ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 3–20

Проблеми математичного моделювання
та теорiї диференцiальних рiвнянь

УДК 681.31

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ $\mathbf{L^p}$-РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

П. И. Когут

Днепропетровский национальный университет, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Днепропетровск, E-mail: p.kogut@i.ua

Рассматриваются вопросы устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра с позиций второго метода Ляпунова. Характерной особенностью рассматриваемого класса уравнений есть принадлежность их решений классу локально p-интегрируемых по Бохнеру функций $\mathbf{L^p_{loc}(0,\infty;X)}$.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, устойчивость по состоянию, интегральные неравенства, второй метод Ляпунова.

1. Введение

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных решению задач устойчивости и оптимальной стабилизации различных динамических систем, в том числе и систем с последействием (см., напр., [3, 10, 14, 16–18]). Вместе с тем системы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальные системы, системы с последействием могут быть легко преобразованы к интегральным уравнениям типа Вольтерра (ИУ), аппарат которых неуклонно расширяет область своих приложений (см., напр., [1, 3, 8]). К тому же, есть задачи [3, 6], для описания которых принципиально невозможно применить какие-либо другие типы уравнений. Эти обстоятельства приводят к необходимости разработки самостоятельных методов и подходов для решения проблем устойчивости интегральных уравнений Вольтерра.

Общеизвестно, что описание процессов с помощью ИУ существенно ограничивает возможность применения традиционных методов теории устойчивости, в частности, второго метода Ляпунова. Причиной такого обстоятельства служит не техническая сторона вопроса, а специфика структуры состояния таких процессов. К тому же, решения интегральных уравнений Вольтерра только в исключительных случаях принадлежат пространствам непрерывных функций. Как правило, типичным их свойством является локальная интегрируемость.

Анализ литературы показывает, что задачи устойчивости для ИУ, допускающих разрывные решения, с позиций применения идей второго метода Ляпунова являются неизученными. Вместе с тем свойство устойчивости динамических систем существенно зависит от того, каким образом оценивается "инертность" (иными словами, устойчивость) выбранного режима их работы. Традиционно такая оценка опирается на надлежащим образом определенное понятие обобщенной метрики, которая позволяет решать, существенно ли изменяется поведение системы под действием внешних воздействий, и лежит в основе построения функции Ляпунова. При этом непременным условием выступает то обстоятельство, что функция Ляпунова, определенная на исследуемой траектории или множестве траекторий, должна обладать свойством непрерывности. Этим, в частности, можно объяснить тот факт, что в подавляющем большинстве исследований по качественной теории ИУ предполагается непрерывность их решений (см., например, [3, 7, 11, 12, 14, 16, 17]). При этом в качестве метрических пространств, порожденных обобщенной метрикой, рассматривались нерефлексивные банаховы пространства $C(-\infty,0;X)$ [3, 17], $X \times C(-\infty,0;X)$ [11, 12], пространство непрерывных и ограниченных функций $CB(-\infty,0;X)$ [9], пространства Соболева $W^{1,p}(-\infty,0;X)$ [12].

В связи с этим в настоящей работе исследуются некоторые аспекты качественной теории процессов, описываемых линейными интегральными уравнениями Вольтерра в гильбертовом пространстве X. Отличительное свойство рассматриваемых ИУ в том, что классом их решений является банахово пространство $L^p_{loc}(0,\infty;X)$, вследствие чего ИУ могут допускать существование разрывных решений. Для изучения качественного поведения таких объектов, в частности, для получения необходимых и достаточных условий устойчивости исследуемых процессов, предлагается подход, основанный на соображениях математической теории систем [5] и идеях второго метода Ляпунова. Основное внимание уделяется конструированию пространства состояний для класса линейных ИУ. Это объясняется тем, что основная информация о процессе, необходимая для выяснения вопроса о его устойчивости, заключена в последовательной смене состояний [2, 5, 11, 13, 15]. Такой подход позволил ввести для ИУ ряд нетрадиционных определений устойчивости и получить новые результаты в решении задач качественной теории динамических процессов с последействием.

2. Основные обозначения и предварительные результаты

Пусть X и Y — произвольные гильбертовы пространства над полем вещественных чисел. Норму и скалярное произведение в X будем далее обозначать как $|\cdot|_X$ и $(\cdot,\cdot)_X$, соответственно. Пусть $\mathcal{L}(X,Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных отображений $L : X \to Y$ с естественной нормой $\|L\| = \sup\{|Lx|_Y : |x|_X = 1\}$. В случае, когда $X = Y$, будем писать $\mathcal{L}(X)$. Тождественный оператор в $\mathcal{L}(X)$ обозначим как I_X.

Пусть F — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, E — произвольное банахово пространство над полем вещественных чисел. Через $L^p(F;E)$ обозначим векторное пространство измеримых по Бохнеру отображений $f : F \to E$, для которых $\|f\|_{L^p(F;E)} := \left(\int_F |f(x)|^p_E\,dx\right)^{1/p} < +\infty$. Здесь и всюду далее предполагается, что $1 < p < \infty$. Пусть далее $C(\overline{F};E)$ — банахово пространство непрерывных отображений $\varphi : \overline{F} \to E$, а $W^{1,p}(F;E)$ — пространство Соболева всех $f \in L^p(F;E)$ с обобщенными производными $D^i f = \partial f/\partial x^i$ из $L^p(F;E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \|D^i f\|^p_{L^p(F;E)} + \|f\|^p_{L^p(F;E)}\right]^{1/p}.$$

В дальнейшем через $L^p_{loc}(F;E)$, $W^{1,p}_{loc}(F;E)$ и $C_{loc}(F;E)$ будем обозначать локально выпуклые пространства всех $f : F \to E$, сужения которых на произвольный компакт K из F принадлежат классам $L^p(K;E)$, $W^{1,p}(K;E)$, и $C(K;E)$, соответственно. Пусть далее $I(a,b) = \{(t,s) : t \in (a,b), s \in (a,t)\}$. Декартово произведение $X \times L^p(a,b;X)$, наделенное нормой

$$\|h\| := \left[|h^0|^p_X + \|h^1\|^p_{L^p(a,b;X)}\right]^{1/p},$$

обозначим как $M^p(a,b;X)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве X следующее ИУ типа Вольтерра:

$$x(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t,\gamma)x(\gamma)\, d\gamma \quad \forall\, t > 0. \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем предполагать следующее:

$$x(\gamma) = \xi(\gamma), \quad \forall\, \gamma \in (-\infty, 0), \quad \xi \in L^p(-\infty, 0; X), \tag{2.2}$$

$$h \in W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X), \quad 1/p + 1/q = 1, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &K \in L^\infty(0,\infty; L^q(-\infty,0;\mathcal{L}(X))),\\ &f_0 \in L^\infty_{loc}(0,\infty), \text{ где } f_0(t) := \int_0^t \|K(t,\gamma)\|^q_{\mathcal{L}(X)}\, d\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Имеют место следующие результаты, касающиеся разрешимости интегрального уравнения (2.1) (см. [8, 12]):

Теорема 2.1. *При выполнении условия* (2.4), *для каждой пары функций* $\xi \in L^p(-\infty,0;X)$ *и* $h \in W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (2.1) *в классе* $L^p_{loc}(0,\infty;X)$. *При этом, если отображение* $t \to \|K(t,s)\|$ *при почти всех* $s \in (-\infty,t)$ *принадлежит классу* $C_{loc}(0,\infty)$, *то* $x \in C_{loc}(0,\infty;X)$.

