

УДК 681.31

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

І. Г. Баланенко*, П. І. Когут**

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@rambler.ru

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua

Розглядаються питання класифікації розв'язків початково-крайових задач для вироджених лінійних параболічних рівнянь та дається деяке їх застосування до теорії оптимальних систем.

Ключові слова: вироджені параболічні рівняння, слабкі розв'язки, варіаційні розв'язки, вагові простори Соболева, теореми існування.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає початково крайова задача з однорідною умовою Дирихле на межі області для лінійного параболічного рівняння. Характерною рисою означеної задачі є той факт, що умова рівномірної еліптичності для головного оператора не виконується. У зв'язку з цим залучення класичних результатів до проблеми розв'язності таких задач стає неможливим. Виходячи з міркувань, які наведені в працях [5, 6], дається класифікація розв'язків таких задач у просторі Соболева $L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$. Зокрема, вводяться такі поняття як слабкі розв'язки, V -розв'язки та варіаційні розв'язки початково крайових задач для вироджених параболічних рівнянь. Встановлено, що слабкі розв'язки, як правило, є не єдиними, на відміну від V -розв'язків. Ця обставина, як показано на прикладі однієї задачі оптимального керування в коефіцієнтах, привносить досить несподівану додаткову інформацію про якісні характеристики множини оптимальних розв'язків.

2. Основні позначення та попередні факти

Нехай \mathbb{R}^N — N -вимірний евклідов простір; $x = (x_1, \dots, x_N)$ — довільний його представник; Ω — обмежена відкрита підмножина \mathbb{R}^N з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$; $\bar{\Omega}$ — замикання множини Ω , тобто $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Символом $D^\alpha y(x)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — невід’ємний мультиіндекс, будемо позначати відповідну похідну функції $y = y(x)$, тобто

$$D^\alpha y(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N} y(x).$$

Нехай $C_0^m(\Omega)$ — банахів простір, який утворений m разів неперервно диференційовними в Ω функціями з компактними в Ω носіями і норма в якому задається правилом

$$\|y\|_{C_0^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha y(x)|,$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Надалі через $C_0^\infty(\Omega)$ будемо позначати локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Ω і називати його простором фінітних або тестових функцій.

Для довільного $p \leq 1$ через $L^p(\Omega)$ будемо позначати банахів простір усіх вимірних на Ω функцій, які інтегровні на Ω в степені p (тут вимірність та інтегровність розуміються в сенсі Лебега). Зауважимо, що фінітні функції $C_0^\infty(\Omega)$ утворюють щільну підмножину в $L^p(\Omega)$ при всіх $p: 1 \leq p < +\infty$.

Нехай $y, v \in L^1(\Omega)$ — довільна пара функцій. Кажуть, що $v \in L^1(\Omega)$ є слабкою похідною порядку α функції $y \in L^1(\Omega)$, і позначають її як $D^\alpha y = v$, якщо

$$\int_{\Omega} y D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Надалі, якщо вектор $\vec{v} = [v_1, \dots, v_N] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ є градієнтом функції $y \in L^1(\Omega)$ у слабкому сенсі (або, що аналогічно, у сенсі розподілень), будемо позначати його як $\nabla y(x)$.

Нехай $1 \leq p < +\infty$ та $k \geq 0$ є довільними фіксованими величинами. Тоді через $W^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати простір Соболева, утворений усіма функціями $y \in L^p(\Omega)$, для яких є скінченною норма

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha y(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

У випадку, коли $p = 2$, будемо залучати позначення $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots$). При цьому зауважимо, що $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Тут залучення літери H продиктоване тим, що $H^k(\Omega)$ є гільбертовим простором відносно операції скалярного добутку

$$(y_1, y_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha y_1(x) D^\alpha y_2(x) dx.$$

Зауважимо також, що простори Соболева є сепарабельними банаховими просторами відносно норми (2.1), які до того ж є рефлексивними, якщо $1 < p < +\infty$.

Через $W_0^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Нехай $H_0^p(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$. Отже, якщо $y \in H_0^p(\Omega)$, то $y|_{\partial\Omega} = 0$, де останню рівність слід розуміти як значення оператора сліду на межі області Ω .

