ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 30–54

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.91

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49010.*

Рассматривается первая краевая задача для телеграфного уравнения на отрезке, один конец которого является подвижным. Разработан метод решения такой задачи и получено ее точное решение. Этот метод основан на интегральном представлении решений телеграфного уравнения и обобщении метода отражений применительно к областям с переменной границей. Рассмотрены варианты движения подвижного конца с дозвуковой, звуковой и сверхзвуковой скоростями, а также с произвольной скоростью.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, область с подвижной границей.

Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. Кроме того, область, в которой требуется найти решение телеграфного уравнения, может изменяться во времени. Такая ситуация возникает, например, при наматывании подъемного каната грузоподъемных механизмов на барабан. Дело в том, что при учете сил трения между канатом и барабаном упругие перемещения в той части каната, которая намотана на барабан, описываются телеграфным уравнением. Длина же каната, намотанного на барабан, изменяется со временем.

Такого рода краевые задачи для канатов переменной длины принципиально были поставлены рядом исследователей [1]. Однако их решение в предположении о малой скорости намотки каната на барабан отыскивалось в областях с неизменной границей. В настоящей статье строится решение такой задачи в области с переменной границей. С целью решения такого рода задачи в [2,5] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Для использования интегрального представления решения потребовалось разработать метод продолжения краевых условий на всю числовую ось [3,4]. Наконец, был создан метод построения

© В.А. Остапенко, 2011

отраженных волн от подвижного конца [6]. Сочетание перечисленных методов позволило получить решение рассматриваемой задачи в квадратурах.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > 0$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0 \ , \qquad (1.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad x > 0 \ ; \qquad (1.2)$$

и краевым условиям первого типа

$$u(l + \nu(t), t) = \mu(t); \quad u(0,t) = 0, \quad t > 0. \qquad (1.3)$$

Относительно функции $\nu(t)$, описывающей перемещение нижнего конца стержня, предполагается, что $\nu(0) = 0$ и из условия сохранения области интегрирования краевой задачи следует, что $\nu(t) > -l$ при $t > 0$.

Применительно к наматыванию каната на барабан эту задачу можно физически интерпретировать следующим образом. Канат рассматривается как гибкая нить. Ось x направлена вдоль центральной оси каната и начало координат расположено в точке прикрепления каната к барабану. Поэтому упругое перемещение в точке $x = 0$ $u(0,t) = 0$. В начальный момент времени длина каната, намотанного на барабан, равна l. Функция $\nu(t)$ описывает изменение длины каната на барабане. Точка контакта свисающей части каната с барабаном имеет координату $x = l + \nu(t)$. Первое краевое условие (1.3) задает упругое перемещение в этой точке каната. Начальные условия приняты нулевыми.

2. Решение задачи

Для применения разработанного в [2] интегрального представления решений телеграфного уравнения (1.1) необходимо определить краевые условия (1.3) на всей оси t. Так как в краевом условии (1.3) функция $\mu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t. Учитывая нулевые начальные условия (1.2), функцию $\mu(t)$ на всю ось t необходимо продолжать нулем. Поэтому продолжение функции $\mu(t)$ на всю ось t будет выглядеть следующим образом:

$$M(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Первое краевое условие (1.3) также продолжается на всю ось t:

$$u(l + \nu(t), t) = M(t). \qquad (2.2)$$

Решение поставленной задачи основано на установленном в [2] факте, что в случае краевых условий первого типа решением дифференциального уравнения (1.1) является функция

$$u(x,t) = e^{\frac{Da-B}{2}x}\omega(t-\frac{x}{a}) + e^{-\frac{Da+B}{2}x}\omega(t+\frac{x}{a}) +$$
$$+ ae^{-\frac{B}{2}x}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}\omega(\eta)\,d\eta$$

с произвольной функцией $\omega(\eta)$. Учитывая, что по условиям постановки задачи волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных x, на начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u_0(x,t) = 2M_0(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_0(\eta)\,d\eta \quad (2.3)$$

с неизвестной функцией $M_0(t)$. Здесь $J_0(z), J_1(z)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно,

$$z = \sqrt{c_1[x^2 - a^2\,(t-\eta)^2]}\ ; \quad (2.4)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2\,a^2}{4} - \frac{B^2}{4}\ . \quad (2.5)$$

Функция (2.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) при произвольной функции $M_0(t)$.

Подстановка формы решения (2.3) в краевое условие (2.2) приводит к равенству

$$2M_0(t+\frac{\nu(t)+l}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(\nu(t)+l)} +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}(\nu(t)+l)}\int_0^{t+\frac{\nu(t)+l}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{\nu(t)+l}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_0(\eta)\,d\eta\ . \quad (2.6)$$

В (2.6)

$$z = \sqrt{c_1[(\nu(t)+l)^2 - a^2\,(t-\eta)^2]}\ ; \quad (2.7)$$

Таким образом, если функция M_0 будет решением интегрального уравнения (2.6), функция (2.3) будет удовлетворять первому краевому условию (1.3).

С целью получения возможности представления функции M_0 с различными аргументами введем в (2.6) преобразование переменной t:

$$\tau = t + \frac{\nu(t)+l}{a}\ . \quad (2.8)$$

Для того чтобы выполнение преобразования (2.8) в интегральном уравнении (2.6) было возможным, необходимо, чтобы существовала обратная к τ

функция t_0. Поэтому необходимо рассмотреть различные варианты поведения функции $\nu(t)$.

2.1. Движение подвижного конца с дозвуковой скоростью

В случае, когда подвижный конец перемещается с дозвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\nu'(t)| < a \, , \tag{2.9}$$

из (2.8) следует:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\nu'(t)}{a} > 0 \, . \tag{2.10}$$

Это значит, что функция (2.8) будет строго монотонно возрастающей, и поэтому будет существовать обратная к ней функция t_0, также строго монотонно возрастающая. При этом, так как $\tau(0) = l/a$, получаем, что $t_0(l/a) = 0$. Из неравенства (2.10) следует, что $\tau > l/a$ при $t > 0$. Так как функция $\nu(t)$ определена только при $t > 0$, функция $\tau(t)$ определена также только при $t > 0$. Соответственно и функция $t_0(\tau)$ будет определена только при $\tau > l/a$. В то же время в процессе построения решения рассматриваемой краевой задачи возникает необходимость знания поведения функции $M_0(\tau)$ также и при значениях аргумента τ, меньших l/a.

С этой целью необходимо выполнить продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t. Оказывается, что продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t можно выполнить произвольно, потребовав лишь существования производной этого продолжения на всей оси t и выполнения на всей оси t условия (2.9). Обозначим это продолжение функции $\nu(t)$ через $\nu_1(t)$. Тогда на всей оси t будет определена функция

$$N\left(t\right) = \begin{cases} \nu\left(t\right), & t > 0; \\ \nu_1\left(t\right), & t < 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Продолженную на всю ось t функцию $\tau(t)$ обозначим $T(t)$ и определим выражением

$$T(t) = t + \frac{N(t) + l}{a} \, . \tag{2.12}$$

Из этого выражения и (2.11) ясно, что при $t > 0$ $T(t) = \tau(t)$. Так как по условию функция $N(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|N'(t)| < a \, , \tag{2.13}$$

при всех t, функция $T(t)$ будет строго монотонно возрастающей, и так как $\tau(0) = l/a$, при $t < 0$ будет справедливо $T(t) < l/a$.