Доказательство теоремы 2.1 основано на использовании принципа Каччиполи – Банаха и неравенства Гроноулла.

С целью конструирования пространства состояний для динамического процесса, описываемого ИУ (2.1), введем декомпозицию оператора $K(t,\gamma) \in \mathcal{L}(X)$ в виде:

$$K(t,\gamma) = U(t,\gamma) + Q(t,\gamma), \tag{2.5}$$

где основными условиями для представления (2.5) выступают следующие требования:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1 \in L^\infty_{loc}(0,\infty), \text{ где } f_1(t) := \|Q(t,t)\|_{\mathcal{L}(X)},\\
&Q \in L^\infty(0,\infty; L^q(-\infty,0;\mathcal{L}(X))),\\
&f_2 \in L^\infty_{loc}(0,\infty), \text{ где } f_2(t) := \int_0^t \|Q(t,\gamma)\|^q_{\mathcal{L}(X)}\, d\gamma,\\
&Q(t,\gamma) \in \mathcal{L}(X) - \text{сильно дифференцируем по } \ t,\\
&\left[\frac{\partial Q}{\partial t}\right]_t \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^q(-\infty,+\infty;\mathcal{L}(X))).
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Здесь

$$[f]_s(t,\gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} f(t,\gamma), & -\infty < \gamma < s, \\ 0, & \quad\; s < \gamma < \infty, \end{array} \right\}$$

и всюду далее будем полагать $x_t(\gamma) = x(t+\gamma)$, $\forall\, \gamma \in (-\infty, 0)$, $\forall\, t > 0$.

Основываясь на представлении (2.5) введем, в качестве объекта дальнейшего исследования, следующую систему соотношений:

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t) + \int_{-\infty}^0 G(t,\gamma)x_t(\gamma)\, d\gamma + f(t), \tag{2.7}$$

$$x_t(0) = y(t) + \int_{-\infty}^0 U(t,t+\gamma)x_t(\gamma)\, d\gamma \tag{2.8}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 \in X, \quad x(\gamma) = \xi(\gamma), \quad \forall\, \gamma \in (-\infty,0). \tag{2.9}$$

Здесь

$$A(t) = Q(t,t), \tag{2.10}$$

$$G(t,\gamma) = A(t)U(t,t+\gamma) + \frac{\partial}{\partial s} Q(s,t+\gamma)\bigg|_{s=t}. \tag{2.11}$$

Используя принцип сжимающих отображений и беря за основу схему доказательства теоремы 2.1 из [12], легко установить следующий результат:

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (2.2)–(2.4), (2.6) *и при этом*

$$\xi = (y_0, \xi) \in M^p(-\infty,0;X), \quad u \in L^l_{loc}(0,\infty;U) \qquad \text{и} \qquad f \in L^p_{loc}(0,\infty;X).$$

Тогда задача Коши (2.7)–(2.9) *допускает единственное решение* $(y(t), x(t))$ *в классе* $W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X) \times L^p_{loc}(0,\infty;X)$ *со следующими априорными оценками:*

$$|y(t)|_X \le C_1 \exp^{C_2 t} \Big[|y(0)|^p_X + \|\xi\|^p_{L^p(-\infty,0;X)} \Big]^{1/p}, \quad \forall\, t > 0, \tag{2.12}$$

$$\|x_t(\cdot)\|_{L^p(-\infty,0;X)} \le C_1 \exp^{C_2 t} \Big[|y(0)|^p_X + \|\xi\|^p_{L^p(-\infty,0;X)} \Big]^{1/p}, \quad \forall\, t > 0, \tag{2.13}$$

$$\int_0^T \|(y(t), x_t(\cdot))\|^p_{M^p(-\infty,0;X)}\, dt \le C_5 \Big[|y(0)|^p_X + \|\xi\|^p_{L^p(-\infty,0;X)} \Big]. \tag{2.14}$$

Следствие 2.1. *Если в соотношениях* (2.7) *и* (2.9) *положить*

$$f(t) = \frac{d}{dt}h(t), \quad y_0 = h(0) + \int_{-\infty}^{0} Q(0,\gamma)\xi(\gamma)\,d\gamma, \tag{2.15}$$

то решением задачи Коши (2.7)–(2.9) *будет пара функций* $(y(t), x(t))$, *в которой функция* $x(t)$ *есть решением интегрального уравнения* (2.1).

Доказательство. Достаточно проинтегрировать уравнение (2.7) на отрезке $[0,t]$ и подставить найденную функцию $y(t)$ в соотношение (2.8). □

Замечание 2.1. Всюду далее условия (2.15) предполагаются выполненными.

3. Пространство состояний и его свойства

С целью конструирования пространства состояний для динамического процесса (2.1) будем исходить из определения пространства состояний, приведенного в [5, с. 35], и общих положений математической теории систем. Основываясь на идеях работы [11], можно установить следующий результат (доказательство см. в [15]).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются предположения теоремы 2.1. Тогда состоянием интегрального уравнения* (2.1) *в произвольный момент времени* $t > 0$ *является элемент* $z(t)$ *такой, что:*

$$z(t) \in M^p(-\infty, 0; X) \quad \forall\, t \geq 0,$$
$$z(t) = \left(z^0(t), \left\{z^1(t)(\alpha),\ -\infty < \alpha < 0\right\}\right),$$

где обозначено:

$$z^0(t) = y(t), \quad z^1(t)(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} x(t+\alpha), & -t < \alpha < 0 \\ \xi(t+\alpha), & -\infty < \alpha < -t \end{array} \right\}.$$

Здесь $(x(\cdot), y(\cdot)) \in L^p_{loc}(0,\infty;X) \times W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X)$ — *единственное решение задачи* (2.7)–(2.9) *при условиях* (2.15).

Всюду далее $M^p(-\infty, 0, X)$ будем называть пространством состояний для уравнения (2.1).

Следствие 3.1. *При всех* $h \in W^{1,p}(0,T;X)$ *и* $\xi \in L^p(-\infty,0;X)$ *отображение* $t \to \|z(t)\|_{M^p(-\infty,0;X)}$, *после исправления, быть может, на множестве меры нуль, принадлежит классу* $C(0,T)$, $\forall T < \infty$.

