ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 143–159

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9: 519.46

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ. I. НЕЛОКАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И РАЗМНОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

В. А. Тычинин*, О. Н. Тертышник**

* *Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, 49005. E-mail: tychynin@ukr.net*

** *Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, 49005. E-mail: OlesyaTNik@yandex.ru*

На основе известной потенциальной симметрии построено конечное нелокальное интегро-дифференциальное преобразование, оставляющее инвариантным нелинейное телеграфное уравнение $u_{tt}-\partial_x\big(-u^{-1}+u^{-2}u_x\big)=0$. Построены алгоритмы, по которым выполнено размножение его решений. В числе найденных присутствуют новые решения. В статье получены уравнения, связанные с данным посредством потенциальной системы. Для них исследованы лиевские симметрии и построены точные решения. Показано, что потенциальные симметрии представляют собой специальный частный случай нелокальных симметрий — конечные преобразования Ли – Бэклунда с интегральной переменной. Выведены характеристические уравнения, определяющие нелокальные симметрии уравнений, связанных потенциальной системой. Эти характеристические уравнения также использованы для отыскания точных решений указанных уравнений.

Ключевые слова: точечные симметрии Ли, закон сохранения, потенциальная симметрия, нелокальное преобразование, размножение решений.

1. Введение

Нелинейные волновые уравнения находят применение в обширном спектре прикладных задач [1–4]. К числу эффективных методов интегрирования уравнений нелинейной математической физики относятся методы, основанные на знании их (непрерывных точечных или нелокальных) симметрий [5–11]. Поэтому описание всех классов уравнений, включающих произвольные элементы и допускающих возможно более широкие симметрии, является актуальной задачей современных исследований и составляет задачу их симметрийной классификации. Исследование точечных симметрий С. Ли уравнений класса

$$u_{tt}-\partial_x\big(C(u)u_x+K(x,u)\big)=0$$

было выполнено в работах [13, 14]. Групповой анализ уравнений, принадлежащих классу

$$f(x)u_{tt}-\partial_x\big(C(u)u_x+K(u)\big)=0,$$

был проведен в работе [15]. Расширить множество симметрий исследуемых классов уравнений оказалось возможным, введя понятие потенциальной симметрии [16, 17]. При этом исходное уравнение

$$F_1\big(x, t, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\big) = 0 \tag{1.1}$$

должно допускать представление в форме хотя бы одного закона сохранения

$$D_t\phi^t\big(x, t, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\big) + D_x\phi^x\big(x, t, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\big) = 0. \tag{1.2}$$

Здесь и далее приняты обозначения

$$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu u, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial_\mu\partial_\nu u, \quad \underset{1}{u} = \{u_\mu\}, \quad \underset{2}{u} = \{u_{\mu\nu}\}.$$
$$\mu, \nu = 0, 1, ..., n-1,$$

D_t и D_x — полные производные по переменным t и x, ϕ^t и ϕ^x — плотность и поток, соответственно. В случае двух независимых переменных $x_0 = t$, $x_1 = x$ пишем

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \partial_t u, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \partial_x u.$$

Известно [8, 16], что для уравнения (1.1), допускающего представление в форме закона сохранения (1.2), существует потенциальная функция $v(x, t)$, являющаяся решением вспомогательной потенциальной системы

$$\begin{aligned} v_x &= \phi^t\big(x, t, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\big), \\ v_t &= -\phi^x\big(x, t, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\big). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Теоретико-групповое исследование системы (1.3) позволяет в ряде случаев получить дополнительную информацию о симметрии уравнения (1.1).

Пусть система (1.3) допускает алгебру Ли инвариантности операторов вида

$$X = \xi_1(x, t, u, v)\partial_x + \xi_2(x, t, u, v)\partial_t + \eta_1(x, t, u, v)\partial_u + \eta_2(x, t, u, v)\partial_v.$$

Оператор точечной симметрии системы (1.3), у которого хотя бы одна из координат ξ_1, ξ_2, η_1 явно зависит от потенциальной переменной $v(x, t)$, определяет потенциальную симметрию уравнения (1.1), [16]. Ниже показано, что такие потенциальные симметрии представляют собой специальный частный случай нелокальных симметрий относительно конечных преобразований Ли – Бэклунда [18] с интегральной переменной.

Пусть одно из уравнений системы (1.3) представляет собой конечное нелокальное преобразование зависимой переменной $u(x, t)$. Если возможно исключить эту переменную из второго уравнения системы (1.3), тогда она становится преобразованием Бэклунда [4], связывающим исходное уравнение с другим уравнением для переменной $v(x, t)$:

$$F_2\big(x, t, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{m}{v}\big) = 0. \tag{1.4}$$

Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} - \partial_x\big(C(u)u_x + K(u)\big) = 0, \tag{1.5}$$

допускающее представление потенциальной системой

$$\begin{aligned} &v_x - u_t = 0,\\ &v_t - C(u)u_x - K(u) = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

представляет собой телеграфное уравнение двухпроводной линии передач, где функция $v(x,t)$ — сила тока в проводнике, $u(x,t)$ — напряжение между проводниками, $K(u)$ — утечка тока на единицу длины, $C(u)$ — переменное произведение самоиндукции на емкость на единицу длины провода, t — пространственная переменная, x – время.

Другое применение этой же системы встречается при описании движения (продольных колебаний) эластичного непрерывного стержня, площадь поперечного сечения которого изменяется вдоль стержня.

При этом $u(x,t)$ — величина продольного смещения относительно равновесного положения, $v(x,t)$ — скорость частицы, вызванная этим смещением, $C(u) = \lambda K'(u)$ — тензор напряжений для некоторой постоянной λ, t — время, [3].