В силу того, что функция $T(t)$ является строго монотонной при всех t, для нее существует обратная функция $T_0(T)$, причем при $T \geq l/a$ $T_0(T) = t_0(\tau)$

и $T_0(T)$ будет строго монотонно возрастающей функцией. Таким образом, функция $T_0(T)$ удовлетворяет условию

$$T_0\,(t) = \begin{cases} t_0\,(\tau) > 0, & T > l/a; \\ 0, & T = l/a; \\ < 0, & T < l/a. \end{cases} \tag{2.14}$$

Теперь после выполнения преобразования (2.12) интегральное уравнение (2.6) примет вид:

$$M_0(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+N(T_0(T)))} + ae^{-\frac{B}{2}(l+N(T_0(T)))}\int_0^T [\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+N(T_0(T))}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)}M_0(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2}M(T_0(T))\ . \tag{2.15}$$

В интегральном уравнении (2.15)

$$z = \sqrt{c_1[(l+N(T_0(T)))^2\, - a^2\,(T_0(T)-\eta)^2]}. \tag{2.16}$$

Из интегрального уравнения (2.15), свойства (2.1) функции $M(t)$ и равенства (2.14) следует, что

$$M_0(T) = 0, \quad T < \frac{l}{a}\ . \tag{2.17}$$

В свою очередь, из свойства (2.17) функции $M_0(T)$ следует, что функция (2.3) удовлетворяет начальным условиям (1.2). Действительно, из формулы (2.3) непосредственно следует, что при $t = 0$ аргумент функции M_0 и верхний предел интегрирования становятся равными $\frac{x}{a}$. А так как при $t = 0$ $x < l$, это на основании свойства (2.17) функции $M_0(T)$ означает, что при $t = 0$ функция (2.3) будет равна нулю, то есть удовлетворяет первому начальному условию (1.2). Продифференцировав функцию (2.3) по t, получим:

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} = 2M_0'(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{Da+B}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}[\frac{B}{2}J_0(z_0) - c_1\frac{x}{z}J_1(z_0)]e^{-\frac{Da}{2}x}M_0(t+\frac{x}{a}) + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}\{\frac{Da^2}{2}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)] + \frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-\eta}{z}J_1(z) - \\ - a^2c_1^2\frac{x(t-\eta)}{z^2}(J"_0(z) - \frac{J_0'(z)}{z})\}e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_0(\eta)\,d\eta. \tag{2.18}$$

В формуле (2.18)

$$z_0 = \sqrt{c_1[x^2 - x^2]} = 0\ . \tag{2.19}$$

При вычислении производной (2.18) учтено, что в соответствии с (2.7)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1a^2(t-\eta)}{z}\ ; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{c_1 a^2(t-\eta)}{z} J_1(z) \ ; \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{J_1(z)}{z}) = \frac{c_1 a^2(t-\eta)}{z^2}(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z}) \ , \tag{2.22}$$

Если в формуле (2.18) принять $t = 0$, то аргументы функций M_0 и M_0', а также верхний предел интегрирования при $x < l$ станут меньшими, чем l/a. Поэтому на основании свойства (2.17) функции M_0 производная (2.18) при $t = 0$ обратится в нуль. А это означает, что функция (2.3) будет удовлетворять и второму начальному условию (1.2).

Таким образом, функция (2.2) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). С целью проверки этого условия вычислим из (2.3):

$$u_0(0,t) = 2M_0(t) + 2a\int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_0(\eta)\, d\eta. \tag{2.23}$$

Из формулы (2.23) следует, что на основании свойства (2.17) функции M_0 функция (2.3) при $t < \frac{l}{a}$ будет удовлетворять также и второму краевому условию (1.3). С целью удовлетворения второму краевому условию (1.3) при $t > \frac{l}{a}$ решение краевой задачи станем искать в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = u_0(x.t) + u_1(x,t) \ , \tag{2.24}$$

где

$$u_1(x,t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_1(t-\frac{x}{a}) + M_0(t-\frac{x}{a})] + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_1(\eta) - M_0(\eta)]\, d\eta \ . \tag{2.25}$$

Функция (2.25) удовлетворяет уравнению (1.1) с произвольными функциями M_0 и M_1. Подставляя функцию (2.24) во второе краевое условие (1.3), получим:

$$2[-M_1(t) + 2M_0(t)] + 2a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_1(\eta)\, d\eta = 0 \ ,$$

откуда следует:

$$M_1(t) - a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_1(\eta)\, d\eta = 2M_0(t) \ . \tag{2.26}$$

Таким образом, если функция M_1 будет решением интегрального уравнения (2.26), функция (2.24) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t. В уравнении (2.26)

$$z = a(t-\eta)\sqrt{-c_1} \ . \tag{2.27}$$

Из уравнения (2.26) и свойства (2.17) функции M_0 следует, что функция M_1 обладает свойством

$$M_1(T) = 0, \quad T < \frac{l}{a} \ . \tag{2.28}$$

Пользуясь свойствами (2.17) и (2.28) функций M_0 и M_1, так же, как и для функции $u_0(x,t)$ можно проверить, что функция (2.24) удовлетворяет начальным условиям (1.2).

Для того чтобы функция (2.24) удовлетворяла первому краевому условию (1.3), необходимо, чтобы функция $u_1(x,t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_1(l+\nu(t), t) = 0, \ t > 0 \ . \tag{2.29}$$

Вычислим значение функции $u_1(x,t)$ в точке $x = l + \nu(t)$. Получим:

$$u_1(l+\nu(t),t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))}[-M_1(t - \frac{l+\nu(t)}{a}) + M_0(t - \frac{l+\nu(t)}{a})] +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}} [\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l+\nu(t)}{z} J_1(z)] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \times$$
$$\times [M_1(\eta) - M_0(\eta)]\, d\eta \ . \tag{2.30}$$

Из свойств (2.17) и (2.28) функций M_0 и M_1 и равенства (2.30) следует, что краевое условие (2.29) будет удовлетворено при

$$t < \frac{\nu(t) + 2l}{a} \ . \tag{2.31}$$

Действительно, при значениях t, удовлетворяющих неравенству (2.31), аргументы функций M_0 и M_1 и верхний предел интегрирования в формуле (2.30) будут меньше, чем $\frac{l}{a}$, и поэтому правая часть равенства (2.31) обратится в нуль. При $t > \frac{\nu(t)+2l}{a}$ для удовлетворения первому краевому условию (1.3) в решение (2.24) необходимо вводить поправку. Ввести такую поправку методами, применяемыми для областей с неподвижными границами, как показано в [6] для случая волнового уравнения, невозможно. Поэтому для введения поправки используется подход, разработанный в [6, 7]. С этой целью заметим, что в течение интервала времени, определяемого условием $t = \frac{\nu(t)+2l}{a}$, передний фронт волны, излученной подвижным концом, начиная от момента времени $t = 0$, дойдет до конца $x = 0$, отразится от него и встретится с подвижным концом. Длина этого интервала времени определится как наименьший положительный корень τ_1 уравнения

$$at = \nu(t) + 2l \ . \tag{2.32}$$

Левая часть уравнения (2.32) при $t = 0$ меньше правой части. В то же время на основании условия (2.9) при $t > 0$ левая часть этого уравнения растет быстрее правой части. Следовательно, положительный корень уравнения (2.30) существует. Из проведенных рассуждений ясно также, что функция