Доказательство. Согласно теоремам вложения (см., например, [4, лемма 1.1.2]), заключаем, что функция $y \in W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X)$, как решение задачи (2.7)–(2.9), после исправления, при необходимости, на множестве меры нуль, будет удовлетворять включению $y \in C([0,T];X)$ $\forall T < \infty$. Тогда, в силу условий

(2.2)–(2.4), отображение $t \to \displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x(t+\gamma)|^p \, d\gamma$ также принадлежит классу $C([0,T])$, $\forall T < \infty$. Поэтому функция

$$t \to \|z(t)\|_{M^p(-\infty,0;X)} = \left(|y(t)|^p + \int_{-\infty}^{0} |x(t+\alpha)|^p \, d\alpha \right)^{1/p}$$

является непрерывной на любом компакте $[0,T]$. □

Замечание 3.1. Из представления (2.5) следует, что для заданного оператора $K(t,\gamma)$, удовлетворяющего условиям (2.4), операторы $U(t,\gamma)$ и $Q(t,\gamma)$ могут быть определены неоднозначно. Поэтому состояние $z(t)$ также будет зависеть от выбора указанных составляющих. Вместе с тем, несмотря на определенный произвол в декомпозиции (2.5), при различных $U(t,\gamma)$ состояния $z(t)|_U$ для одного и того же интегрального уравнения будут эквивалентными в том смысле, что они имеют одинаковую $z^1(t)|_U(\cdot)$-составляющую, а значит они определяют одинаковое поведение системы (2.1) в будущем.

Замечание 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

$$K(t,\gamma) = K(\gamma), \quad \xi = 0, \quad h(t) = h = \text{const},$$
$$K \in L^\infty_{loc}(0,\infty; \mathcal{L}(X)).$$

Тогда уравнение (2.1) при $t > 0$ эквивалентно дифференциальному уравнению $\dot{x} = K(t)x$, состоянием которого в произвольный момент времени $t \le 0$ является вектор $x(t) \in X$. Положив в (2.5) $U(t,\gamma) := 0$, находим, что $y(t) = x(t)$, а значит, согласно теореме 3.1, состоянием интегрального уравнения (2.1) будет пара $z(t) = (x(t), 0) \in X$ (поскольку в этом случае определяющая система (2.7)–(2.9) вырождается в одно дифференциальное уравнение).

Замечание 3.3. Если в (2.5) положить $U(t,\gamma) = K(t,\gamma)$ и при этом считать, что $h(t) = \text{const}$, $u = 0$, то по теореме 3.1 состоянием процесса (2.1) будет вектор $z(t) = (\text{const}, \{x(t+\alpha), -\infty < \alpha < 0\})$. Так как качественные свойства состояния, его эволюция являются инвариантными по отношению к аффинным преобразованиям, то без потери общности можно считать, что $y(t) = const = 0$. Тогда $z(t) = (0, x(t+\cdot))$, где $x(t+\cdot) \in L^p(-\infty,0;X)$. Аналогичный результат установлен в работе [3], где под состоянием интегральных уравнений Вольтерра, допускающих только непрерывные решения, предложено понимать его предысторию $x(t+\cdot)$.

Пример 3.1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = c - \int_1^t \frac{x(s)}{s} \, ds, \quad c = \text{const}, \ t > 1. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что его решением есть функция $x(t) = c/t$. Следуя вышеизложенному подходу, поочередно будем полагать:

$$U_1(t,\gamma) = 0, \quad U_2(t,\gamma) = t - \gamma, \quad U_3(t,\gamma) = \frac{\sin t}{\gamma}, \quad U_4(t,\gamma) = \frac{1}{\gamma}.$$

Тогда, согласно теореме 3.1, соответствующие состояния процесса (3.1) примут вид:

$$z_1(t) = \left(\frac{c}{t}, 0\right) \in \mathbb{R}^1, \tag{3.2}$$

$$z_i(t) = \left(y_i(t), \left\{\frac{c}{t+\alpha}, 1-t<\alpha<0\right\}\right) \in \mathbb{R}^1 \times L^p(1-t,0),\ i=2,3,4, \tag{3.3}$$

где обозначено:

$$y_2(t) = c\,\frac{t^2(\ln t - 1) - t + 1}{t},\ y_3(t) = c\left[\frac{1+\sin t}{t} - \sin t\right],$$
$$y_4(t) = c = \text{const}.$$

При этом очевидно, что указанные состояния определяют одно и то же решение исходного уравнения (3.1). Вместе с тем эволюция во времени этих состояний различна, поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \|z_1(t)\|_{M^p(-\infty,0;\mathbb{R})} = \lim_{t\to\infty}\left|\frac{c}{t}\right| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \|z_2(t)\|_{M^p(-\infty,0;\mathbb{R})} = \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \|z_i(t)\|_{M^p(-\infty,0;\mathbb{R})} = \text{const} < \infty, \quad i = 3,4.$$

Таким образом, при исследовании вопросов устойчивости интегральных уравнений в метрике их функционального пространства состояний необходимо в первую очередь определить то состояние или множество состояний, относительно которого поведение системы (2.7)–(2.9) представляет наибольший интерес. Во-вторых, вследствие неоднозначности определения оператора $U(t,\gamma)$, состояние $z(t)$ в каждом конкретном случае выбирается из соображений его естественной физической интерпретации, а также с учетом таких важных свойств исследуемых процессов, каковыми являются управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость. Вместе с тем следует отметить, что проблема выбора оператора $U(t,\gamma)$ в декомпозиции (2.5), при которой соответствующее состояние для уравнения (3.1) было бы в определенным смысле "оптимальным", является открытой и не изученной на сегодня. По-видимому, эту задачу следует решать в оптимизационной постановке, выбирая в качестве класса допустимых управлений множество операторов

$$\mathcal{Q}_{ad} = \{Q(t,\gamma) \in \mathcal{L}(X)\ :\ |Q(t,y)|_X \le C \quad \forall\, t>0,\ \forall\,\gamma \in (-\infty,t)\},$$

которое было бы замкнутым относительно свойств (2.6).

4. Постановка задачи устойчивости

Будем полагать в дальнейшем, что $h(t) = const$. В этом случае, как следует из условий (2.15), имеем $f(t) \equiv 0$. Пусть пара $(y(t), \{x(t+\cdot))$ есть решением задачи Коши (2.7)–(2.8) при $t > s$ с начальными условиями

$$z(s) = (y(s), \{x(s+\alpha), -\infty<\alpha<0\}) \in M^p(-\infty,0;X). \tag{4.1}$$

Введем обозначения

$$\Phi(t,s,z(s)) := z(t) = (y(t), \{x(t+\alpha), -\infty < \alpha < 0\}), \quad R(t,s,z(s)) := x(t).$$

Как следует из априорных оценок (2.12)–(2.14), операторы

$$\Phi(t,s,\cdot) : M^p(-\infty,0;X) \to M^p(-\infty,0;X), \quad R(t,s,\cdot) : M^p(-\infty,0;X) \to X$$

линейны и непрерывны для любых $t,s \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \le s < t$, т. е.

$$\Phi(t,s,\cdot) \in \mathcal{L}\big(M^p(-\infty,0;X)\big), \quad R(t,s,\cdot) \in \mathcal{L}\big(M^p(-\infty,0;X),X\big). \tag{4.2}$$