В настоящей работе, исходя из потенциальной симметрии уравнения

$$u_{tt} - \partial_x\big(-u^{-1} + u^{-2}u_x\big) = 0, \tag{1.7}$$

мы получаем конечное интегро-дифференциальное преобразование, обеспечивающее его нелокальную инвариантность. Это преобразование положено в основу двух алгоритмов, с помощью которых выполнено размножение ряда точных решений уравнения (1.7).

В числе построенных присутствуют и новые решения. Кроме того, в работе выведены уравнения (1.4), связанные с телеграфным уравнением (1.7) посредством соответствующей потенциальной системы (1.6). Для этих уравнений исследованы точечные симметрии и получены точные решения.

В работе выведены характеристические уравнения, соответствующие известной потенциальной симметрии уравнения (1.7). Они определяют нелокальные симметрии исходного уравнения и уравнения (1.4) и использованы нами для построения точных решений этих уравнений.

2. Классические симметрии уравнения (1.7) и связанных с ним уравнений. Потенциальная симметрия и нелокальная инвариантность

2.1. Лиевские симметрии уравнений

Уравнение (1.7) принадлежит классу (1.5) и, как установлено в работе [17], обладает потенциальной симметрией. Выясним связь этой потенциальной симметрии с симметриями уравнений, определяемых соответствующей потенциальной системой. Заметим, что максимальная алгебра инвариантности уравнения (1.7) состоит из операторов

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + u\partial_u, \\ &X_4 = \mathrm{e}^{-x}\partial_x + \mathrm{e}^{-x}u\partial_u. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Порожденная уравнением (1.7) потенциальная система

$$\begin{cases} v_x - u_t = 0, \\ v_t - u^{-2}u_x + u^{-1} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

обладает широкой лиевской симметрией, описываемой сложной системой определяющих уравнений, которую полностью решить не удается. Отметим, что соответствующая алгебра инвариантности включает, в частности, операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_v, \quad X_3 = t\partial_t + u\partial_u \tag{2.3}$$

и оператор

$$S = u^{-1}\partial_x - v\partial_t + \partial_u, \tag{2.4}$$

найденный в работе [17]. В соответствии с определением, этот оператор характеризует потенциальную симметрию уравнения (1.7).

2.2. Нелокальное преобразование инвариантности

Конечное точечное преобразование, отвечающее оператору S лиевской инвариантности системы (2.2), имеет вид:

$$r = \ln\frac{u+\varepsilon}{u} + x, \quad s = -\varepsilon v + t, \quad p(r,s) = u + \varepsilon, \quad q(r,s) = v. \tag{2.5}$$

Здесь r, s, $p(r,s)$, $q(r,s)$ — новые независимые и зависимые переменные, ε— групповой параметр. Обратным для (2.5) является преобразование

$$x = r - \ln\frac{p}{p-\varepsilon}, \quad t = s + \varepsilon q, \quad u(x,t) = p - \varepsilon, \quad v(x,t) = q. \tag{2.6}$$

Очевидно, что преобразования (2.5), (2.6) переводят потенциальную систему в себя.

В пространстве независимых переменных r, s и зависимых переменных $p(r,s)$, $q(r,s)$ воспользуемся равенством $q_r = p_s$ и заменим в формулах преобразования (2.6) переменную $q(r,s)$ интегралом $\int p_s(r,s)\ dr$. Теперь преобразование связывает переменные x, t, $u(x,t)$ с переменными r, s, $p(r,s)$, $\int p_s(r,s)dr$

$$x = r - \ln\frac{p}{p-\varepsilon}, \quad t = s + \varepsilon \int p_s(r,s)dr, \quad u(x,t) = p - \varepsilon, \quad v(x,t) = q, \qquad (2.7)$$

становясь интегро-дифференциальным. При $\varepsilon = 0$ оно превращается в тождественное преобразование. Таким образом, построенное преобразование (2.7) является элементом группы Ли – Бэклунда.

Теорема 2.1. *Интегро-дифференциальное преобразование (2.7) переводит уравнение (1.7) во множество его интегро-дифференциальных следствий, т. е. оставляет уравнение (1.7) нелокально-инвариантным.*

Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства этого утверждения применим предыдущее преобразование к уравнению (1.7). Переходя в полученном результате на многообразие, которое задано интегро-дифференциальными следствиями уравнения (1.7), определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} &p_{rr} = p_{ss}p - p_r + 2p^{-1}{p_r}^2, \quad \int p_{ss}dr = -p^{-1} + p^{-2}p_r, \\ &\int p_{sss}dr = p^{-3}\left(p_s - 2p_r p_s + p p_{rs}\right), \end{aligned} \qquad (2.8)$$

получаем ноль. Теорема доказана. □

2.3. Уравнение для потенциальной переменной

Дифференциальное уравнение для потенциальной переменной $v(x,t)$, соответствующее системе (2.2), может быть получено исключением из неё переменной $u(x,t)$. Проинтегрировав первое уравнение системы (2.2) по t и подставив результат $u = \int v_x\ dt$ во второе уравнение системы, получаем:

$$v_t\left(\int v_x\ dt\right)^2 - \int v_{xx}\ dt + \int v_x\ dt = 0.$$

Продифференцировав полученное выражение по переменной t, приходим к квадратному уравнению для интеграла $\int v_x\ dt$:

$$v_{tt}\left(\int v_x\ dt\right)^2 + 2v_t\int v_x\ dt - v_{xx} + v_x = 0. \qquad (2.9)$$