3. Вагові простори Соболева

Нехай при кожному $i \in \{0, \dots, N\}$ ρ_i — невід'ємна функція на $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ така, що $\rho_i > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω , і при цьому

$$\rho_i \in L^1(\Omega), \quad \rho_i^{-1} \in L^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Будемо казати, що $\rho_i(x)$ є виродженою ваговою функцією на Ω , якщо: $\rho_i(x) > 0$ м.с. на Ω , $\rho_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умову (3.1) і при цьому $\rho_i + \rho_i^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Покладемо $\rho(x) = (\rho_0(x), \dots, \rho_N(x))$, де ρ_i — вироджені вагові функції у сенсі означення 3.1. Утожонимо кожену функцію ρ_i з мірою Радона на Ω , тобто для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$ покладемо $\rho_i(E) = \int_E \rho_i(x) dx$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Простір усіх невід'ємних мір Радона на Ω будемо позначати як $\mathcal{M}_+(\Omega)$. Як відомо, $\mathcal{M}_+(\Omega)$ можна утожонити з дуальним простором до простору $C_0(\Omega)$, в якому Ω — відкрита обмежена множина.

З кожним значенням $i \in \{0, \dots, N\}$ пов'яжемо ваговий гільбертів простір $L^2(\Omega, \rho_i dx)$ вимірних функцій $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 = (f, f)_{L^2(\Omega, \rho dx)} = \int_\Omega f^2 \rho dx < +\infty.$$

Через $W^{1,2}(\Omega; \rho dx)$ (скорочено W_ρ), де $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)$, позначимо множину усіх функцій $y \in W^{1,1}(\Omega)$, для яких виконуються умови:

$$\rho_0 y^2 \in L^1(\Omega), \quad \rho_i |D_i y|^2 \in L^1(\Omega), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

де $D_i y = \partial y / \partial x_i$ є похідними в сенсі розподілень. Нехай відображення $\|\cdot\|_\rho : W_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ означене за правилом

$$\|y\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x) dx + \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x) dx \right)^{1/2} \quad \forall y \in W_\rho. \quad (3.2)$$

Оскільки, за нерівністю Коші – Буняковського, мають місце оцінки

$$\left(\int_\Omega |y(x)| dx \right)^2 \leq \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x) dx \int_\Omega \rho_0^{-1}(x) dx, \quad (3.3)$$

$$\left(\int_\Omega |D_i y(x)| dx \right)^2 \leq \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x) dx \int_\Omega \rho_i^{-1}(x) dx \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.4)$$

то $\|\cdot\|_\rho$ є нормою в W_ρ . При цьому, як безпосередньо випливає з (3.3), простір W_ρ є повним відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. Надалі W_ρ будемо називати ваговим простором Соболева.

Оскільки типовим представником вироджених вагових функцій є функція $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, де

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } x_1 x_2 < 0, \\ |x|^{-1}, & \text{якщо } x_1 x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_{\mathbb{R}^2} < 1\},$$

то легко бачити, що має місце включення

$$y(\cdot) = \eta(\cdot)u(\cdot) \in W_\rho, \quad (3.5)$$

де $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta(0) = 1$, а функція $u = u(x)$ в полярних координатах задається правилом

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ \sin \theta, & \text{якщо } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{якщо } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \cos \theta, & \text{якщо } x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Разом з тим функція (3.5) в довільному околі точки $(0, 0)$ набирає різні значення з боку першого та третього ортантів. Отже, функцію (3.5) не можна наблизити в W_ρ жодною з функцій класу $C_0^\infty(\Omega)$. Наведене зауваження свідчить про те, що клас $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у просторі W_ρ відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. У зв'язку з цим означимо ще один ваговий простір Соболева $H_\rho = H(\Omega; \rho dx)$ як замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що, за попередніми міркуваннями (див. оцінку (3.3)), множина H_ρ є банаховим простором відносно норми, індукованої нормою $\|\cdot\|_\rho$. Покладемо

$$C_\rho = \max_{0 \leq i \leq N} \left(\int_\Omega \rho_i^{-1}(x) dx \right)^{1/2}.$$

Тоді, виходячи з оцінок типу (3.3) та компактності вкладення $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, легко перевірити справедливість наступного результату:

Теорема 3.1. *Нехай $\rho(x) = (\rho_0(x), \rho_1(x), \dots, \rho_N(x))$ утворює набір вироджених вагових функцій в сенсі означення 3.1. Тоді:*

(i) *має місце включення $H_\rho \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ і при цьому*

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C_\rho \|y\|_\rho \quad \forall y \in H_\rho;$$