В силу единственности решения задачи Коши (2.7)–(2.8), (4.1) и того обстоятельства, что $M^p(-\infty,0;X)$ — пространство ее состояний, а значит, и пространство состояний для уравнения (2.1), будут справедливыми следующие соотношения:

$$R(t,s,z(s)) = R(t,r,\Phi(r,s,z(s))), \quad \Phi(t,s,z(s)) = \Phi(t,r,\Phi(r,s,z(s))),$$
$$\Phi(t,t,z(t)) = z(t), \quad \forall\, t,r,s \in \mathbb{R}\ (0 < s < r < t).$$

Введем в рассмотрение оператор $\Lambda : M^p(-\infty,0;X) \to X$, который определим по следующему правилу:

$$\Lambda(t,z(t)) := y(t) + \int_{-\infty}^{0} U(t,\gamma+t)x(t+\gamma)\,d\gamma. \quad \forall\, t > 0.$$

Вследствие неравенства Коши – Буняковского и оценок (2.12)–(2.14), имеем:

$$|\Lambda(t,z(t))|_X \le |y(t)|_X + \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|U(t,\cdot)\|_{L^q(-\infty,0;X)} \|\xi\|_{L^p(-\infty,0;X)} +$$
$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|U(t,\cdot)\|_{L^q(0,t;X)} \|x_t(\cdot)\|_{M^p(-\infty,0;X)} \quad \text{для любых } \ t \in [0,T]. \tag{4.3}$$

Следовательно $\Lambda(t,\cdot) : \mathcal{L}\big(M^p(-\infty,0;X) \to X$ — линейный непрерывный оператор.

Далее заметим, что в силу единственности решения ИУ (2.1) и следствия 2.1 из теоремы 2.2, имеет место соотношение

$$x(t) = R(t,s,z(s)) = \Lambda(t,\Phi(t,s,z(s))), \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}\ (0 < s < t).$$

Это означает, что для любых значений $t,s \in \mathbb{R}$ таких, что $0 < s < t < \infty$, будет коммутативной диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
M^p(-\infty,0;X) \arrow[rr, "R(t,s,z(s))"] \arrow[dr, "\Phi(t,s,z(s))"'] & & X \\
& M^p(-\infty,0;X) \arrow[ur, "\Lambda(t,z(t))"'] &
\end{tikzcd}$$

что, согласно [5, с. 62], означает существование канонического представления для ИУ (2.1). Таким образом, ввиду коммутативности приведенной диаграммы и свойств (4.2)–(4.3), можно сделать следующий вывод: эволюция во времени решения интегрального уравнения (2.1), его качественные свойства полностью характеризуются отображением

$$\Phi(t, s, \cdot) \in \mathcal{L}(M^p(-\infty, 0; X)). \tag{4.4}$$

Этот вывод основывается на том, что для любого текущего состояния $z(t) \in M^p(-\infty, 0; X)$ функция $\Lambda(t, z(t))$ является статической в том смысле, что она определяет лишь, как состояние $z(t) \in M^p(-\infty, 0; X)$ преобразуется в решение ИУ (2.1). Поэтому вопросы качественного поведения интегральных уравнений Вольтерра естественно изучать в терминах меры отклонения возмущенного состояния (а не решения) от невозмущенного, т. е. по свойствам отображения (4.4). В связи с этим приведем некоторые возможные постановки задач устойчивости.

Определение 4.1. Интегральное уравнение (2.1) назовем устойчивым по состоянию $z(t) = (y(t), x(t + \cdot))$ в метрике пространства $M^p(-\infty, 0; X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать величины $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$, такие, что неравенство

$$\left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^{0} \left[|x(t+\gamma) - x(t - \eta(\varepsilon) + \gamma)|_X^p \right] d\gamma \right)^{1/p} \le \varepsilon \tag{4.5}$$

будет выполнено для всех $t \ge 0$, если только $|y_0| \le \delta(\varepsilon)$ и $\xi \in L^p(-\infty, 0; X)$. Напомним, что здесь $x(\gamma) = \xi(\gamma)$ на множестве $-\infty < \gamma < 0$.

Определение 4.2. Интегральное уравнение (2.1) назовем асимптотически устойчивым по состоянию в метрике $M^p(-\infty, 0; X)$, если для всякого $s > 0$ найдется $\Delta = \Delta(s) > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} |y(t, s, z(s))|_X = 0, \tag{4.6}$$

$$\sup_{t>0} \|z(t, s, z(s))\|_{M^p(-\infty,0;X)} < +\infty, \tag{4.7}$$

если только

$$\|z(s)\|_{M^p(-\infty,0;X)} = \left(|y(s)|_X^p + \int_{-\infty}^{0} |x(s+\gamma)|_X^p \, d\gamma \right)^{1/p} \le \Delta(s).$$

Замечание 4.1. Легко заметить, что необходимым условием устойчивости по состоянию в смысле определения 4.1 выступает следующее неравенство:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|z(t)\|_{M^p(-\infty,0;X)} = \sup_{t\in[0,\infty)} \left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^{0} |x(t+\alpha)|_X^p \, d\alpha \right)^{1/p} < \infty. \tag{4.8}$$

Если при этом тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ задачи ((2.7)) устойчиво по Ляпунову и функция $|x(t)|_X^2$ экви-интегрируема на любом компакте $S \subset (0,+\infty)$, что означает: для любого $\delta > 0$ найдется $\tau = \tau(\delta) > 0$ такое, что $\int_S |x(t)|_X^2\,dt < \delta$ для всех измеримых подмножеств $S \subset [0,+\infty)$ с лебеговой мерою $|S| < \tau$, то выполнения этих условий будет достаточно для устойчивости ИУ (2.1) по состоянию.

Важную роль в дальнейшем будут играть понятия, связанные с устойчивостью интегральных неравенств вида

$$\left|x(t) - \int_{-\infty}^{t} U(t,\gamma)x(\gamma)\,d\gamma\right|_X \le g(t),\ t > 0, \tag{4.9}$$

где $x(\gamma) = \xi(\gamma)$, $-\infty < \gamma < 0$, $\xi \in L^p(-\infty,0;X)$ и $g(t)$ — неотрицательная непрерывная скалярная функция.

Определение 4.3. Интегральное неравенство (4.9) назовем L^p- устойчивым, если каждой непрерывной на $[0,+\infty)$ функции $g(t)$ с конечной $L^\infty(0,\infty)$-нормой найдется хотя бы одна функция $x \in L^p(-\infty,+\infty;X)$, при которой неравенство (4.9) будет истинным почти всюду на $[0,+\infty)$.

Приведем ряд критериев, обеспечивающих указанное свойство.

Утверждение 4.1. Пусть

$$\zeta(t) = \int_0^t \|U(t,\gamma)\|^q_{\mathcal{L}(X)}\,d\gamma \in L^\infty(0,\infty) \quad \text{и при этом} \quad \|\zeta\|_{L^\infty} < 1, \tag{4.10}$$

где $q = p/(p-1)$. Тогда неравенство (4.9) L^p-устойчиво.