Разрешив (2.9) относительно интегральной неизвестной и продифференцировав результат по t, получаем два дифференциальных уравнения для потенциальной переменной:

$$v_x + \partial_t\left(\frac{v_t v_x \pm \sqrt{{v_t}^2{v_x}^2 + v_{tt}(v_{xx} - v_x)}}{v_{tt}}\right) = 0. \qquad (2.10)$$

Исследовать точечные симметрии этих уравнений непосредственно не представляется возможным в силу их иррационального характера. Избавившись в каждом из этих уравнений от иррациональности, получаем одно и то же уравнение, которое ввиду громоздкости здесь не выписываем. Оно, как оказалось, допускает максимальную алгебру инвариантности, состоящую из операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t, \quad X_4 = \partial_v, \quad X_5 = \mathrm{e}^{-x}\partial_x. \tag{2.11}$$

2.4. Решения, построенные на основе симметрий С. Ли

Для построения решений уравнения (1.7) воспользуемся классическим методом Ли – Овсянникова [5]. По операторам алгебры Ли инвариантности (2.1) находим следующие решения:

$$\begin{gathered} 1)\;\; u = \mathrm{e}^x(c_1 t + c_2), \quad 2)\;\; u = \tfrac{t}{c_1\mathrm{e}^{-x} - c_2}, \\ 3)\;\; (c_1^2 - 1)\ln|1 + c_1 u| + c_1 u - c_1^2\ln|u| + c_1^2(x - t - c_2) = 0. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь и далее c_i, $i = 1, 2, 3, ...$, – произвольные постоянные. Третье решение уравнения (1.7), полученное нами в неявном виде, определяется приведенным выше уравнением.

Подставив каждое из найденных выражений для функции $u(x,t)$ в уравнения потенциальной системы (1.6) и решая ее, находим соответствующие выражения для потенциальной функции $v(x,t)$:

$$1)\;\; v = c_1\mathrm{e}^x + c_3, \quad 2)\;\; v = c_2\,\ln|t| - c_2^{-1}(\ln|c_1\mathrm{e}^{-x} - c_2| + x) + c_3. \tag{2.13}$$

Подстановка в потенциальную систему неявной функции $u(x,t)$ из (2.12) имеет следствием равенство $v = -u + s(t)$. Уточнение произвольной функции $s(t)$ подстановкой v в уравнение (2.10) дает $s(t) = c_1 t + c_2$, откуда следует неявное выражение для потенциала, определенное уравнением

$$\begin{gathered} (c_1^2 - 1)\,\ln| - c_1 v + 1 + tc_1^2 + c_1 c_2| - c_1 v - \\ c_1^2\,\ln| - v + c_1 t + c_2| + c_1^2(x - c_2) + c_1 c_2 = 0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Пополнить семейство инвариантно-групповых решений можем, воспользовавшись оператором лиевской симметрии S, потенциальной системы (2.2). Решая систему характеристических уравнений, порожденных этим оператором,

$$u^{-1}u_x - v\;u_t - 1 = 0, \tag{2.15}$$

$$u^{-1}v_x - v\;v_t = 0, \tag{2.16}$$

находим два неявных решения системы

$$u = \mathrm{e}^x G(t \pm u), v = \pm 1$$

с $G(t \pm u)$ — произвольной гладкой функцией аргумента, и третье решение

$$u = \frac{t - c_3}{c_2 \mathrm{e}^{-x} - c_1}, v = c_1.$$

В качестве еще одного простого примера выполним инвариантно-групповое размножение найденного выше первого лиевского решения потенциальной системы, в котором для простоты положим $c_1 = 1$ и $c_2, c_3 = 0$, т. е.

$$u = t\ \mathrm{e}^x, v = \mathrm{e}^x.$$

Воспользуемся для этого преобразованием (2.6). Решив полученные в результате преобразования уравнения относительно зависимых переменных и записав их в обозначениях $x, t, u(x,t), v(x,t)$, находим решение, зависящее от группового параметра ε:

$$u = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^x \left(t - \varepsilon \mathrm{e}^x \pm \sqrt{(\varepsilon \mathrm{e}^x - t)^2 - 4\varepsilon^2} \right),$$

$$v = \mathrm{e}^x + \frac{2\varepsilon}{\left(t - \varepsilon \mathrm{e}^x \pm \sqrt{(\varepsilon \mathrm{e}^x - t)^2 - 4\varepsilon^2} \right)}.$$

Полученные в данном разделе решения составляют основу для построения новых решений с помощью методов, которые используют уже нелокальные симметрии уравнений.

3. Характеристические уравнения и нелокальные симметрии, порожденные потенциальной системой

С оператором S (2.4) связаны два (лиевских) характеристических уравнения (2.15) и (2.16) в пространстве переменных системы (2.2). Каждое из этих уравнений зависит от обеих зависимых переменных. Покажем, что исключение соответствующей переменной из этих уравнений приводит к двум характеристическим уравнениям более высокого порядка, определяющим нелокальные симметрии уравнений, связанных потенциальной системой.