(ii) *якщо $y_k \rightarrow y$ слабо в H_ρ , тобто*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_\Omega y_k \varphi \rho_0 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y_k \varphi_i \rho_i dx \right] = \\ = \int_\Omega y \varphi \rho_0 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y \varphi_i \rho_i dx \quad \forall \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

то $y_k \rightarrow y$ сильно в $L^1(\Omega)$;

(iii) справедливо $H_\rho \subseteq W_\rho$, і при цьому H_ρ та W_ρ є гільбертовими просторами відносно операції скалярного добутку

$$(y, v)_\rho = (y, v)_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N (D_i y, D_i v)_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}. \quad (3.6)$$

В силу рефлексивності просторів H_ρ та W_ρ , маємо $(H_\rho^*)^* = H_\rho$, $(W_\rho^*)^* = W_\rho$, де дуальний простір H_ρ^* можна утотожити з простором $W^{-1,2}(\Omega, \rho^* dx)$.

$$\rho^* = (\rho_0^{-1}, \rho_1^{-1}, \dots, \rho_N^{-1}). \quad (3.7)$$

При цьому типовим представником простору H_ρ^* є наступний функціонал $F \in \mathcal{L}(H_\rho, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle F, y \rangle_{H_\rho^*, H_\rho} &= \int_\Omega f_0 y dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i D_i y dx \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega f_0^2 \rho_0^{-1} \right)^{1/2} \|y\|_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1} \right)^{1/2} \|D_i y\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1} \right)^{1/2} \|y\|_\rho, \end{aligned}$$

де $(f_0, f_1, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$. З іншого боку, за теоремою Рітца про подання лінійних неперервних функціоналів в гільбертових просторах, дуальний простір H_ρ^* можна охарактеризувати так: якщо $g \in H_\rho^*$, то знайдеться вектор-функція $g = (g_0, g_1, \dots, g_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$ така, що

$$\langle F, y \rangle_{H_\rho^*, H_\rho} = \int_\Omega g_0 y \rho_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_i D_i y \rho_i dx \quad \forall y \in H_\rho. \quad (3.8)$$

При цьому

$$\|F\|_{H_\rho^*} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |g_i|^2 \rho_i dx \right)^{1/2} : \text{де } g_i \text{ забезпечують подання (3.8)} \right\}.$$

Зауваження 3.1. Теорему 3.1 можна уточнити в такій редакції (див., напр., [3, с. 46]): нехай $\rho_0 \equiv 1$ майже скрізь на Ω та існує число $\nu \in (N/2, +\infty)$ таке, що $\rho^{-\nu} \in L^1(\Omega)$. Тоді умови (3.1) гарантують справедливість наступних тверджень:

- (i) правило $\|y\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \rho_i |D_i y|^2 dx \right)^{1/2}$ визначає норму на H_ρ , яка еквівалентна нормі $\|\cdot\|_\rho$;
- (ii) вкладення $H_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega)$ є неперервним і компактним.

4. Класи функцій зі значеннями у вагових просторах

Нехай вагова вектор-функція $\rho(x) = (\rho_0(x), \dots, \rho_N(x))$ задовольняє умови:

- (i) $\rho_i > 0$ м.с. на $\Omega \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$;
- (ii) $\rho_i \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$;
- (iii) існує число $\nu \in (\frac{N}{2}, +\infty)$ таке, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$.

Оскільки

$$\int_{\Omega} |\rho_i(x)|^{-1} dx \leq \left(\int_{\Omega} |\rho_i(x)|^{-\nu} \right)^{1/\nu} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{1/\nu^*}, \quad (4.1)$$

де $\nu^* = \nu/(\nu - 1)$, то з умов (i)–(iii) та $N \geq 2$ випливає, що

$$\rho_i^{-1} \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N.$$

Отже, $\rho_i(x)$ є виродженими ваговими функціями на Ω в сенсі означення 3.1.