Доказательство. Как следует из условий (2.4), (2.6) и представления (2.5), для оператора $U(t,\gamma) \in \mathcal{L}(X)$ справедливо:

$$U \in L^\infty(0,\infty;L^q(-\infty,0;\mathcal{L}(X))), \quad \int_0^t \|U(t,\gamma)\|^q_{\mathcal{L}(X)}\,d\gamma \in L^\infty_{loc}(0,\infty).$$

Тогда из (4.9) следует, что

$$|x(t)|_X \le g(t) + \int_0^t \|U(t,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}|x(\gamma)|_X\,d\gamma + \int_{-\infty}^0 \|U(t,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}|\xi(\gamma)|_X\,d\gamma$$

почти всюду на $[0,\infty)$. Применяя неравенство Коши – Буняковского, находим:

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_{L^p(0,t;X)} \le \|g(t)\|_{L^p(0,\infty;X)} &+ \\ &+ \left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\infty)} \int_0^t \|U(t,\gamma)\|^q_{\mathcal{L}(X)}\,d\gamma\right)^{1/q} \|x\|_{L^p(0,t;X)} + \\ &+ \|U\|_{L^\infty(0,\infty;L^q(-\infty,0;\mathcal{L}(X)))}\|\xi\|_{L^p(-\infty,0;X)}.\end{aligned}$$

Вследствие выполнения условия (4.10), приходим к требуемому заключению: $x \in L^p(0,+\infty;X)$. □

Привлекая лемму Гронуолла – Беллмана, предыдущий результат можно уточнить в следующей редакции.

Утверждение 4.2. Если для оператора $U(t,\gamma) \in \mathcal{L}(X)$ выполняется условие

$$\max\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\infty)} \int_0^t \|U(t,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}\, d\gamma, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\infty)} \int_t^\infty \|U(t,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}\, d\gamma \right) < 1,$$

то неравенство (4.9) L^2-устойчиво.

Утверждение 4.3. Если $U(t,\gamma) = U(t-\gamma)$, то интегральное неравенство (4.9) L^2-устойчиво при условии, что $U \in L^1(0,\infty;\mathcal{L}(X))$ и $\|U\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(X))} < 1$.

5. Второй метод Ляпунова и основные теоремы устойчивости

Пусть $V(t,z) : [0,\infty) \times M^p(-\infty,0;X) \to R^1$ — непрерывный функционал, определенный на пространстве состояний $M^p(-\infty,0;X)$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ класс непрерывных неубывающих скалярных функций $w(u)$, таких, что $w(0) = 0$ и $w(u) > 0$ при $u > 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $V(t,0) = 0$.

Определение 5.1. Функционал V будем называть положительно определенным, если существует функция $w_1 \in \mathfrak{K}$, при которой будет справедливо неравенство:

$$\left.\begin{array}{c} V(t,z) \geq w_1(|y|), \\ z = (y, x_t = x(t+\cdot)) \in M^p(-\infty,0;X),\ \forall t \geq 0 \end{array}\right\}. \tag{5.1}$$

Определение 5.2. Будем говорить, что функционал V допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая функция $w_2 \in \mathfrak{K}$, что

$$V(t,z) \leq w_2(\|z\|_{M^p(-\infty,0;X)}), \quad \forall t \geq 0. \tag{5.2}$$

Введем в функционале $V(t,z) = V(t,y,x_t(\cdot))$ замену переменных так, чтобы $x_t(\gamma) := x(t+\gamma) \mapsto x(\alpha)$ при $\alpha \in (-\infty,t)$ и выделим в качестве явного аргумента "переменный предел" $\{t\}$ (за счет области изменения $x_t(\cdot) = \{x(\gamma),\ -\infty < \gamma < t\}$). Результат обозначим через $\widetilde{V}(t,\{t\},y,x^t)$.

Пусть далее $z_0 = (y_0, \xi(\cdot))$ — начальное состояние объекта (2.7)–(2.8), где $y_0 \in X$ и $\xi \in L^2(-\infty,0;X)$ определены в (2.9). Обозначим через $y(t) = y(t,z_0)$ и $x_t(\gamma) = x_t(\gamma,z_0)$ — соответствующее решение задачи Коши (2.7)–(2.9), где $x_t(\gamma) = x(t+\gamma)$ при $\gamma \in (-\infty,0)$. Тогда значение функционала $V(t,z) = V(t,y,x_t(\cdot))$ на состоянии $z(t) = (y(t,z_0), x_t(\cdot,z_0))$ исходной задачи будем обозначать через $V[t,y(t),x(t+\cdot)]$.

Предположим, что функционал $V(t,z) = \widetilde{V}(t,\{t\},y,x^t)$ дифференцируем по t, $\{t\}$ и имеет производную Фреше по вектору состояний $z = (y,x_t(\cdot)) \in$

$M^p(-\infty,0;X)$. Тогда полной производной функционала $V(t,z)$ в силу задачи (2.7)–(2.8) назовем следующую функцию:

$$\frac{dV}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V[t+\Delta t,y(t+\Delta t),x(t+\Delta t+\cdot)]-V[t,y(t),x(t+\cdot)]}{\Delta t}. \qquad (5.3)$$

Следуя стандартной процедуре, несложно показать, что

$$\frac{dV}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{V[t+\Delta t,z(t+\Delta)]-V[t,z(t)]}{\Delta t}=\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}+ \\ +\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\{t\}}+\int_{-\infty}^{0}\Big(\nabla_{x_t(\cdot)}\widetilde{V},x_t(\gamma)\Big)_X\,d\gamma+ \\ +(\nabla_y\widetilde{V},\,A(t)y(t)+\int_{-\infty}^{t}G(t,\gamma-t)x(\gamma)\,d\gamma)_X. \qquad (5.4)$$

Однако для идентификации составляющих

$$\partial\widetilde{V}/\partial\{t\}\quad\text{и}\quad\int_{-\infty}^{0}\Big(\nabla_{x_t(\cdot)}\widetilde{V},x_t(\gamma)\Big)_X\,d\gamma$$

в (5.4), приведем некоторые пояснения.