Решая первое уравнение системы (2.15), (2.16) относительно $v(x,t)$, находим:

$$v = \frac{u_x - u}{u\ u_t}.$$

Продифференцировав левую и правую части записанного выше равенства по t и воспользовавшись подстановкой $v_x = u_t$, приходим к выражению, упрощая которое, получаем характеристическое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(x,t)$

$$u_t^3 u^2 - u u_t u_{xx} + u u_x u_{tx} - u^2 u_{tx} + u_t u_x^2 = 0. \tag{3.1}$$

Полученное характеристическое уравнение не может быть спроецировано на какое-либо дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, и, следовательно, описывает нелокальную симметрию исходного уравнения (1.7). Поскольку интегрирование уравнения (3.1) не проще, чем исходного, для отыскания его частных решений воспользуемся лиевской симметрией. Операторы бесконечной алгебры инвариантности этого уравнения

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_t + \mathrm{e}^{-x}F_1(u\mathrm{e}^{-x})\partial_x + u\mathrm{e}^{-x}F_1(u\mathrm{e}^{-x})\partial_u,\\
&X_2 = (\mathrm{e}^{-x}F_2(u\mathrm{e}^{-x})+1)\partial_x + u\mathrm{e}^{-x}F_2(u\mathrm{e}^{-x})\partial_u,\\
&X_3 = t\partial_t + \mathrm{e}^{-x}F_3(u\mathrm{e}^{-x})\partial_x + (\mathrm{e}^{-x}F_3(u\mathrm{e}^{-x})+1)\partial_u,\\
&X_4 = (\mathrm{e}^{-x}F_4(u\mathrm{e}^{-x}) + \ln|u\mathrm{e}^{-x}|)\partial_x + (\mathrm{e}^{-x}F_4(u\mathrm{e}^{-x}) + \tfrac{1}{2u})\partial_u
\end{aligned} \tag{3.2}$$

зависят от четырех произвольных гладких функции $F_i(u\ \mathrm{e}^{-x}),\ i = 1, ..., 4$, аргумента $u\ \mathrm{e}^{-x}$.

Рассмотрим несколько примеров применения алгебры (3.2) для построения нелиевских решений уравнения (1.7). Оператору X_1 алгебры (3.2) отвечает уравнение характеристики

$$\mathrm{e}^{-x}F(u\ \mathrm{e}^{-x})\ u_x + u_t - u\ \mathrm{e}^{-x}F(u\ \mathrm{e}^{-x}) = 0. \tag{3.3}$$

Неявное лиевское решение этого уравнения

$$\big(t - F_1(u\ \mathrm{e}^{-x})\big)\, F(u\ \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{x} = 0 \tag{3.4}$$

наряду с произвольной функцией, связанной с симметрией (3.2), содержит вторую произвольную функцию, появляющуюся в результате интегрирования. Найденное решение может быть выбрано в качестве нелокального анзаца для уравнения (1.7). Подставив его в уравнение и расщепляя результат по переменной t, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega(1-\omega^2F^2)\ddot{F} + 2\dot{F}(\omega^3F\dot{F}+1) = 0,$$

$$\omega(\omega^2-1)F_1\ddot{F} - 2\dot{F}F_1(\omega F+1) - \omega F\ddot{F}_1(\omega^2F^2-1) - 2\dot{F}_1(\omega\dot{F}+F) = 0,$$

которая допускает решения

$$F(\omega) = \pm\frac{1}{\omega},\ \ F_1(\omega) = F_1(\omega);$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2c_3\omega}\left(-1 + \tanh\left(-\frac{1}{2}(\ \ln|\omega| - \mathrm{c}_4)\sqrt{4\mathrm{c}_3^2+1}\right)\sqrt{4\mathrm{c}_3^2+1}\right),$$

$$F_1(\omega) = c_1 + \omega + c_2\ \left(\int \frac{1}{F(\omega)^2\omega^2}\ d\omega\right).$$

Здесь $\omega = u(x,t)\ \mathrm{e}^{-x}$.

Теперь легко находятся соответствующие неявные решения (1.7)

$$-t +\ F_1(u\ \mathrm{e}^{-x}) \pm u\ = 0,$$

$$(c_2-\sqrt{2})u^4 + 2(c_1-t)\mathrm{e}^x u^3 + \Big((c_2-\sqrt{2})u + (c_1-t)\mathrm{e}^x\Big)\,\mathrm{e}^{3(x+c_4)} = 0.$$

Решая характеристическое уравнение, отвечающее второму из перечисленных операторов алгебры (3.2)

$$\left(\mathrm{e}^{-x}F(u\ \mathrm{e}^{-x})+1\right)\ u_x - u\ \mathrm{e}^{-x}F(u\ \mathrm{e}^{-x}) = 0, \tag{3.5}$$

получаем заданный неявно нелокальный анзац для уравнения (1.7)

$$u + \int^{u\ \mathrm{e}^{-x}} F(a)\ da + F_1(t) = 0.$$

Доопределив $F_1(t)$, подстановкой найденного анзаца в уравнение (1.7), приходим к неявному решению, которое зависит от произвольной достаточно гладкой функции $F(u\ \mathrm{e}^{-x})$,

$$u + \int^{u\ \mathrm{e}^{-x}} F(a)\ da + t + c_1 = 0.$$

Выбрав в качестве примера несколько частных случаев зависимости $F(u\,\mathrm{e}^{-x})$, получаем соответствующие решения уравнения (1.7).