(2.30) будет равна нулю при $t < \tau_1$. Действительно, при $t = 0$ неравенство $t < \frac{\nu(t)+2l}{a}$ справедливо, так как $\nu(0) = 0$. В то же время τ_1 является наименьшим положительным числом, при котором это неравенство обращается в равенство (2.32). Поэтому поправочная функция $u_2(x,t)$, являющаяся по существу волной, отраженной от подвижного конца, строится как решение вспомогательной краевой задачи: в области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > \tau_1$ найти решение телеграфного уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\tau_1) = 0; \quad u_t(x,\tau_1) = 0, \quad 0 < x < l + \nu(\tau_1)\ ; \tag{2.33}$$

и краевым условиям

$$u(l+\nu(t),t) = -u_1(l+\nu(t),t); \quad u(0,t) = 0, \quad t > \tau_1. \tag{2.34}$$

Решение этой вспомогательной краевой задачи строится в виде функции, являющейся решением уравнения (1.1) при произвольной функции M_2:

$$u_2(x,t) = 2M_2(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_2(\eta)\,d\eta\ . \tag{2.35}$$

Подставив функцию (2.35) в первое краевое условие (2.34), получим:

$$2M_2(t+\frac{l+\nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_2(\eta)\,d\eta = -u_1(l+\nu(t),t)\ . \tag{2.36}$$

Таким образом, если функция M_2 будет решением интегрального уравнения (2.36), то функция

$$u(x,t) = u_0(x.t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{2.37}$$

будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t. Выполнив в уравнении (2.36) преобразование (2.12), получим:

$$2M_2(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + +2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))}\int_0^T[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(T_0(T))}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)}M_2(\eta)\,d\eta = \\ = -u_1(l+\nu(T_0(T)),T_0(T))\ . \tag{2.38}$$

Так как правая часть интегральных уравнений (2.36) и (2.38) равна нулю при $t < \tau_1$, функция $M_2(T)$ также будет равна нулю при $t < \tau_1$. Выясним, при каких значениях T функция $M_2(T)$ будет равна нулю. Поскольку функция $T(t)$ строго монотонно возрастает, будет справедливо неравенство

$$T(t) < T(\tau_1) \text{ при } t < \tau_1\ . \tag{2.39}$$

Используя в этом неравенстве определение (2.12) функции $T(t)$ и значение τ_1 из (2.32), получим:

$$T < \tau_1 + \frac{\nu(\tau_1)+l}{a} = \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a} \ .$$

Таким образом, функция $M_2(T)$ обладает следующим свойством:

$$M_2(T) = 0, \quad T < \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a} \ . \tag{2.40}$$

Если теперь положить в равенстве (2.35) $t = 0$, то аргумент функции M_2 и верхний предел интегрирования в этой формуле примут значение $\frac{x}{a}$. Учитывая, что при $t = 0 \quad x < l$, будем иметь, что $\frac{x}{a} < \frac{l}{a}$. Но так как $l > \nu(\tau_1)$, получим, что

$$\frac{l}{a} < \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a} \ . \tag{2.41}$$

Это значит, что при $t = 0$ функция (2.35) обратится в нуль, то есть будет удовлетворять первому начальному условию (1.2).

Вычислив производную функции (2.35) по t, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} &= 2M_2'(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{Da+B}{2}x} + \\ &+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}[\frac{B}{2}J_0(z_0) - c_1\frac{x}{z_0}J_1(z_0)]e^{-\frac{Da}{2}x}M_2(t+\frac{x}{a}) + \\ &+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}\{\frac{Da^2}{2}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)] + \frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-\eta}{z}J_1(z) - \\ &- a^2c_1^2\frac{x(t-\eta)}{z^2}(J"_0(z) - \frac{J_0'(z)}{z})\}e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_2(\eta)\,d\eta.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Здесь z_0 определяется равенством (2.19). При $t = 0$ аргументы функций M_2 и M_2', а также верхний предел интегрирования в формуле (2.42) примут значение $\frac{x}{a}$. Следовательно, как показано выше, в области отыскания решения при таких значениях аргумента функции M_2 и M_2' будут равны нулю. Поэтому и производная функции $u_2(x,t)$ по t при $t = 0$ будет равна нулю. А это значит, что функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет также и второму начальному условию (1.2).

Таким образом, функция (2.37) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). Для того чтобы это краевое условие выполнялось, необходимо, чтобы было справедливым равенство

$$u_2(0,t) = 0, \ t > 0 \ . \tag{2.43}$$

Положив в формуле (2.35) $x = 0$, получим:

$$u_2(0,t) = 2M_2(t) + 2a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z_0)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_2(\eta)\,d\eta \ . \tag{2.44}$$

Как следует из свойства (2.40) функции M_2, выражение (2.44) обратится в нуль, то есть будет удовлетворять краевому условию (2.43) только при выполнении неравенства $t < \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a}$. Для выполнения второго краевого условия при больших t в решение (2.37) вводится поправка $u_3(x,t)$, то есть решение представляется в виде:

$$u(x,t) = u_0(x.t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) \ , \tag{2.45}$$

где

$$u_3(x,t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_3(t-\frac{x}{a}) + M_2(t-\frac{x}{a})] + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_3(\eta) - M_2(\eta)]\,d\eta \ . \tag{2.46}$$

Функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при произвольных функциях M_2 и M_3 и должна обеспечить выполнение краевого условия

$$u_2(0,t) + u_3(0,t) = 0, \ t > 0 \ . \tag{2.47}$$

Подстановка функций (2.35) и (2.46) в краевое условие (2.47) приводит к равенству

$$2[-M_3(t) + 2M_2(t)] + 2a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_3(\eta)\,d\eta = 0 \ ,$$

откуда следует:

$$M_3(t) - a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_3(\eta)\,d\eta = 2M_2(t) \ . \tag{2.48}$$

Таким образом, если функция M_3 будет решением интегрального уравнения (2.48), функция (2.45) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t. Из свойства (2.40) функции M_2 следует, что функция M_3 будет обладать следующим свойством:

$$M_3(t) = 0, \quad t < \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a} \ . \tag{2.49}$$

Точно так же, как это сделано для функции $u_2(x,t)$, можно показать, что функция $u_3(x,t)$ будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Таким образом, функция (2.45) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме первого краевого условия (1.3). Для того, чтобы это краевое условие выполнялось, необходимо, чтобы было справедливым равенство

$$u_3(l + \nu(t), t) = 0, \ t > 0 \ . \tag{2.50}$$

Положив в формуле (2.46) $x = l + \nu(t)$, получим:

$$u_3(l+\nu(t),t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))}[-M_3(t-\frac{l+\nu(t)}{a}) + M_2(t-\frac{l+\nu(t)}{a})]+$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}\times$$
$$\times [M_3(\eta) - M_2(\eta)]\, d\eta\ . \quad (2.51)$$

На основании свойств (2.40) и (2.49) функций M_2 и M_3 заключаем, что правая часть равенства (2.51) будет равна нулю, если аргумент функций M_2 и M_3 и верхний предел интегрирования в формуле (2.51) будут удовлетворять неравенству

$$t - \frac{\nu(\tau_1)+l}{a} < \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a}\ ,$$