Из предположения о дифференцируемости функционала $V(t,z)$ находим:

$$V[t+\Delta t,z(t+\Delta)]-V[t,z(t)]=\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}\Delta t+ \\ +\Phi[t,y(t),x(t+\cdot),\Delta y,\Delta x_t(\cdot)]+o(\Delta t,\Delta y,\Delta x_t(\cdot)), \qquad (5.5)$$

где $\Delta y=y(t+\Delta t)$, $\Delta x_t=\{x(t+\Delta t+\gamma)-x(t+\gamma)\ :\ -\infty<\gamma<0\}$, Φ — дифференциал Фреше,

$$o(\Delta t,\Delta y,\Delta x_t(\cdot))/\left(|\Delta t|+\|(\Delta y,\Delta x_t(\cdot))\|_{M^p(-\infty,0;X)}\right)\to 0 \\ \text{при}\quad |\Delta t|+\|(\Delta y,\Delta x_t(\cdot))\|_{M^p(-\infty,0;X)}\to 0.$$

Так как Φ — линейный непрерывный оператор относительно $(\Delta y,\Delta x_t(\cdot))\in X\times L^p(-\infty,0;X)$, то, в силу теоремы Рисса, для него имеет место представление:

$$\Phi[t,y(t),x(t+\cdot),\Delta y,\Delta x_t(\cdot)]= \\ =\big(q^0(t),\Delta y(t)\big)_X+\big\langle q^1(t,\cdot),\Delta x_t(\cdot)\big\rangle_{L^q(-\infty,0;X),L^p(-\infty,0;X)}, \qquad (5.6)$$

где обозначено $q^0(t)=\Phi^0[t,y(t),x(t+\cdot)]$, $q^1(t,\cdot)=\Phi^1[t,\cdot,y(t),x(t+\cdot)]$ — производные Фреше функционала $V[t,y(t),x(t+\cdot)]$ относительно аргументов $y=y(t)$ и $x_t(\gamma)=x(t+\gamma)$ $(\gamma\in(-\infty,0))$, соответственно.

Определение 5.3. $V(t,z)=\widetilde{V}(t,\{t\},y,x^t)$ будем называть функционалом Ляпунова, если он дифференцируем по t, $\{t\}$, имеет производную Фреше по вектору состояний $z=(y,x_t(\cdot))\in M^p(-\infty,0;X)$ и представление (5.6) справедливо при

$$q^0(\cdot)\in W^{1,q}_{loc}(0,+\infty;X),\qquad q^1(t,\cdot)\in W^{1,q}_{loc}(-\infty,+\infty;X)\ \text{п.в. при}\ t>0. \qquad (5.7)$$

Теперь установим следующий результат:

Лемма 5.1. *Пусть* $V(t,z):[0,\infty)\times M^p(-\infty,0;X)\to R$ *является функционалом Ляпунова в смысле определения 5.3. Тогда полная его производная в силу уравнений движения* (2.7)–(2.8) *существует и представима в виде:*

$$\frac{dV}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{V[t+\Delta t,z(t+\Delta)]-V[t,z(t)]}{\Delta t}=\frac{\partial V}{\partial t}+ \\ +(\Phi^0[t,y(t),x(t+\cdot)],\,A(t)y(t)+\int_{-\infty}^0 G(t,\gamma)x_t(\gamma)\,d\gamma)_X+ \\ +\big(\Phi^1[t,0,y(t),x(t+\cdot)],y(t)+\int_{-\infty}^0 U(t,t+\gamma)x_t(\gamma)\,d\gamma\big)_X- \\ -\int_{-\infty}^0\big(\frac{\partial\Phi^1[t,\alpha,y(t),x(t+\cdot)]}{\partial\alpha},x_t(\alpha)\big)_X\,d\alpha. \quad (5.8)$$

Доказательство. Пусть и $y(t)$ и $x_t(\cdot)$ — решение задачи Коши (2.7)–(2.9) (в силу исходных предпосылок $f(t)\equiv 0$). Тогда для любой функции $w\in W^{1,q}_{loc}(0,\infty;X)$ имеет место равенство

$$\int_t^{t+\Delta t}\big(w(s),\dot y(s)\big)_X\,ds=\int_t^{t+\Delta t}\big(w(s),A(s)y(s)\big)_X\,ds+ \\ +\int_t^{t+\Delta t}\big(w(s),\int_{-\infty}^0 G(s,\gamma)x_s(\gamma)\,d\gamma\big)_X\,ds.$$

После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$(w(s),y(s))_X|_t^{t+\Delta t}= \\ =\int_t^{t+\Delta t}\big(\frac{d}{ds}w(s),y(s)\big)_X\,ds+\int_t^{t+\Delta t}\big(w(s),A(s)y(s)\big)_X\,ds+ \\ +\int_t^{t+\Delta t}\big(w(s),\int_{-\infty}^0 G(s,\gamma)x_s(\gamma)\,d\gamma\big)_X\,ds. \quad (5.9)$$

Используя тождество

$$\big(q^0(t),\Delta y(t)\big)_X=\big(q^0(t),y(t)\big|_t^{t+\Delta t}\big)_X= \\ =\big(q^0(t),y(t)\big)_X\Big|_t^{t+\Delta t}-\big(q^0(t)\big|_t^{t+\Delta t},y(t+\Delta t)\big)_X \quad (5.10)$$

и положив в (5.9) $w(t)=q^0(t)$, находим:

$$\Phi[t,y(t),x(t+\cdot),\Delta y,\Delta x_t(\cdot)]= \\ =\int_t^{t+\Delta t}\big(\frac{d}{ds}q^0(s),y(s)\big)_X\,ds+\int_t^{t+\Delta t}\big(q^0(s),A(s)y(s)\big)_X\,ds+ \\ +\int_t^{t+\Delta t}\big(q^0(s),\int_{-\infty}^0 G(s,\gamma)x_s(\gamma)\,d\gamma\big)_X\,ds- \\ -\big(q^0(t)\big|_t^{t+\Delta t},y(t+\Delta t)\big)_X+\big\langle q^1(t,\cdot),\Delta x_t(\cdot)\big\rangle_{L^q(-\infty,0;X),L^p(-\infty,0;X)}. \quad (5.11)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\left\langle q^1(t,\cdot), \Delta x_t(\cdot)\right\rangle_{L^q(-\infty,0;X),L^p(-\infty,0;X)} = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma), x(t+\Delta t+\gamma) - x(t+\gamma)\right)_X d\gamma = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma), x(t+\Delta t+\gamma)\right)_X d\gamma - \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma), x(t+\gamma)\right)_X d\gamma = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma-t-\Delta t), \xi(\gamma)\right)_X d\gamma + \int_{0}^{t+\Delta t} \left(q^1(t,\gamma-t-\Delta t), x(\gamma)\right)_X d\gamma - \\
&- \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma-t), \xi(\gamma)\right)_X d\gamma - \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma)\right)_X d\gamma = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma-\cdot)\Big|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma)\right)_X d\gamma + \\
&+ \int_{0}^{t+\Delta t} \left(q^1(t,\gamma-t-\Delta t), x(\gamma)\right)_X d\gamma - \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma)\right)_X d\gamma
\end{aligned} \tag{5.12}$$

и при этом

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{t+\Delta t} \left(q^1(t,\gamma-t-\Delta t), x(\gamma)\right)_X d\gamma = \\
&= \int_{-\Delta t}^{0} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma+\Delta t)\right)_X d\gamma + \\
&+ \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma+\Delta t)\right)_X d\gamma,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