1. Функции $F(a) = a$ отвечают два решения

$$u = \left(-\mathrm{e}^x \pm \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 2t + c_1}\right)\mathrm{e}^x.$$

2. Выбрав $F(a) = a^2$, находим:

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(-12(t+c_1) \pm 4\sqrt{4\mathrm{e}^{3x} + 9(t+c_1)^2}\right)^{\frac{1}{3}} -$$
$$2\mathrm{e}^{2x}\left(-12(t+c_1) \pm 4\sqrt{4\mathrm{e}^{3x} + 9(t+c_1)^2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

3. Для зависимости $F(a) = \cos\,(a)$ получаем неявное решение:

$$u + \sin\,(u\ \mathrm{e}^x) + t + c_1 = 0.$$

Замечание 3.1. Решая уравнение (3.1) методом разделения переменных, т. е. полагая $u = F_1(x)F_2(t)$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{F}_2(t)^2 = \lambda, \quad \ddot{F}_1(x) = \lambda F_1(x)^3 + 2F_1(x)^{-1}\dot{F}_1(x)^2 - \dot{F}_1(x).$$

Нетрудно убедиться, что функции

$$u = (\sqrt{\lambda}\ t + c_1)\ \mathrm{e}^{c_2 + x + W(x)^2},$$
$$W(x) = \pm\ \mathrm{erf}(W(x))\sqrt{2\pi} - 2\ \sqrt{\lambda}\ \mathrm{e}^{c_2}(c_3 - \mathrm{e}^x),$$

которые являются решениями характеристического уравнения (3.1), удовлетворяют уравнению (1.7) только при условии стационарности, т. е. когда обращается в ноль константа разделения λ:

$$u = \frac{c_1}{c_2\mathrm{e}^{-x} - c_3}.$$

Подобным образом может быть найдено характеристическое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $v(x,t)$. Решая уравнение (2.16) относительно $u(x,t)$, получаем $u = v_x(vv_t)^{-1}$. Дифференцируя левую и правую части этого равенства по t и используя подстановку $v_x = u_t$, записываем его в форме

$$v_x = \partial_t(v_x(vv_t)^{-1}).$$

После упрощения полученное дифференциальное уравнение второго порядка приобретает вид:

$$-v^2v_xv_t^2 + vv_tv_{tx} - v_xv_t^2 - vv_xv_{tt} = 0. \tag{3.6}$$

Оно определяет соответствующую нелокальную симметрию уравнений (2.10). Для отыскания частных решений этого уравнения воспользуемся его лиевской симметрией. Бесконечная алгебра инвариантности уравнения (3.6) описывается оператором

$$X = F_1(x)\partial_x + v^{-1}(F_4(x)v^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2v^2}} + t(v^2+1)F_2(v) + v(t+F_3(v)))\partial_t + F_2(v)\partial_v, \tag{3.7}$$

в котором $F_i,\ i = 1, ..., 4$ — произвольные гладкие функции соответствующих аргументов.

Полагая, например, $F_1(x) = 1, F_2(v) = F_3(v) = 0, F_4(x) = 0$, приходим к характеристическому уравнению для потенциала

$$v_x + t\ v_t = 0.$$

Общее решение последнего $v(x,t) = f(t\mathrm{e}^{-x})$ после подстановки в уравнение (2.10) и расщепления порождает переопределенную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\omega\dddot{f}(\omega)(\dot{f}(\omega))^2 - 3\omega\dot{f}(\omega)(\ddot{f}(\omega))^2 - (\dot{f}(\omega))^2\ddot{f}(\omega) = 0,$$

$$-(\omega\ddot{f}\dot{f} + \omega^2\dot{f}^4)\dddot{f}(\omega) + 2\omega\ddot{f}(\omega)^3 + (2\omega^2\dot{f}(\omega))^3 + \dot{f}(\omega))\ddot{f}(\omega)^2 + \omega\dot{f}^4\ddot{f}(\omega) = 0$$

с решениями

$$v = c_1t\ \mathrm{e}^{-x} + c_2, \quad v = \pm\ \ln|\ t\ \mathrm{e}^{-x} + \sqrt{(t\ \mathrm{e}^{-x})^2 - c_1}| + c_2.$$

Еще одно решение уравнения (2.10) получим, выбрав для оператора (3.7) характеристическое уравнение в виде:

$$t\left((v + v^{-1}) + 1\right)v_t - 1 = 0.$$

Соответствующее решение уравнения (2.10) задается равенством

$$\ln|v| - \ln|t| + \frac{1}{2}v^2 + v + c_1 = 0.$$

Другие решения уравнений (1.7) и (2.10) могут быть построены подобным образом из произвольных линейных комбинаций операторов алгебр инвариантности (3.2) и (3.6) и с помощью группового многопараметрического размножения.

4. Размножение решений, использующее нелокальные симметрии уравнений

4.1. Размножение решений с помощью потенциальной системы

Выше было показано, что потенциальная система (2.2) связывает уравнения (1.7) и (2.10). Следовательно, ее уравнения можем рассматривать как преобразование Бэклунда названных уравнений. Воспользуемся этим обстоятельством для размножения решений уравнения (1.7). Процесс построения нового решения уравнения из данного может быть осуществлен двумя различными способами.

Алгоритм 4.1. *Подставим известное решение уравнения (1.7)* $u^{\mathrm{I}}(x,t) = f_1(x,t)$ *в первое уравнение системы (2.2), рассматривая его как нелокальное преобразование, связывающее уравнения (1.7) и (2.10). Решив полученное уравнение относительно* $v(x,t)$*, находим анзац* $v^{\mathrm{I}}(x,t) = \int f_1(x,t)\,dx + s_1(t)$*. Для уточнения функции* $s_1(t)$ *подставим найденный анзац в уравнение (2.10). Полученное при этом дифференциальное выражение относительно функции* $s_1(t)$ *расщепляем, исходя из требования его редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаем решение уравнения (2.10)* $v^{\mathrm{I}}(x,t) = \varphi(x,t)$*. Повторно подставив построенное выше решение в первое уравнение системы (2.2) и решив его относительно функции* $u(x,t)$*, находим новое решение уравнения (1.7)* $u^{\mathrm{II}}(x,t) = f_2(x,t)$*.*

Алгоритм 4.2. *Выполним все шаги алгоритма 4.1 вплоть до получения решения* $v^{\mathrm{I}}(x,t) = \varphi(x,t)$*. Теперь подставим это решение во второе уравнение системы (2.2). Решив его относительно функции* $u(x,t)$*, находим новое решение уравнения (1.7)* $u^{\mathrm{II}}(x,t) = f_2(x,t)$*.*

Рассмотрим несколько примеров размножения решений уравнения (1.7) с помощью описанных алгоритмов.

