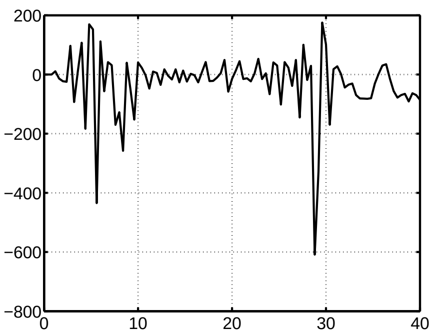
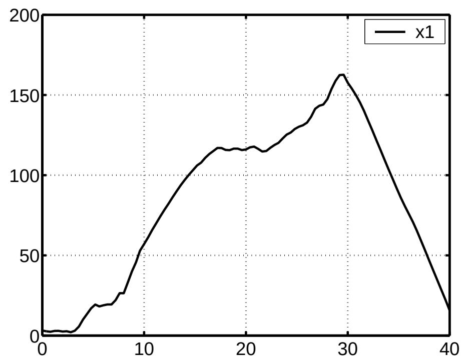
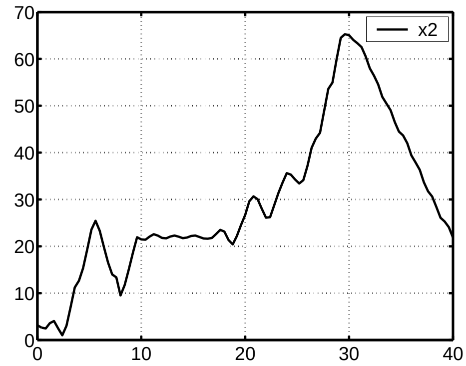


Рис. 2. Функция суммарной возмущающей силы $B(u, x)$

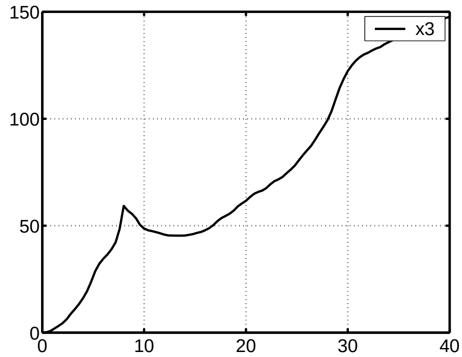
При действии на валы дебалансов и водила найденных моментов вращения u_1, u_2, u_3 фазовые координаты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ изменяются по кривым, показанным на рисунке 3.



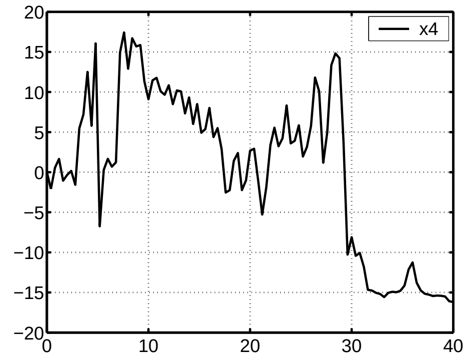
(a) Функция фазовой координаты $x_1(t)$



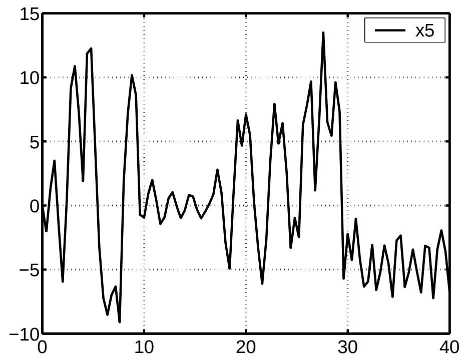
(b) Функция фазовой координаты $x_2(t)$



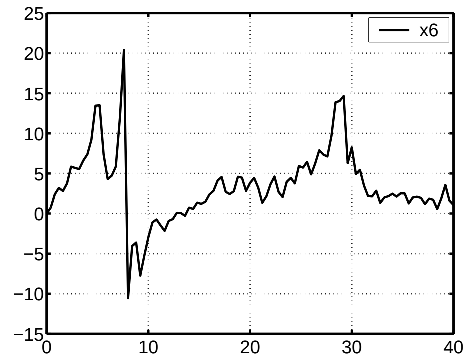
(c) Функция фазовой координаты $x_3(t)$



(d) Функция фазовой координаты $x_4(t)$



(e) Функция фазовой координаты $x_5(t)$



(f) Функция фазовой координаты $x_6(t)$

Рис. 3. Функции изменения углов поворота дебалансов и водила

Рассматривая кривую изменения суммарной возмущающей силы, приходим к выводу, что среднее ее значение на заданном промежутке времени отрицательно, однако, как видно из рисунка 2, существуют временные интервалы, где суммарная возмущающая сила положительная, т. е., давление машины на грунт становится меньше, что является нежелательным.

6. Выводы

В работе рассмотрена задача оптимального управления вибросистемой при наличии фазовых ограничений и ограничений на управления. С использованием идеологии метода штрафов получено аппроксимационное представление исходной задачи и показано, что решения аппроксимационных задач близки к оптимальному решению исходной.

Характерной чертой рассматриваемой задачи является тот факт, что законы оптимальных управлений принимают вид управлений типа bang-bang.

Рассмотрена численная реализация поставленной задачи в случае, когда вибросистема оснащена двумя дебалансами. На основании метода локальных вариаций получены законы оптимального управления в форме bang-bang управлений и соответствующие им оптимальные траектории движения динамической системы.

Примечательным является тот факт, что среднее значение возмущающей силы, представляющее собой функционал качества в исходной задаче, является отрицательным. Однако закон ее изменения во времени показывает наличие таких временных интервалов, где она принимает строго положительные значения. Это означает, что для достижения большего качества в управлении такой вибросистемой необходимо привлекать идеологию теории задач векторной оптимизации.

Библиографические ссылки

1. *Богомаз В. Н.* Об одной задаче оптимизации механической вибросистемы / В. Н. Богомаз// Питання прикладної математики та математичного моделювання, Зб. наук. праць.— Д. : ДНУ, 2010. — С. 23–40.
2. *Богомаз В. Н.* Необходимые условия экстремума в задаче оптимизации механической вибросистемы / В. Н. Богомаз// Вісник ДНУ, Сер. Моделювання — 2010. — Т.18, № 2. — С. 90–102.
3. *Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. М. : Наука, 1974.— 480 с.
4. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. / Ф. П. Васильев. М. : Наука, 1981.— 400 с.
5. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. М. : Физматлит, 2003.— 384 с.
6. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. К. : Наукова думка, 1988.— 288 с.
7. *Филиппов А. И.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. И. Филиппов. М. : Наука, 1985.— 224 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. М.: Наука, 1980.— 496 с.

Надійшла до редколегії 24.12.2010