Як було зазначено вище, простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є в загальному випадку щільним у ваговому просторі Соболева W_ρ , що означає $H_\rho \subseteq W_\rho$, $W_\rho \setminus H_\rho \neq \emptyset$. Нехай V_ρ ($H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$) – довільний проміжний простір. Для його побудови досить скористатися таким правилом: обрати довільний елемент $g \in W_\rho \setminus H_\rho$ і покласти V_ρ як замикання лінійної оболонки, натягнутої на $H_\rho \cup \{g\}$, відносно норми індукованої $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що V_ρ є гільбертовим простором і для будь-якого $F \in V_\rho^*$, за теоремою Рісса, знайдеться набір

$$(f_0, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$$

такий, що $\langle F, y \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} = (f_0, y)_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N (f_i, D_i y)_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}$,

$$\|F\|_{V_\rho^*} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}^2 \right)^{1/2}.$$

Зауваження 4.1. Зазначимо, що з кожним розподіленням $f \in L^2(\Omega; \rho_i dx)$ можна пов'язати елемент $\tilde{f}_i \in L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$ такий, що

$$\|\tilde{f}_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)} = \|f_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)} \quad \forall i = 0, 1, \dots, N.$$

Справді, поклавши $\tilde{f}_i = f_i \rho_i$, маємо:

$$\int_{\Omega} (\tilde{f}_i)^2 \rho_i^{-1} dx = \int_{\Omega} (f_i \rho_i)^2 \rho_i^{-1} dx = \int_{\Omega} f_i^2 \rho_i dx.$$

Отже, набору $(f_0, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$ відповідає вектор-функція $F^* = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$ така, що

$$\langle F, y \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = (\tilde{f}_0, y)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (\tilde{f}_i, D_i y)_{L^2(\Omega)} \quad \forall y \in V_\rho.$$

Наведене співвідношення означає, що дуальний простір V_ρ^* можна утотожити з деякою непорожньою підмножиною простору $W^{-1,2}(\Omega; \rho^* dx)$ (див. (3.7)).

Пов'яжемо з кожним простором V_ρ множину функцій $u = u(t, x)$, де $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$ і кожна з яких майже скрізь на $[0, T]$ набуває значення із вагового простору V_ρ . Таким чином, означені функції можна розглядати як функції скалярного аргумента t із значеннями в V_ρ :

$$u : [0, T] \rightarrow V_\rho.$$

У зв'язку з цим всюди далі будемо писати $u(t)$ та $\dot{u}(t)$ замість $u(t, x)$ та $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)$, відповідно. Це означає, що на означений клас функцій можна поширити основні поняття теорії інтегровності за Бохнером. Зокрема, нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ — довільне диз'юнктивне розбиття відрізка $[0, T]$, тобто

$$[0, T] = \bigcup_{i=1}^n E_i; \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j$$

де E_i — вимірні за Лебегом множини. Тоді, функцію $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ називатимемо простою, якщо знайдеться набір елементів $u_1, u_2, \dots, u_n \in V_\rho$ таких, що

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) u_i, \quad (4.2)$$

де через $\chi_{E_i}(t)$ позначено характеристичні функції множин $E_i \subseteq [0, T]$.

Означення 4.1. Будемо казати, що $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є вимірною функцією, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0, T] \rightarrow V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\|u(t) - u_k(t)\|_{V_\rho} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ м. с. на } [0, T].$$

Ясно, що для будь-якої вимірної функції $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ та довільного елемента $y^* \in V_\rho^*$, відображення $t \mapsto \langle y^*, u(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho}$ є вимірним за Лебегом на $[0, T]$. До того ж, для довільної простої функції $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ можна покласти $\int_0^T u(t) dt = \sum_{i=1}^n |E_i| u_i$. В результаті приходимо до наступного поняття:

Означення 4.2. Будемо казати, що функція $f : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є інтегрованою на $[0, T]$, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0, T] \rightarrow V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\int_0^T \|f(t) - u_k(t)\|_{V_\rho} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

При цьому інтеграл від $f(t)$ на $[0, T]$ можна означити як

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T u_k(t) dt.$$

Тепер, у повній аналогії до відомої теореми Бохнера, можна встановити наступний результат:

Теорема 4.1. *Вимірна функція $f : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є інтегрованою на $[0, T]$ тоді і тільки тоді, коли є інтегрованою за Лебегом на $[0, T]$ скалярна функція $t \mapsto \|f(t)\|_{V_\rho}$. При цьому*

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_{V_\rho} \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V_\rho} dt, \quad (4.3)$$

$$\left\langle y^*, \int_0^T f(t) dt \right\rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = \int_0^T \langle y^*, f(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt \quad \forall y^* \in V_\rho^*. \quad (4.4)$$

Позначимо через $L^p(0, T; V_\rho)$ множину всіх вимірних функцій $y : [0, T] \rightarrow V_\rho$ таких, що

$$\|y\|_{L^p(0, T; V_\rho)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_{V_\rho}^p dt \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\|y\|_{L^\infty(0, T; V_\rho)} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{V_\rho} \quad \text{при } p = \infty.$$

Тоді $L^p(0, T; V_\rho)$ утворюють банахові простори при $1 \leq p \leq +\infty$ відносно наведених норм (див. [2]), а простір $L^2(0, T; V_\rho)$ є гільбертовим відносно операції скалярного добутку

$$(y, f)_{L^2(0, T; V_\rho)} = \int_0^T (y(t), f(t))_{V_\rho} dt$$

Введемо поняття похідної в сенсі розподілень для функцій $y : [0, T] \rightarrow V_\rho$.