откуда следует

$$t < \frac{4l+2\nu(\tau_1)+\nu(t)}{a}\ . \quad (2.52)$$

Следовательно, при t, удовлетворяющих неравенству (2.52), краевое условие (2.50) будет выполнено. Неравенство (2.52) неудобно для использования, так как от t зависят его левая и правая части. С целью более удобного использования этого неравенства рассмотрим уравнение

$$t = \frac{4l+2\nu(\tau_1)+\nu(t)}{a}\ . \quad (2.53)$$

и обозначим через τ_2 его наименьший положительный корень. При $t = 0$ правая часть уравнения (2.53) больше левой. В то же время в силу условия (2.9) правая часть уравнения (2.53) возрастает быстрее левой его части, поэтому положительный корень уравнения (2.53) существует. Следовательно, число τ_2 является наименьшим положительным числом, при котором неравенство (2.52) обращается в равенство. Поэтому неравенство (2.52) эквивалентно неравенству

$$t < \frac{4l+2\nu(\tau_1)+\nu(\tau_2)}{a} = \tau_2\ . \quad (2.54)$$

Заметим, что по физическому смыслу краевой задачи в момент времени $t = \tau_2$ передний фронт волны, излученной подвижным концом, дважды отразившись от неподвижного конца и один раз отразившись от конца подвижного, повторно встретится с подвижным концом. При $t > \tau_2$ функция $u_3(x,t)$ уже не будет удовлетворять краевому условию (2.50). Поэтому при $t > \tau_2$ решение основной краевой задачи отыскивается в виде:

$$u(x,t) = u_0(x.t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t)\ , \quad (2.55)$$

где функция $u_4(x,t)$ строится как решение следующей вспомогательной краевой задачи. В области $0 < x > l+\nu(t)$, $t > \tau_2$ найти решение телеграфного уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\tau_2) = 0; \quad u_t(x,\tau_2) = 0, \quad 0 < x < l+\nu(\tau_2)\ ; \quad (2.56)$$

и краевым условиям

$$u(l+\nu(t),t) = -u_3(l+\nu(t),t); \quad u(0,t)=0, \quad t>\tau_2. \tag{2.57}$$

Решение этой вспомогательной краевой задачи строится в виде функции, являющейся решением уравнения (1.1) при произвольной функции M_4:

$$u_4(x,t) = 2M_4(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_4(\eta)\,d\eta\ . \tag{2.58}$$

Подставив функцию (2.58) в первое краевое условие (2.57), получим:

$$2M_4(t+\frac{l+\nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_4(\eta)\,d\eta = -u_3(l+\nu(t),t)\ . \tag{2.59}$$

Таким образом, если функция M_4 будет решением интегрального уравнения (2.59), то функция (2.55) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t. Выполнив в уравнении (2.59) преобразование (2.12), получим:

$$2M_4(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + +2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))}\int_0^{T}[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(T_0(T))}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)}M_4(\eta)\,d\eta = -u_3(l+\nu(T_0(T)),T_0(T))\ . \tag{2.60}$$

Так как правая часть интегральных уравнений (2.59) и (2.60) равна нулю при $t<\tau_2$, функция $M_4(T)$ также будет равна нулю при $t<\tau_2$. Выясним, при каких значениях T функция $M_4(T)$ будет равна нулю. Поскольку функция $T(t)$ строго монотонно возрастает, будет справедливо неравенство

$$T(t) < T(\tau_2) \text{ при } t<\tau_2\ . \tag{2.61}$$

Используя в этом неравенстве определение (2.12) функции $T(t)$ и значение τ_2 из (2.53), получим:

$$T < \tau_2 + \frac{\nu(\tau_2)+l}{a} = \frac{5l+2\nu(\tau_1)+2\nu(\tau_2)}{a}\ .$$

Таким образом, функция $M_4(T)$ обладает следующим свойством:

$$M_4(T)=0, \quad T<\frac{5l+2\nu(\tau_1)+2\nu(\tau_2)}{a}\ . \tag{2.62}$$

Точно так же, как это сделано для функции $u_2(x,t)$, можно показать, что функция $u_4(x,t)$ будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Таким образом, функция (2.55) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). Этому краевому условию функция $u_4(x,t)$ будет удовлетворять лишь при некоторых $t > \tau_2$. Для того чтобы получить решение основной краевой задачи при больших t, в функцию (2.55) нужно вводить дополнительную поправку.

Продолжив процесс введения поправок в решение, получим, что функция

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\{2M_{2n}(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)d\eta\} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\{2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_{2n+1}(t-\frac{x}{a}) + M_{2n}(t-\frac{x}{a})] + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)]d\eta\}. \quad (2.63)$$

будет решением рассматриваемой краевой задачи. Здесь функция M_0 является решением интегрального уравнения (2.15), а остальные функции M_n являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$2M_{2n}(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + +2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))}\int_0^T[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(T_0(T))}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)}M_{2n}(\eta)\,d\eta = \\ = -u_{2n-1}(l+\nu(T_0(T)), T_0(T)) \ . \quad (2.64)$$

$$M_{2n+1}(t) - a\int_0^t \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n+1}(\eta)\,d\eta = 2M_{2n}(t) \ . \quad (2.65)$$

Здесь

$$u_{2n-1}(l+\nu(t),t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))}[-M_{2n-1}(t-\frac{l+\nu(t)}{a}) + \\ + M_{2n-2}(t-\frac{l+\nu(t)}{a})] - 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - \\ - c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n-1}(\eta) - M_{2n-2}(\eta)]\,d\eta \ .$$

При этом функции M_n обладают следующими свойствами:

$$M_{2n} = M_{2n+1}(t) = 0, \quad t < \frac{(2n+1)l + 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)}{a} \quad n = 0, 1, \dots \ , \quad (2.66)$$

где τ_n — наименьший положительный корень уравнения

$$t = \frac{2nl + 2\sum_{i=1}^{n-1}\nu(\tau_i) + \nu(t)}{a} \ . \quad (2.67)$$

В силу этих свойств при каждом фиксированном $t = H$ в формуле (2.63) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (2.63) каждое из слагаемых при выполнении условий (2.62) становится равным нулю, если аргумент функции M_n и верхний предел интегрирования меньше правой части неравенства (2.66). Для первой суммы в формуле (2.63) такое условие при $t = H$ имеет вид:

$$H + \frac{x}{a} < \frac{(2n+1)l + 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)}{a} \ ,$$

откуда следует:

$$n > \frac{1}{2l}[Ha + x - l - 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)] \ .$$

А так как в области отыскания решения выполняется неравенство

$$0 < x < l + \nu(H) \ , \tag{2.68}$$

получаем, что при всех n, удовлетворяющих условию

$$n > \frac{1}{2l}[Ha + \nu(H) - 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)], \tag{2.69}$$

все слагаемые в первой сумме формулы (2.63) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (2.63) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до $N-1$, где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.69).