Продемонстрируем действие алгоритмов, размножив простое исходное решение

$$u^{\mathrm{I}} = t.$$

Первое уравнение потенциальной системы в этом случае имеет вид $v_x = 1$. Откуда находим:

$$v = x - \ln|\mathrm{t} + \mathrm{c}_2| + \mathrm{c}_3. \tag{4.1}$$

Следуя первому алгоритму, подставим это выражение для $v(x,t)$ повторно в первое уравнение системы (2.2). Решение полученного уравнения относительно $u(x,t)$

$$u^{\mathrm{II}} = t + f(x)$$

подставим в исходное уравнение (1.7). Решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{f} + \dot{f} = 0, \quad f\ddot{f} - 2\dot{f}^2 + f\dot{f} = 0,$$

находим $f(x) = c_1$ и решение уравнения (1.7)

$$u^{\mathrm{II}} = t + c_1.$$

В соответствии со вторым алгоритмом выражение (4.1) подставим во второе уравнение потенциальной системы:

$$\partial_t(x - \ln|t + c_2| + c_3) - u^{-2}u_x + u^{-1} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$u^{\mathrm{III}} = \frac{t + c_2}{1 + (t + c_2)\ \mathrm{e}^{-x}s(t)}$$

уточняем, подставив его в (1.7) и решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s\ddot{s} - 2\dot{s}^2 = 0, \quad (t + c_2)^2\ddot{s} + 4(t + c_2)\dot{s} + 2s = 0.$$

Окончательно получаем:

$$u^{\mathrm{III}} = \frac{t + c_2}{1 + c_3\ \mathrm{e}^{-x}}.$$

Подставим одно из найденных выше решений уравнения (1.7)

$$u^{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^x(c_1 t + c_2)$$

в первое уравнение системы (2.2). Решая полученное уравнение относительно v, находим:

$$v = c_1\mathrm{e}^x + s(t).$$

Уточним функцию $s(t)$, подставив найденное выражение в уравнение (2.10). Получаем решение уравнения (2.10):

$$v = c_1\mathrm{e}^x - 4c_3(t + c_4)^{-1} + c_5. \tag{4.2}$$

Подставив построенное выше решение повторно в первое уравнение системы (2.2) и решив его относительно функции $u(x, t)$, получаем решение, совпадающее с исходным:

$$u^{\mathrm{II}} = \mathrm{e}^x(c_1 t + c_2).$$

Нетрудно убедиться, что подстановка решения (4.2) во второе уравнение системы (2.2) приводит вновь к исходному решению. Следовательно, выбранное нами исходное решение является неразмножаемым относительно предложенных алгоритмов.

Приведем другие примеры размножения решений уравнения (1.7) с помощью предложенных алгоритмов.

Подставив второе из построенных лиевским методом решений (2.12)

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{t}{c_1\mathrm{e}^{-x} - c_2}$$

в первое уравнение системы (2.2), получаем анзац:

$$v = -c_2^{-1}(\ln|c_1 e^x - c_2| + x) + s(t).$$

Уточнив выражение для $s(t)$ подстановкой в уравнение (2.10), находим:

$$v = -c_2^{-1}(\ln|c_1 e^x - c_2| + x) + c_2 c_3 (t + c_4)^{-1} + c_2 \ln|t + c_4| + c_5. \tag{4.3}$$

Подставляя найденное решение в первое уравнение системы (2.2) и решая ее, получаем анзац:

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2} + g(x).$$

Уточнив произвольную функцию $g(x)$ с помощью уравнения (1.7), что оказывается возможным лишь при условии $c_4 = -c_3(c_1 - c_2)(c_1 + c_2)^{-1}$, приходим к решению

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2} + \frac{c_3 e^{\frac{3x}{2}}}{(c_1 - c_2 e^x)^2}\left(\sinh(x/2) - \frac{(c_1 - c_2)}{c_1 + c_2}\cosh(x/2)\right).$$

Если воспользоваться вторым алгоритмом и подставить решение (4.3) во второе уравнение потенциальной системы, приходим к решению

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{t + c_4}{c_7 e^{-x} - c_2},$$

с точностью до констант совпадающему с исходным.

4.2. Размножение решений с помощью нелокального преобразования

Построенное интегро-дифференциальное преобразование (2.7), как было доказано в теореме 2.1, обеспечивает нелокальную инвариантность уравнения (1.7). Следовательно, выполнив это преобразование для известного решения, мы должны получить опять решение того же самого уравнения. В зависимости от того, каким образом исключать интегральную переменную из получающихся уравнений, существует два различных способа реализации этого механизма.