Означення 4.3. Будемо казати, що $\dot{y} \in L^1_{loc}(0, T; V_\rho^*)$ є слабкою похідною функції $y \in L^1_{loc}(0, T; V_\rho)$, якщо для всіх $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ та $u \in V_\rho$ має місце рівність

$$\int_0^T \varphi(t) \langle \dot{y}(t), u \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt = - \int_0^T \dot{\varphi}(t) \langle y(t), u \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt. \quad (4.5)$$

Розглянемо наступний функціональний простір

$$\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*) = \{y \in L^2(0, T; V_\rho) : \dot{y} \in L^2(0, T; V_\rho^*)\}. \quad (4.6)$$

У випадку, коли V_ρ^* в (4.5)–(4.6) можна замінити на V_ρ , будемо писати $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*) = H^1(0, T; V_\rho)$ і називати $H^1(0, T; V_\rho)$ простором Соболева функцій $y \in L^2(0, T; V_\rho)$, чий похідні належать $L^2(0, T; V_\rho)$. Тоді, беручи до уваги зауваження 3.1 та теорему II.1.3 з [2], приходимо до наступного результату:

Теорема 4.2. *Нехай $\rho_0(x) \equiv 1$ і існує стала $\nu \in (N/2, +\infty)$ така, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega)$ при всіх $i = 1, 2, \dots, N$. Нехай y — довільний представник простору $\mathcal{W}(0, T; H_\rho, H_\rho^*)$, де $H_\rho^* = W^{-1,2}(\Omega; \rho^* dx)$. Тоді:*

(a) $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ і при цьому

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\|y(t)\|_{L^2(\Omega; H_\rho)} + \|\dot{y}(t)\|_{L^2(\Omega; H_\rho^*)} \right];$$

(b) якщо $u \in \mathcal{W}(0, T; H_\rho, H_\rho^*)$, то є справедливою наступна формула інтегрування за частинами:

$$\begin{aligned} \int_s^t \left[\langle \dot{y}(\gamma), u(\gamma) \rangle_{H_\rho^*; H_\rho} + \langle y(\gamma), \dot{u}(\gamma) \rangle_{H_\rho^*; H_\rho} \right] d\gamma = \\ = (y(t), u(t))_{H_\rho} - (y(s), u(s))_{H_\rho} \quad \forall s, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Зауваження 4.2. Оскільки вкладення $V_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega; \rho_0 dx)$, в загальному випадку, не є компактними, то питання про неперервність вкладення вагового простору $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$ в простір неперервних функцій $C([0, T]; L^2(\Omega; \rho_0 dx))$ залишається відкритим і не дослідженим на сьогодні.

5. Класифікація розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь

Нехай $T > 0$ — фіксований момент часу, Ω — обмежена відкрита область в \mathbb{R}^N з неперервною за Ліпшицом межею $\partial\Omega$. Покладемо $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $S_T = [0, T] \times \partial\Omega$. Нехай α, β ($\beta > \alpha > 0$) — задані дійсні числа. Позначимо через $M_\alpha^\beta(\Omega)$ множину усіх вимірних симетричних матриць $A = A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=\overline{1,N}}$ таких, що

$$\alpha \|\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2 \leq (A(x)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^N} \leq \beta \|\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (5.1)$$

Нехай $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ — вагова функція, для якої виконуються припущення (i)–(iii) параграфу 4. Нехай $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ — задані функції. Розглянемо в циліндрі Q_T наступну початково-крайову задачу Дирихле:

$$y_t - \operatorname{div} (A(x)\rho(x)\nabla y) + y = f \quad \text{в } Q^T, \quad (5.2)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (5.3)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } S_T. \quad (5.4)$$

За аналогією з попередніми параграфами, пов'яжемо з функцією ρ наступні вагові простори:

$$W_\rho = \left\{ y \in W_0^{1,1}(\Omega) : \|y\|_\rho := \left(\int_\Omega y^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \right) < +\infty \right\}, \quad (5.5)$$

$$H_\rho = \operatorname{cl}_{\|\cdot\|_\rho} C_0^\infty(\Omega). \quad (5.6)$$

Всюди далі функцію $y : [0, T] \rightarrow W_\rho$ будемо позначати як функцію одного аргумента $y = y(t)$.