Для второй суммы в формуле (2.63) условие того, что аргумент функции M_n и верхний предел интегрирования меньше правой части неравенства (2.66)) при $t = H$ имеет вид: $H - \frac{x}{a} < \frac{(2n+1)l+2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)}{a}$, откуда следует: $n > \frac{1}{2l}[Ha - x - l - 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)]$. Поэтому на основании неравенства (2.69)) получаем, что при всех n, удовлетворяющих условию

$$n > \frac{1}{2l}[Ha - l - 2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_i)], \tag{2.70}$$

все слагаемые во второй сумме формулы (2.63) будут равны нулю. Иными словами, суммирование во второй сумме формулы (2.63) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до N_1-1, где N_1 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.70)). Все слагаемые в формуле (2.63) являются решениями уравнения (1.1). А так как для каждого фиксированного t число слагаемых в формуле (2.63) конечно, дифференцирование в формуле (2.63) можно выполнять почленно. Поэтому функция (2.63) является решением уравнения (1.1).

Из формулы (2.63) непосредственно следует, что при $t = 0$ и $0 < x < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы функций M_k становятся меньшими, чем l/a. Значит, на основании свойств (2.66) функций

M_k получаем из (2.63): $u(x,0) = 0$. Таким образом, функция (2.63) удовлетворяет первому начальному условию (1.2).

Продифференцируем функцию (2.63) по t. Получим:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ 2M'_{2n}(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{Da+B}{2}x} + $$
$$+ 2ae^{-\frac{Da+B}{2}x}[\frac{B}{2}J_0(z_0) - c_1\frac{x}{z_0}J_1(z_0)]M_{2n}(t+\frac{x}{a}) +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}} \Big\{ \frac{Da^2}{2}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)] + \frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-\eta}{z}J_1(z) -$$
$$- a^2c_1^2\frac{x(t-\eta)}{z^2}(J"_0(z) - \frac{J'_0(z)}{z})\Big\} e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)d\eta \Big\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ 2e^{\frac{Da-B}{2}x}[-M'_{2n+1}(t-\frac{x}{a}) + M'_{2n}(t-\frac{x}{a}) + a(\frac{B}{2}J_0(z_0) -$$
$$- c_1\frac{x}{z_0}J_1(z_0))(M_{2n+1}(t-\frac{x}{a}) - M_{2n}(t-\frac{x}{a}))]+$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}} \{ \frac{Da^2}{2}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)] + \frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-\eta}{z}J_1(z) -$$
$$- a^2c_1^2\frac{x(t-\eta)}{z^2}(J"_0(z) - \frac{J'_0(z)}{z})\}e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)]d\eta \Big\}. \quad (2.71)$$

Из формулы (2.71) получаем, что при $t = 0$ и $0 < x < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы функций M_k и M'_k становятся меньшими, чем l/a. Значит, на основании свойств (2.66) функций M_k получаем из (2.71) $u_t(x,0) = 0$. Таким образом, функция (2.63) удовлетворяет и второму начальному условию (1.2).

Положив в формуле (2.63) $x = l + \nu(t)$, получим:

$$u(l+\nu(t),t) = \sum_{n=0}^{\infty}\{2M_{2n}(t+\frac{l+\nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) -$$
$$- c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)\,d\eta\,\}+$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\{2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))}[-M_{2n+1}(t-\frac{l+\nu(t)}{a}) + M_{2n}(t-\frac{l+\nu(t)}{a})]+$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \times$$
$$\times [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)]\,d\eta\,\}. \quad (2.72)$$

В формуле (2.72) запишем первое слагаемое первой суммы (при $n = 0$) отдельно, а во второй сумме заменим индекс суммирования n на $s = n + 1$. Получим:

$$u(l+\nu(t),t) = 2M_0(t+\frac{l+\nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))}+$$
$$+2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z)-c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)\,d\eta+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{2M_{2n}(t+\frac{l+\nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))}+$$
$$+2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z)-$$

$$-c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)\,d\eta\,\}+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\{2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))}[-M_{2s-1}(t-\frac{l+\nu(t)}{a})+M_{2s-2}(t-\frac{l+\nu(t)}{a})]+$$
$$+2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))}\int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z)-c_1\frac{l+\nu(t)}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}\times$$
$$\times[M_{2s-1}(\eta)-M_{2s-2}(\eta)]\,d\eta\,\}.$$

Первые два слагаемых в этой формуле представляют собой левую часть интегрального уравнения (2.6) и поэтому равны $M(t)$. Слагаемые в первой сумме последней формулы представляют собой левые части интегральных уравнений (2.64). Слагаемые во второй сумме представляют собой функции u_{2n-1}. Поэтому все слагаемые под знаками Σ в последней формуле обратятся в нуль. Следовательно,

$$u(l+\nu(t),t) = M(t) = \mu(t),\ t>0\ .$$

А это означает, что функция (2.63) при $t > 0$ удовлетворяет первому краевому условию (1.3).

Положив в формуле (2.63) $x = 0$, получим:

$$u(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\{2M_{2n}(t)+2a\int_0^t\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)d\eta\}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{2[-M_{2n+1}(t)+M_{2n}(t)]+2a\int_0^t\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n+1}(\eta)-M_{2n}(\eta)]d\eta\}.$$

Объединив в последней формуле слагаемые, получим:

$$u(0,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\{-M_{2n+1}(t)+a\int_0^t\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n+1}(\eta)d\eta+2M_{2n}(t)\}.$$

В силу интегральных уравнений (2.65) все слагаемые под знаком суммы обращаются в нуль. А это значит, что функция (2.63) удовлетворяет второму краевому условию (1.3).

Таким образом, показано, что функция (2.63) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, то есть является ее решением.

2.2. Движение подвижного конца со звуковой или сверхзвуковой скоростью

В этом варианте перемещение нижнего конца стержня в любой момент времени $t > 0$ осуществляется со скоростью звука или сверхзвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\nu'(t)| \geq a \ , \quad t > 0. \tag{2.73}$$

Из условия (2.73) следует, что в общем случае $\nu'(t)$ не может быть непрерывной. Поэтому здесь предполагается только, что $\nu'(t)$ определена почти всюду на положительной полуоси t. Предполагается также, что положительная полуось t может быть покрыта не более чем счетным множеством чередующихся подынтервалов, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$\nu'(t) \geq a \ , \quad t > 0. \tag{2.74}$$

или

$$\nu'(t) \leq a \ , \quad t > 0. \tag{2.75}$$

Предположим вначале, что при всех $t : 0 < t < T$, справедливо неравенство (2.75). В силу условия $\nu(t) < l$ необходимо $T < t_1$, где t_1 — наименьший положительный корень уравнения $\nu(t) + l = 0$. Так как нижний конец стержня, являясь единственным источником возмущения, движется в этом случае по направлению к верхнему концу со скоростью не меньше звуковой, решением рассматриваемой задачи в этом случае будет функция

$$u\,(x,t) = \begin{cases} \mu\,(t)\,, & x = l + \nu(t); \\ 0, & 0 \leq x < l + \nu(t). \end{cases} \tag{2.76}$$

При $t = T$ неравенство (2.75) перестанет быть справедливым, и при некоторых $t > T$ станет справедливым неравенство (2.74). Таким образом оказывается, что если движение нижнего конца стержня начинается в этом варианте в сторону стержня, то стержень, за исключением его нижнего конца, останется в состоянии равновесия и покоя. То есть, независимо от того, двигался ли на начальном интервале времени нижний конец или нет, на интервале $t > T$ снова возникает краевая задача, не отличающаяся по существу от рассматриваемой с самого начала.