Алгоритм 4.3. *Пусть известно решение уравнения (1.7), заданное неявно уравнением $\varphi_1(x, t, u^{\mathrm{I}}(x,t)) = 0$. Выполним нелокальное преобразование (2.7) этого уравнения. Получаем:*

$$\varphi_1\left(p(r,s) - \varepsilon,\ r + \ln|1 - \varepsilon\, p(r,s)^{-1}|,\ s + \varepsilon \int p_s(r,s)\ dr\right) = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\int p_s(r,s)\ dr$, находим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\int p_s(r,s)\ dr = f(r, s, p(r,s), \varepsilon). \tag{4.4}$$

Продифференцировав обе части последнего равенства по r*, получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:*

$$F_1(r, s, p(r, s), p_r(r, s), p_s(r, s), \varepsilon) = 0. \tag{4.5}$$

Решим это уравнение. Переобозначив в найденном решении переменные, т. е. заменив переменные $(r, s, p(r, s))$ *на* $(x, t, u(x, t))$ *соответственно, получаем неявный анзац:*

$$\varphi\left(x, t, u^{\mathrm{II}}(x, t), \varepsilon\right) = 0. \tag{4.6}$$

Для уточнения появляющейся в процессе решения произвольной функции подставим найденный анзац (4.6) в уравнение (1.7). Полученное при этом дифференциальное выражение для произвольной функции расщепляем исходя из требования его редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставив найденное решением системы выражение произвольной функции в анзац (4.6), находим новое решение уравнения (1.7):

$$\varphi_2\left(x, t, u^{\mathrm{II}}(x, t), \varepsilon\right) = 0.$$

Алгоритм 4.4. *Выполним все шаги алгоритма 3 вплоть до получения уравнения (4.4). Продифференцируем обе части последнего равенства по* s*. Получаем уравнение:*

$$\int p_{ss}(r, s)\ dr = \partial_s f(r, s, p(r, s), \varepsilon). \tag{4.7}$$

Поскольку для функции $p(r, s)$ *справедливо уравнение (1.7), воспользуемся равенством*

$$\int p_{ss}(r, s)\ dr = -p(r, s)^{-1} + \frac{p_r(r, s)}{p(r, s)^2}$$

и перепишем (4.7) иначе

$$-p(r, s)^{-1} + \frac{p_r(r, s)}{p(r, s)^2} = \partial_s f(r, s, p(r, s), \varepsilon). \tag{4.8}$$

Решив это уравнение и переобозначив в найденном решении переменные, получаем неявный анзац $\varphi\left(x, t, u^{\mathrm{II}}(x, t), \varepsilon\right) = 0$*. Последующие шаги данного алгоритма дословно повторяют соответствующую заключительную часть алгоритма 3.*

Рассмотрим примеры размножения некоторых из построенных выше решений уравнения (1.7) с помощью преобразования (2.7). Воспользуемся для этого алгоритмом 3.

1) Первое инвариантно-групповое решение (2.12)

$$u^{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^x(c_1 t + c_2)$$

переходит в

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(c_3(c_1\varepsilon\mathrm{e}^x + t) + c_4 \pm \sqrt{(c_3(c_1\varepsilon\mathrm{e}^x + t) + c_4)^2 - 4c_1^2\varepsilon^2}\right).$$

2) Второе инвариантно-групповое решение

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{t}{c_1 \mathrm{e}^{-x} - c_2}$$

генерирует неявное решение, заданное равенством

$$\varepsilon^2 (c_2 - {c_3}^2) \ln \left| (c_1 e^{-x} - c_2) c_3 u^{\mathrm{II}} + c_2 \varepsilon \right| + c_3 c_2 \varepsilon (t - (c_1 e^{-x} - c_2) u^{\mathrm{II}}) +$$
$$+ {c_3}^2 \varepsilon^2 (\ln |u^{\mathrm{II}}| - x) + c_4 c_2 {c_3}^2 \varepsilon = 0.$$

3) Полученное нами ранее решение

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{t + c_3}{c_1 \mathrm{e}^{-x} - c_2}$$

переходит в решение

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{1}{c_1 \mathrm{e}^{-x} - c_4} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{LambertW}(-G(x,t)) + \frac{1}{2} \ln |G(x,t)| \right),$$
$$G(x,t) = \exp\left(2 \left(\ln |c_1 + c_4 e^{x}| + c_4 t + c_2 c_4 \right) \right).$$

4) Выбрав исходное решение в виде

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{c_1 t}{-c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_1},$$

находим неявное решение

$$(c_3^2 - 1) \ln |\, c_3 (c_2 - \mathrm{e}^{x})\, u^{\mathrm{II}} - \mathrm{e}^{x}| - c_3^2 \ln |\, c_3 (-1 + c_2\, \mathrm{e}^{-x})\, u^{\mathrm{II}}| +$$
$$c_3\, u^{\mathrm{II}} (1 - c_2\, \mathrm{e}^{-x}) - c_3^2 \ln |c_3 (c_2 - \mathrm{e}^{x})| - c_3^2 (x - t - c_4) + x = 0.$$

В частности, решение $u^{\mathrm{I}} = t$, получаемое из предыдущего при $c_2 = 0$, генерирует функцию

$$u^{\mathrm{II}} = e^{-\operatorname{LambertW}(e^{x+t} + x + t)}. \tag{4.9}$$

Приведем примеры размножения решений с использованием алгоритма 4.
1) Опять в качестве исходного выберем решение

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{c_1 t}{-c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_1}.$$

Размножив его в соответствии со вторым алгоритмом, приходим к решению

$$u^{\mathrm{II}} = \varepsilon \exp\left(-\operatorname{LambertW}\left(c_1^{-1} (-c_2 + c_1 \mathrm{e}^{x}) \mathrm{e}^{-\frac{c_3 - t}{\varepsilon}} \right) - \frac{c_3 - t}{\varepsilon} + x \right).$$