то из (5.12)–(5.13), (5.10) получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\langle q^1(t,\cdot), \Delta x_t(\cdot)\right\rangle_{L^q(-\infty,0;X),L^p(-\infty,0;X)} = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma-\cdot)\Big|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma)\right)_X d\gamma + \\
&+ \int_{-\Delta t}^{0} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma+\Delta t)\right)_X d\gamma + \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\cdot)\Big|_\gamma^{\gamma+\Delta t}\right)_X d\gamma = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(q^1(t,\gamma-\cdot)\Big|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma)\right)_X d\gamma + \int_{-\Delta t}^{0} \left(q^1(t,\gamma-t), x(\gamma+\Delta t)\right)_X d\gamma + \\
&+ \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\cdot-t), x(\cdot)\right)_X\Big|_\gamma^{\gamma+\Delta t} d\gamma - \\
&- \int_{0}^{t} \left(q^1(t,\cdot-t)\Big|_\gamma^{\gamma+\Delta t}, x(\gamma+\Delta t)\right)_X d\gamma.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Поскольку для любой интегрируемой функции ζ имеем:

$$\int_0^t [\zeta(\gamma+\Delta t)-\zeta(\gamma)]\,d\gamma = \int_{\Delta t}^{t+\Delta t}\zeta(\gamma)\,d\gamma - \int_0^t \zeta(\gamma)\,d\gamma = \\ = -\int_0^{\Delta t}\zeta(\gamma)\,d\gamma + \int_t^{t+\Delta t}\zeta(\gamma)\,d\gamma,$$

то

$$\int_0^t \big(q^1(t,\cdot-t),x(\cdot)\big)_X\Big|_\gamma^{\gamma+\Delta t}\,d\gamma = \\ = -\int_0^{\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma + \int_t^{t+\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma.$$

В результате соотношение (5.11) можно переписать в виде:

$$\Phi[t,y(t),x(t+\cdot),\Delta y,\Delta x_t(\cdot)] = \\ = \int_t^{t+\Delta t}\big(\frac{d}{ds}q^0(s),y^0(s)\big)_X\,ds - \big(q^0(t)\big|_t^{t+\Delta t},y(t+\Delta t)\big)_X + \\ + \int_t^{t+\Delta t}\big(q^0(s),A(s)y(s)+\int_{-\infty}^0 G(s,\gamma)x_s(\gamma)\,d\gamma\big)_X\,ds + \\ + \int_{-\infty}^0\big(q^1(t,\gamma-\cdot)\big|_t^{t+\Delta t},\xi(\gamma)\big)_X\,d\gamma - \int_0^t\big(q^1(t,\cdot-t)\big|_\gamma^{\gamma+\Delta t},x(\gamma+\Delta t)\big)_X\,d\gamma + \\ + \int_{-\Delta t}^0\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma+\Delta t)\big)_X\,d\gamma - \int_0^{\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma + \\ + \int_t^{t+\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma. \quad (5.15)$$

Принимая во внимание исходные предположения и условия (5.7) и (2.8), несложно убедиться в справедливости следующих предельных переходов:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_t^{t+\Delta t}\big(\frac{d}{ds}q^0(s),y^0(s)\big)_X\,ds - \big(q^0(t)\big|_t^{t+\Delta t},y(t+\Delta t)\big)_X\right) \overset{\Delta t\to 0}{\to} 0,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^0\big(q^1(t,\gamma-\cdot)\big|_t^{t+\Delta t},\xi(\gamma)\big)_X\,d\gamma \overset{\Delta t\to 0}{\to} -\int_{-\infty}^0\big(\frac{\partial q^1(t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\gamma-t},\xi(\gamma)\big)_X\,d\gamma,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^t\big(q^1(t,\cdot-t)\big|_\gamma^{\gamma+\Delta t},x(\gamma+\Delta t)\big)_X\,d\gamma \overset{\Delta t\to 0}{\to} \int_0^t\big(\frac{\partial q^1(t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\gamma-t},x(\gamma)\big)_X\,d\gamma,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{-\Delta t}^0\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma+\Delta t)\big)_X\,d\gamma - \int_0^{\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma\right] \overset{\Delta t\to 0}{\to} 0,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\big(q^1(t,\gamma-t),x(\gamma)\big)_X\,d\gamma \overset{\Delta t\to 0}{\to} \\ \overset{\Delta t\to 0}{\to} \big(q^1(t,0),y(t)+\int_{-\infty}^0 U(t,t+\gamma)x_t(\gamma)\,d\gamma\big)_X.$$

В результате, подставив (5.15) в соотношение (5.5), и реализовав затем переход к пределу в (5.3) при $\Delta t \to 0$ и приняв во внимание приведенные выше тождества, получим представление для формулы полной производной функционала $V(t,z) : [0,\infty) \times M^p(-\infty,0;X) \to R$ в виде (5.8), что и требовалось установить. □

Для полноты изложения заметим, что полученный результат (см. для сравнения представление (5.4)) приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial\{t\}} = (\Phi^0[t,y(t),x(t+\cdot)],\ A(t)y(t) + \int_{-\infty}^{0} G(t,\gamma)x_t(\gamma)\,d\gamma)_X,$$

$$\int_{-\infty}^{0} \Big(\nabla_{x_t(\cdot)}\widetilde{V}, x_t(\gamma)\Big)_X \,d\gamma = -\int_{-\infty}^{0} \big(\frac{\partial \Phi^1[t,\alpha,y(t),x(t+\cdot)]}{\partial\alpha}, x_t(\alpha)\big)_X\,d\alpha,$$

что говорит о нетривиальности вычисления полной производной для функционалов типа $V(t,z) : [0,\infty) \times M^p(-\infty,0;X) \to R$.

Приведем основные теоремы об устойчивости ИУ (2.1) в смысле определений 4.1–4.2.

Теорема 5.1. *Пусть для ИУ* (2.1) *найдутся функционал Ляпунова* $V(t,z) : [0,\infty)\times M^p(-\infty,0;X) \to R$, *функции* $w_i \in \mathfrak{K}$ $(i = 1,2,3)$ *и постоянная* $k_3 > 0$ *такие, что:*

$$w_1(|y|_X) \le V(t,z) \le w_2(\|z\|_{M^p(-\infty,0;X)}); \tag{5.16}$$

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1.1)} \le w_3(|y|_X); \tag{5.17}$$

$$w_3(|u|) \ge k_3|u|^p \quad \forall\, u \in \mathbb{R}; \tag{5.18}$$

интегральное неравенство (4.9) L^p*-устойчиво.* (5.19)

Тогда ИУ (2.1) *асимптотически устойчиво по состоянию* $z(t)$ *в метрике* $M^p(-\infty,0;X)$.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство (5.17) в пределах от 0 до t. Тогда условия (5.16) и (5.18) гарантируют выполнение следующего неравенства:

$$\int_0^t |y(s)|_X^p\,ds \le k_3^{-1}\,[V(0,y_0,\xi(\cdot)) - V[t,y(t),x_t(\cdot)]] \le Cw_2(\|\xi\|_{M^p(-\infty,0;X)})$$