Это соображение показывает, что, не нарушая общности рассуждений, следует полагать, что нижний конец стержня на начальном интервале времени движется по направлению от стержня. Поэтому разбиение полуоси t на подынтервалы осуществляется следующим образом: для интервала $0 < t < T_1$ выполнено неравенство (2.74), для $T_1 < t < T_2$ – неравенство (2.75), для $T_2 < t < T_3$ – неравенство (2.74) и так далее.

В этом случае функция (1.1), очевидно, уже не будет строго монотонной при любых t. Однако на каждом из интервалов (T_{i-1}, T_i), где i — произвольное нечетное натуральное число, благодаря условию (2.74), эта функция будет строго монотонно возрастающей. Поэтому на интервале (τ_{ai}, τ_{ai-1}), где $\tau_{ai} = T_1 + \frac{\nu(T_i)+l}{a}$, будет существовать обратная к функции $\tau(t)$ функция $\xi_i(\tau)$, непрерывно дифференцируемая и строго монотонно возрастающая на этом интервале. Продолжим каждую из функций $\xi_i(\tau)$ на всю ось τ как непрерывно дифференцируемую и строго монотонно возрастающую. Обозначим такое продолжение через $E_i(\tau)$. Ясно, что для функций $E_i(\tau)$ на интервале (τ_{ai}, τ_{ai-1}), или, что то же самое, на интервале $T_{i-1} < t < T_i$, будет справедливо тождество

$$E_i(t + \frac{\nu(t)+l}{a}) = t. \tag{2.77}$$

Вне интервала $[T_{i-1}, T_i]$ тождество (2.77) в общем случае не будет справедливым.

Тогда на интервале $[0, T_1]$, в силу существования на этом интервале обратной к (2.8) функции, решение будет иметь принципиально такой же вид, как и в случае движения подвижного конца с дозвуковой скоростью. Отличие здесь будет состоять лишь в том, что в силу справедливости на этом интервале неравенства (2.74), уравнение (2.32) не будет иметь положительных корней. Это по существу означает, что волна, отраженная от верхнего конца стержня, движущаяся со звуковой скоростью, не сможет догнать нижний конец стержня, движущийся от области отыскания решения со звуковой или сверхзвуковой скоростью. Следовательно, волна, отраженная от подвижного конца стержня, не сможет возникнуть, и поэтому решение задачи на всем интервале $[0, T_1]$ будет иметь вид, подобный выражению (2.24), то есть

$$u(x,t) = u_0(x.t) + u_1(x,t)\ . \tag{2.78}$$

Необходимо только учесть, что при построении функций $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ по формулам (2.3) и (2.25) соответственно в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), причем в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{01}:

$$M_{01}\,(t) = \begin{cases} \mu\,(t)\,, & T_{i-1} < t < T_i; \\ 0, & t < T_{i-1};\ t > T_i. \end{cases} \tag{2.79}$$

$i = 1, 2, \ldots$, причем $T_0 = 0$. Определение функции (2.79) эквивалентно определению

$$M_{01}\,(\tau(t)) = \begin{cases} \mu\,(\tau(t))\,, & \tau(T_{i-1}) < t < \tau(T_i); \\ 0, & \tau(t) < \tau(T_{i-1});\ \tau(t) > \tau(T_i), \end{cases} \tag{2.80}$$

где функция $\tau(t)$ определена выражением (2.8), и, как следует из (2.8),

$$\tau(T_0) = \tau(0) = l/a.$$

На интервале (T_1, T_2) вследствие перемещения нижнего конца стержня на среду со звуковой или сверхзвуковой скоростью часть волн, движущихся в стержне, будет поглощена подвижным верхним концом. Действительно, на интервале (T_1, T_2), двигаясь в общем случае со сверхзвуковой скоростью, нижний конец догонял и поглощал как часть волн, излученных этим же нижним концом ранее, так и часть волн, отраженных от верхнего конца. Учесть в решении это поглощение можно следующим образом. Задний фронт волны $u_0(x,t)$, излученной подвижным концом, начиная от момента времени $t = 0$, при $t = T_1$ будет находиться в точке $x = l + \nu(T_1)$. При $t > T_1$ он будет продолжать движение в направлении отрицательных x со звуковой скоростью, и его координата будет равна $x_b(t) = l + \nu(T_1) - a(t - T_1)$. Координата же подвижного конца стержня при $t > T_1$ станет равной $x_k(t) = l + \nu(t)$.

Следовательно, срезка заднего фронта волны $u_0(x,t)$ произойдет на длине

$$\begin{aligned} x_b(t) - x_k(t) &= l + \nu(T_1) - a(t - T_1) - (l + \nu(t)) = \\ &= [aT_1 + l + \nu(T_1)] - [at + l + \nu(t)] = a[\tau(T_1) - \tau(t)] \ . \end{aligned}$$

Поэтому для данного случая функция M_{01} при вычислении функции $u_0(x,t)$ должна быть отличной от нуля не при $\tau < \tau(T_1)$, а при $\tau < \tau(T_1) - (\tau(T_1) - \tau(t)) = \tau(t)$. Иными словами, на интервале (T_1, T_2) функцию $u_{01}(x,t)$ следует вычислить по формуле (2.3). Однако в этой формуле при вычислении функции M_0 из интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{011}, где

$$M_{011}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & \dfrac{l}{a} < \tau < \tau(t) = t + \dfrac{l + \nu(t)}{a}; \\ 0, & \tau < \dfrac{l}{a};\ \tau > \tau(t) = t + \dfrac{l + \nu(t)}{a}. \end{cases} \tag{2.81}$$

Движущийся со звуковой или сверхзвуковой скоростью подвижный нижний конец может также срезать часть волны $u_1(x,t)$, отраженной от верхнего конца и движущейся навстречу подвижному концу. При этом, если $t < l/a$, отражение волны $u_0(x,t)$ от верхнего конца не произойдет, и при таких t решением задачи на интервале (T_1, T_2) будет функция $u_{01}(x,t)$. Если же $t > l/a$, то отраженная волна $u_1(x,t)$ будет существовать, и поэтому может произойти ее срезка набегающим нижним концом. В этом случае координата переднего фронта волны $u_1(x,t)$ будет равна $x_f(t) = at - l$. Координата же подвижного конца стержня при $t > T_1$ по-прежнему будет равна $x_k(t) = l + \nu(t)$. Если при этом $x_f(t) < x_k(t)$, то есть $at - (l + \nu(t)) < l$, то волна $u_1(x,t)$ не будет срезана. Однако если $x_f(t) > x_k(t)$, то есть $at - (l + \nu(t)) > l$, то срезка волны $u_1(x,t)$ произойдет на интервале длиной $x_f(t) - x_k(t) = at - \nu(t) - 2l = a(t - \frac{\nu(t)+2l}{a})$. Поэтому в данном случае функцию M_{01} для вычисления волны $u_1(x,t)$ следует принимать равной нулю не при $\tau < l/a$, а при $\tau < \tau(t - \frac{\nu(t)+2l}{a})$. Таким образом, при вычислении волны $u_1(x,t)$ в формулах (2.25) и (2.26) в качестве функции M_0, как решения интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{013}, где

$$M_{013}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(T_1); \\ 0, & \tau < y;\ \tau > \tau(T_1). \end{cases} \tag{2.82}$$