2) Размножить неявное решение из перечисленных в (2.12)

$$\frac{u^{\mathrm{I}}}{c_1} + \ln |1 + c_1 u^{\mathrm{I}}| - \frac{\ln |1 + c_1 u^{\mathrm{I}}|}{{c_1}^2} - \ln |u^{\mathrm{I}}| + x - t - c_2 = 0$$

удается, выбрав с целью упрощения расчетов $\varepsilon = 1$. При этом получаем:

$$(c_1 - 1)(c_1^2 - 1) \ln |1 + c_1\, u^{\mathrm{II}} - c_1| - c_1^2 (t - x + c_1 x) + c_1^2 \ln |\, u^{\mathrm{II}}| (c_1 - 1) + c_1 (\, u^{\mathrm{II}} - 1) = 0.$$

Замечание 4.1. Решение (4.9) уравнения (1.7) позволило построить ряд сравнительно несложных решений уравнения (2.10). Так, воспользовавшись первым уравнением потенциальной системы, находим решение:

$$v = \pm\left(e^{-\mathrm{LambertW}(e^{x+t}+x+t)} - t\right) + c_1.$$

Второе уравнение потенциальной системы из этого же решения генерирует

$$v = \pm(\ln|\,\mathrm{LambertW}(e^{x+t})| - x) + c_2.$$

Повторное использование первого, и, соответственно, второго уравнения потенциальной системы, т. е. завершение третьего и четвертого алгоритмов размножения, дает одно и то же решение:

$$u = \mathrm{LambertW}(e^{x+t}).$$

5. Заключение и обсуждение полученных результатов

В предложенной статье показано, что потенциальная симметрия нелинейного телеграфного уравнения представляет собой частный случай нелокальной симметрии относительно конечного интегро-дифференциального преобразования Ли – Бэклунда. Это преобразование положено в основу двух алгоритмов, с помощью которых выполнено размножение ряда точных решений уравнения. Отмеченная нелокальная симметрия определяется посредством характеристических уравнений второго порядка, выводимых из лиевского оператора, описывающего потенциальную симметрию уравнения. Лиевские инвариантно-групповые решения этих характеристических уравнений служат источником новых нелиевских решений уравнений, связанных потенциальной системой. Построены Ли инвариантно-групповые решения таких уравнений и алгоритмы, по которым выполнено их размножение. В числе найденных присутствуют новые решения.

В следующей статье мы строим конечное интегро-дифференциальное преобразование, линеаризующее рассмотренное нелинейное телеграфное уравнение и связанное с ним нелинейное уравнение для потенциала. С его помощью будут найдены новые потенциальные и нелокальные симметрии и построены новые точные решения.

Библиографические ссылки

1. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. 1. — New York: Academic press, 1965. — 511 p.
2. *Debnath L.* Nonlinear PDEs for scientists and engineers. — Birkhauser, 1997. — 600 p.
3. *Jeffrey A.* Applied partial differential equations. An introduction. —New York: Academic Press, 2003. — 408 p.
4. *Rogers C., Shadwick W. F.* Bäcklund transformations and their applications. — New York: Academic Press, 1982. — 321 p.

5. *Ovsiannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. — New York: Academic Press, 1982. — 400 p.
6. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. —New York: Springer-Verlag, 1993. — 639 p.
7. *Bluman G. W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. —New York: Springer-Verlag, 1989. — 354 p.
8. *Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S.*, New classes of symmetries for partial differential equations, J. Math. Phys, No. 4, Vol. 29, 1988, P. 806–811.
9. *Tychynin V. A.*, Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym type equations, J. Phys. A: Math. Gen., No. 14, Vol. 27, 1994, P. 2787–2797.
10. *Tychynin V. A., Petrova O. V., Tertyshnyk O. M.*, Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations, SIGMA, No. 3, 2007, 0702033, 14 p.
11. *Reyes E. G.*, Nonlocal symmetries and the Kaup–Kupershmidt equation, J. Phys. A: Math. Gen., No. 46, 2005, 073507, 19 p.
12. *Bluman G. W.*, Use and construction of potential symmetries, Math. Comput. Modeling, No. 10, Vol. 18, 1993, P. 1-14.
13. *Gandarias M. L., Torrisi M., Valenti A.*, Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, International Journal of Non-linear Mechanics, No. 39, 2004, P. 389-398.
14. *Kingston J. G., Sophocleous C.*, Symmetries and form-preserving transformations of one-dimentional wave equations with dissipation, International Journal of Non-linear Mechanics, No. 36, 2001, P. 987-997.
15. *Huang D. J., Ivanova N.*, Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equation, Journal of mathematical physics, No. 48, 2007, 073507, 23 p.
16. *Bluman G. W., Doran-Wu P.*, The use of factors to discover potential systems or linearizations, Acta Appl. Math, No. 41, 1995, P. 21-43.
17. *Bluman G. W., Temuerchaolu, Sahadevan R.*, Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation, Journal of mathematical physics, No. 46, 2005, 023505, 12 p.
18. *Anderson R. L., Ibragimov N. H.* Lie-Backlund transformations in applications. — Philadelphia: SIAM, 1979. — 124 p.
19. *Lisle I. G.* Equivalence transformations for classes of differential equations. Thesis. University of British Columbia. 1992.
20. *Ivanova N. M., Popovych R. O., Sophocleous C., Vaneeva O. O.*, Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, Physica A, No. 388, 2008, P. 343-356.

Надійшла до редколегії 20.03.2011