при некотором $C > 0$ и произвольном $t > 0$. Откуда следует, что функция $y(t) = y(t,y_0,\xi(\cdot))$, как единственное решение задачи Коши (2.7)–(2.9) в классе $W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X)$, удовлетворяет включению $y \in L^p(0,\infty;X)$. Следовательно, в силу непрерывности вложения $W^{1,p}_{loc}(0,\infty;X) \hookrightarrow C_{loc}([0,\infty);X)$, имеем $\lim_{t\to\infty}|y(t)|_X = 0$. Теперь заметим, что с точностью до подмножества меры ноль, на множестве $[0,+\infty)$ выполняется интегральное равенство (2.8). Переходя в нем к неравенству, получим:

$$\big|x(t) - \int_{-\infty}^{t} U(t,\gamma)x(\gamma)\,d\gamma\big|_X \le |y(t)|_X, \quad \forall\, t > 0.$$

Откуда, в силу условия (5.19), находим $x \in L^p(0,\infty;X)$. Следовательно,

$$\sup_{t>0} \|z(t)\|_{M^p(-\infty,0;X)} = \sup_{t>0} \left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^0 |x(t+\alpha)|_X^p \, d\alpha \right)^{1/p} < +\infty,$$

тем самым теорема доказана. □

Теорема 5.2. *Пусть в* (2.7) *имеют место декомпозиция* $A(t) = A + A_1(t)$ *и операторное уравнение* $A^*\Pi + \Pi A = -I_X$ *своим решением имеет самосопряженный положительно определенный оператор* $\Pi \in \mathcal{L}(X)$. *Тогда, если:*
1) $\xi = 0$*; 2)* $A_1 \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(X))$*;*
3) $U(t,\gamma) = U(t-\gamma)$, $U \in L^1(0,\infty;\mathcal{L}(X)) \cap L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(X))$*;*
4) $\widetilde{G} \in L^\infty(I(0,\infty);\mathcal{L}(X))$, $\int_0^t \|\widetilde{G}(t,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}\, d\gamma \in L^\infty(0,\infty)$,
$\operatorname*{ess\,sup}_{[0,\infty)} \int_t^\infty \|\widetilde{G}(\gamma,t)\|\, d\gamma < \infty$, *где* $\widetilde{G}(\gamma,t) = G(t,\gamma-t)$*;*
5) $\delta = \|\Pi\|(2\|A_1\|_{L^\infty} + \operatorname*{ess\,sup}_{[0,\infty)} \int_0^t \|\widetilde{G}(\gamma,t)\|\, d\gamma) < 1$*;*
6) $\tau = \|U\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(X))} + \sqrt{(1-\delta)^{-1}} \operatorname*{ess\,sup}_{[0,\infty)} \int_t^\infty \|\widetilde{G}(\gamma,t)\|\, d\gamma < 1$,
то интегральное уравнение (2.1) *асимптотически устойчиво по состоянию* $z(t)$ *в метрике* $M^2(-\infty,0;X)$.

Для доказательства достаточно функционал Ляпунова выбрать в виде

$$V(t,z) = (y,\Pi y)_X + \int_t^\infty \|\Pi\|_{\mathcal{L}(X)} \int_{-s}^0 \|G(s,\gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} |x(s+\gamma)|_X^2 \, d\gamma ds$$

и показать, что условия 1)–6) гарантируют выполнение всех предпосылок теоремы 5.1 (см., напр., [2, 13, 15]).

Библиографические ссылки

1. *Верлань А. Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы/ А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков.— К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальный синтез для уравнений нейтрального типа/ А. И. Егоров, П. И. Когут. Докл. АН УССР. Сер. А., 1989, № 5.— С. 64–67.
3. *Колмановский В. Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием/ В. Б. Колмановский, В. Р. Носов.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач/ Ж.-Л. Лионс.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
5. *Месарович М.* Общая теория систем: математические основы/ М. Месарович, Я. Такахара.— М. : Мир, 1978.— 311 с.
6. *Подгаецкий Э. М.* Построение аппроксимаций решения нелинейного интегрального уравнения с оценкой погрешности в задачах о тепло- и массообмене/ Э. М. Подгаецкий. ЖВМ и МФ, Том.18, № 1.— С. 226–232.
7. *Appleby J. A. D.*, Almost sure asymptotic stability of stochastic Volterra integro-differential equations with fading perturbations/ J. A. D. Appleby, M. Riedle. A. Stoch. Anal. Appl., Volume 24, Number 4, 2006, p. 813–826.

8. *Burton T. A.* Volterra integral and differential equations/ T. A. Burton.— Mathematics in Science and Engineering, Elsevier, Amsterdam, Vol.202, 2005.
9. *Burton T. A.*, Stability by decompositions for Volterra equation/ T. A. Burton, W. E. Manfoud. Tohoku Math.J., Number 37, 1985, p. 270–284.
10. *Cahlon B.*, On the numerical stability of Volterra integral equations with delay argument/ B. Cahlon. Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 33, Issue 1, 1990, p. 97–104.
11. *Delfour M. C.*, Status of state theory of linear hereditary differential systems with delays in state and control variables/ M. C. Delfour. Lecture Notes Control. Inform. Sci., No. 28, 1980, p. 83–96.
12. *Delfour M. C.*, State space theory of linear time invariant systems with delay in state, control and observation variables/ M. C. Delfour, J. Karrakchou. J.Math.Anal.Appl., Volume 12, 1987, p. 361–450.
13. *Egorov A. I.*, On the state stability of a system of integro-differential equations of non-stationary aero-elasticity/ A. I. Egorov, P. I. Kogut. J.of Mathematical Sciences (Springer, New York), Volume 70, No. 1, 1994, p. 1578–1585.
14. *Islam M. N.*, Stability in linear Volterra integrodifferential equations with nonlinear perturbation/ M. N. Islam, Y. N. Raffoul. J. Integral Equations Appl., Volume 17, Number 3, 2005, p. 259–276.
15. *Kogut P. I.*, State exponential stability of a denumerable system of the Volterra integral equations/ P. I. Kogut. Sov. J. Autom. Inf. Sci., Volume 24, Number 5, 1991, p. 37–46.
16. *Miller R. K.*, Asymptotic behavior for a linear Volterra integral equation in Hilbert space/ R. K. Miller. J.Differential Equations, Number 23, 1977, p. 270–284.
17. *Rodkina A. E.*, On asymptotic behaviour of solutions of stochastic difference equations with Volterra type main term/ A. E. Rodkina, X. Mao, V. Kolmanovskii. Stoch. Anal. Appl., Volume 18, Number 5, 2000, p. 837–857.
18. *Soon-Mo Jung*, A fixed point approach to the stability of a Volterra integral equation/ Soon-Mo Jung. Fixed Point Theory and Applications, 2007, Article ID 57064, doi:10.1155/ 2007/ 57064.
19. *Sanyal S.*, A sufficient condition for the mean square stability of Ito-Volterra dynamic equation/ S. Sanyal. Nonlinear Analysis and Applications, 2011, (to appear).

Надійшла до редколегії 25.01.2011