Здесь

$$y = \begin{cases} \tau\left(t - \dfrac{\nu(t) + 2l}{a}\right), & at - l - \nu(t) > l; \\ 0, & at - l - \nu(t) < l. \end{cases} \tag{2.83}$$

Обозначим такую волну через $u_{11}(x,t)$. Создается впечатление, что волны $u_{01}(x,t)$ и $u_{11}(x,t)$ должны вычисляться по формулам (2.3) и (2.25) с разными функциями M_{011} и M_{013} соответственно. Это недопустимо, так как эти функции могут удовлетворять второму краевому условию (1.3) только при одинаковых функциях типа M_0. Однако следует дополнительно учесть, что волна $u_{01}(x,t)$ срезана на интервале определения функции M_{011} при $\tau(t) < \tau < \tau(T_1)$. Следовательно, на этом интервале значений τ эта волна не будет создавать отраженной от верхнего конца стержня волны. Поэтому при вычислении волны $u_{11}(x,t)$ можно использовать функцию

$$M_{012}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(t); \\ 0, & \tau < y;\ \tau > \tau(t), \end{cases} \tag{2.84}$$

в которой y по-прежнему вычисляется по формуле (2.83). По этой же формуле можно вычислять на интервале (T_1, T_2) и функцию M_{011}, так как на этом интервале волна $u_{01}(x,t)$ уже породила волну $u_{11}(x,t)$, и при $\tau < y$ произошла ее срезка.

Таким образом, решением задачи при $t > l/a$ будет функция

$$u_{01}(x,t) + u_{11}(x,t), \tag{2.85}$$

где $u_{01}(x,t)$ вычисляется по формуле (2.3), а $u_{11}(x,t)$ – по формуле (2.25), причем при вычислении обеих этих функций в упомянутых формулах в качестве функции M_0 как решения интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{012}.

Переходя к решению задачи на интервале (T_2, T_3), необходимо заметить, что построение решения на этом интервале во многом аналогично построению решения на интервале $(0, T_1)$. Отличие будет состоять в том, что, во-первых, на этом интервале будут существовать остаточные волны, возникшие на двух предыдущих интервалах. Эти остаточные волны будут представлены выражением

$$u_{011}(x,t) + u_{111}(x,t), \tag{2.86}$$

где функции $u_{011}(x,t)$ и $u_{111}(x,t)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.25) соответственно. Только в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией $\tilde{M}_{012}$:

$$\tilde{M}_{012}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(T_2); \\ 0, & \tau < y;\ \tau > \tau(T_2). \end{cases} \tag{2.87}$$

Здесь

$$y = \begin{cases} \tau\left(T_2 - \dfrac{\nu(T_2) + 2l}{a}\right), & aT_2 - l - \nu(T_2) > l; \\ 0, & aT_2 - l - \nu(T_2) < l. \end{cases} \tag{2.88}$$

Во-вторых, это отличие будет состоять в том, что начальная длина стержня на этом интервале будет равна не l, а $l + \nu(T_2)$. Поэтому на рассматриваемом интервале решение задачи будет представлено в виде:

$$u_{03}(x,t) + u_{13}(x,t) + u_{011}(x,t) + u_{111}(x,t), \tag{2.89}$$

где функции $u_{03}(x,t)$ и $u_{13}(x,t)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.25) соответственно. Только в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{03}, определенной равенством (2.80).

Такого же рода аналогии с уже описанными процессами построения решений прослеживаются при построении решений на последующих интервалах.

2.3. Перемещение подвижного конца с произвольной скоростью

В этом случае функция $\nu(t)$ изменяется произвольно, являясь непрерывно дифференцируемой при всех $t > 0$. Для решения поставленной задачи положительную полуось t разобьем на подынтервалы, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$\nu'(t) \le -a \tag{2.90}$$

или

$$\nu'(t) \ge -a\ . \tag{2.91}$$

Ясно, что границы каждого из таких подынтервалов будут определяться положительными корнями уравнения

$$\nu'(t) + a = 0\ , \tag{2.92}$$

причем интервалы, на которых будет выполняться неравенство (2.90), будут замкнутыми, а интервалы, на которых будет выполняться неравенство (2.91), открытыми.

Если на интервале $[T_0, T_1]$, где $T_0 = 0$, выполняется неравенство (2.90), то, как показано при рассмотрении варианта движения подвижного конца со звуковой или сверхзвуковой скоростью, этот случай легко приводится к случаю, когда на начальном интервале времени выполнено неравенство (2.90). Поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что на интервалах (T_{i-1}, T_i) выполнено неравенство (2.91), а на интервалах $[T_i, T_{i+1}]$ – неравенство (2.90), $i = 1, 3, 5, \dots$

В силу неравенства (2.90) на каждом из подынтервалов (T_{i-1}, T_i) , $i = 1, 3, 5, \dots$ будет существовать строго монотонно убывающая и непрерывно дифференцируемая обратная к (2.8) функция $\xi_i(\tau)$. Точно так же, как в предыдущем варианте, строится строго монотонно убывающее продолжение этих функций $E_i(\tau)$ на всю ось τ и функции $M_{0i}(\tau)$, определяемые равенствами (2.80). Тогда оказываются справедливыми все рассуждения, использованные для построения решения в варианте движения конца с дозвуковой скоростью, и поэтому на интервале (T_0, T_1) решением задачи будет функция

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \{2M_{2n}(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)d\eta\} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N_1-1}\{2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_{2n+1}(t-\frac{x}{a}) + M_{2n}(t-\frac{x}{a})] +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)]d\eta\}, \quad (2.93)$$

где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.69), а N_1 – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.70). Здесь функции M_{2n} и M_{2n+1} должны последовательно вычисляться как решения интегральных уравнений (2.15), (2.64) и (2.65), причем в интегральном уравнении (2.15) функцию M в правой части этого уравнения следует заменить функцией M_{01} из формулы (2.80). При этом если на интервале (T_0, T_1) нижний конец будет все время двигаться со звуковой или сверхзвуковой скоростью, каждая из сумм в формуле (2.93) будет содержать не более чем по одному слагаемому.

Переходя к решению задачи на интервале $[T_1, T_2]$, напомним, что на этом интервале нижний конец движется в сторону стержня со звуковой или сверхзвуковой скоростью. Поэтому отражение волн от нижнего конца становится невозможным. Нетрудно видеть, что между числами N и N_1 возможно только одно из двух следующих соотношений:

$$N = N_1 \qquad \text{или} \qquad N = N_1 + 1\ . \quad (2.94)$$

Если выполнено равенство $(2.94)_1$, это значит, что волна $u_{2(N-1)}(x,t)$ уже отразилась от верхнего конца, породив отраженную волну $u_{2(N-1)+1}(x,t)$. Но эта отраженная волна уже не сможет, в свою очередь, отразиться от нижнего конца. Поэтому новые волны на интервале $[T_1, T_2]$ не могут образоваться. То есть в формуле (2.93) уже присутствуют все волны, которые могли возникнуть на интервалах (T_0, T_1) и $[T_1, T_2]$. Следовательно, решение на интервале $[T_1, T_2]$ будет выглядеть точно так же, как решение (2.93). Нужно только учесть, что это решение будет справедливо на более узком интервале значений x, чем при $t = T_1$. Запишем решение (2.93) в более компактном виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_{2n}(x,t) + \sum_{n=0}^{N_1-1} u_{2n+1}(x,t) \ . \tag{2.95}$$

Здесь

$$u_{2n}(x,t) = 2M_{2n}(t+\frac{x}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t+\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_{2n}(\eta)d\eta \ ;$$

$$u_{2n+1}(x,t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_{2n+1}(t-\frac{x}{a}) + M_{2n}(t-\frac{x}{a})] +$$
$$+ 2ae^{-\frac{B}{2}x}\int_0^{t-\frac{x}{a}}[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1\frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)]d\eta \ .$$

Если выполнено равенство $(2.94)_2$, это значит, что волна $u_{2(N-1)}(x,t)$ еще не отразилась от верхнего конца. Но эта волна может отразиться от верхнего конца и породить отраженную волну $u_{2(N-1)+1}(x,t)$. Поэтому последнюю волну следует включить в формулу (2.93). Иными словами, решение и в этом случае будет представлено формулой (2.95). Следует отметить, что срезка волн движущимся на среду нижним концом проявляется только в сокращении области определения решения (2.95). На интервале (T_2, T_3) дело обстоит следующим образом. Во-первых, в стержне останутся срезанные волны (2.95). Так как на этом интервале область отыскания решения увеличивается, необходимо определить характер поведения этих остаточных срезанных волн в расширенной области. Сделать это можно следующим образом. Конечная область, в которой существовало решение (2.95), определяется условиями:

$$0 < x < l + \nu(T_2); \qquad t = T_2 \ . \tag{2.96}$$

Волны в первой сумме формулы (2.95) являются волнами аргумента $t + x/a$. Поэтому с учетом соотношений (2.96) получаем следующую область ненулевых значений таких волн:

$$T_2 < t + \frac{x}{a} < T_2 + \frac{l+\nu(T_2)}{a} \ .$$

В свою очередь, волны во второй сумме формулы (2.95) являются функциями аргумента $t - x/a$. Поэтому с учетом соотношений (2.96) получаем, что ненулевые значения эти волны будут иметь в следующей области:

$$T_2 + \frac{l+\nu(T_2)}{a} < t - \frac{x}{a} < T_2 \ .$$

Следовательно, если ввести функции

$$\tilde{u}_{2n}\left(\tau(t)\right)=\begin{cases} u_{2n}\left(x,t\right), & T_2<t+\dfrac{x}{a}<T_2+\dfrac{l+\nu(T_2)}{a};\\ 0, & t+\dfrac{x}{a}<T_2;\ t+\dfrac{x}{a}>T_2+\dfrac{l+\nu(T_2)}{a},\end{cases}$$

$$\tilde{u}_{2n+1}\left(\tau(t)\right)=\begin{cases} u_{2n+1}\left(x,t\right), & T_2+\dfrac{l+\nu(T_2)}{a}<t-\dfrac{x}{a}<T_2;\\ 0, & t-\dfrac{x}{a}<T_2+\dfrac{l+\nu(T_2)}{a};\ t-\dfrac{x}{a}>T_2,\end{cases} \tag{2.97}$$

то остаточные волны на интервале (T_2,T_3) будут представлены выражением

$$\tilde{u}(x,t)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}_{2n}(x,t)+\sum_{n=0}^{N_1-1}\tilde{u}_{2n+1}(x,t)\ . \tag{2.98}$$

Эти остаточные волны, продолжая движение, будут порождать на интервале (T_2,T_3) новые отраженные волны. Обозначим такие отраженные волны через $\tilde{u}^{(2n)}(x,t)$. Кроме того, появятся волны, генерируемые функцией $M_{03}(t)$, которая определена равенством (2.47). Эти волны обозначим через $u_i^{(3)}(x,t)$. Таким образом, решение задачи на интервале (T_2,T_3) будет представлено формулой

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}_{2n}(x,t)+\sum_{n=0}^{N_1-1}\tilde{u}_{2n+1}(x,t)+\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{i=0}^{N_3-1}\tilde{u}_{2i}^{(2n)}(x,t)+\\ +\sum_{i=0}^{N_3-1}\tilde{u}_{2i+1}^{(2n)}(x,t)]+\sum_{n=0}^{N_1-1}[\sum_{i=0}^{N_3-1}\tilde{u}_{2i}^{(2n+1)}(x,t)+\sum_{i=0}^{N_3-1}\tilde{u}_{2i+1}^{(2n+1)}(x,t)]+\\ +\sum_{i=0}^{N_3-1}u_{2n}^{(3)}(x,t)+\sum_{i=0}^{N_3-1}u_{2n+1}^{(3)}(x,t)\ .\end{aligned} \tag{2.99}$$

Здесь функции $u_{2n}^{(3)}(x,t)$ и $u_{2n+1}^{(3)}(x,t)$ строятся принципиально так же, как и функции $u_{2n}(x,t)$ и $u_{2n+1}(x,t)$ при дозвуковом режиме движения нижнего конца. Только при их построении в правой части интегрального уравнения (2.15) следует вместо функции $M(t)$ использовать функцию $M_{03}(t)$. Отраженные волны $\tilde{u}_{2i}^{(2n)}(x,t)$, $\tilde{u}_{2i+1}^{(2n)}(x,t)$,$\tilde{u}_{2i}^{(2n+1)}(x,t)$ и $\tilde{u}_{2i+1}^{(2n+1)}(x,t)$ строятся по методике построения отраженных волн, описанной выше. В формуле (2.99) N_3 определяется как наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству типа (2.69):

$$n>\frac{1}{2l}[T_3a+\nu(T_3)-2\sum_{i=1}^{n}\nu(\tau_{ii})]\ . \tag{2.100}$$

в котором τ_{ii} — корни уравнений типа (2.67):

$$t=\frac{2nl+2\sum_{i=1}^{n-1}\nu(\tau_{ii})+\nu(t)}{a}\ . \tag{2.101}$$

Далее построение решения на интервале $[T_3, T_4]$ осуществляется так же, как и на интервале $[T_1, T_2]$, а на интервале (T_4, T_5) — так же, как и на интервале (T_2, T_3). Такого же типа аналогия справедлива для всех последующих интервалов.

3. Выводы

Совместное применение интегрального представления решения телеграфного уравнения, метода продолжений и методов отражения от неподвижного и подвижного концов позволило получить в квадратурах решение первой краевой задачи для области с переменной границей. Построенное точное решение краевой задачи для стержней переменной длины позволяет получить более правильную концепцию относительно распространения волн и распределения напряжений в исследованной среде. Характер отражения волн от подвижного конца существенно отличается от характера отражения от неподвижного конца.

Библиографические ссылки

1. *Горошко О. А.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины /О. А. Горошко, Г. Н Савин. К. : Наукова думка. —1971. — С. 224.
2. *Остапенко В. А.* Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения. / В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск, 2008. — С. 3–17.
3. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области / В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения, Днепропетровск, 2008. — С. 18–20.
4. *Остапенко В. А.* Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области / В. А. Остапенко // Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, серия Моделирование, вып. 1. — С. 89–92.
5. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области / В. А. Остапенко //Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, серия Моделирование, вып. 1. — С. 149–161.
6. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для области с подвижной границей / В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике, Днепропетровск, 1989. — С. 4–14.
7. *Ostapenko V. A.* Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length / V. A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics, Hamburg, Springer-Verlag, 77, 2007 — P. 313–324.

Надійшла до редколегії 30.11.2010