Означення 5.1. Функцію $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо виконуються такі умови:

- (а) для кожного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ справджується інтегральна тотожність

$$(y(t), v)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v]_\rho^A dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} dt; \quad (5.7)$$

- (б) при кожному $v \in C_0^\infty(\Omega)$ має місце рівність

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} = (y_0, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (5.8)$$

Тут через $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ позначено операцію скалярного добутку в $L^2(\Omega)$, а

$$[u, v]_\rho^A = \int_\Omega [(A(x)\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho + uv] dx, \quad \forall u, v \in W_\rho.$$

Зауваження 5.1. Оскільки функція y як слабкий розв'язок задачі (5.2)–(5.4) належить простору $L^2(0, T; W_\rho)$ і при цьому мають місце оцінки

$$[y(t), v]_\rho^A \leq 2 \max\{1, \beta\} \|v\|_\rho \|y(t)\|_\rho, \quad (5.9)$$

$$\left| (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.10)$$

то, як випливає з рівності (5.7), відображення $(y(\cdot), v)_{L^2(\Omega)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервним. Отже, $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow W_\rho$ — слабо неперервна функція і така, що (див. (5.8))

$$y|_{t=0} = y_0 \quad \text{як елементи простору } L^2(\Omega).$$

Зауваження 5.2. Насправді співвідношення (5.7) можна тлумачити в сенсі розподілень на $\mathcal{D}(0, T)$. Справді, нехай $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ є слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4). Оскільки

$$\begin{aligned} |\operatorname{div}(A\rho\nabla y(t)) [v]| &\leq \int_\Omega |(A(x)\nabla y(t, x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}| \rho(x) dx \leq \\ &\leq \|A\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega; \rho dx)^N} \|v\|_\rho \leq C \|v\|_\rho \quad \forall v \in W_\rho, \end{aligned}$$

то $\operatorname{div}(A\rho\nabla y(t)) \in W_\rho^* \forall t \in (0, T)$. Отже, як випливає з рівняння (5.2), маємо: $\dot{y} \in L^2(0, T; W_\rho^*)$. Покажемо, що для кожного $v \in W_\rho$ функція $w(t) = \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho}$ є розподіленням в $\mathcal{D}'(0, T)$, тобто

$$\langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} = \frac{d}{dt} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \quad (5.11)$$

або інакше, що для довільного $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ виконується рівність

$$\int_0^T \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \varphi(t) dt = - \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \dot{\varphi}(t) dt.$$

Справді, оскільки $y(t) \in W_\rho$ і $y \in L^2(0, T; W_\rho)$, то за теоремою Бохнера (див. теорему 4.1) можемо записати:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \varphi(t) dt &= \left\langle \int_0^T \dot{y}(t) \varphi(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho} = \\ &= \left\langle - \int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho}. \end{aligned}$$

Проте, $\int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt \in W_\rho$. Отже,

$$\begin{aligned} \left\langle - \int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho} &= - \left(\int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= - \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \dot{\varphi}(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned}$$

Таким чином, $w(t) := \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \in L^1_{loc}(0, T) \subset \mathcal{D}'(0, T)$ і має місце рівність (5.11).

Як наслідок наведеного аналізу маємо наступний висновок: рівняння (5.7) можна подати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} + [y(t), v]_\rho^A &= (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \\ \text{при всіх } v \in W_\rho, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

що і потрібно було встановити.

Зауваження 5.3. Слабкий розв'язок $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4), в загальному випадку, не є єдиним. Справді, припустивши існування двох різних слабких розв'язків y_1 та y_2 ($y_1 \neq y_2$), маємо:

$$\left. \begin{aligned} (y_1(t) - y_2(t), v)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y_1(t) - y_2(t), v]_\rho^A dt &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0+} (y_1(t) - y_2(t), v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

для всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Проте простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у W_ρ , тобто може не існувати послідовності $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такої, що

$$v_k \rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad \text{за нормою } \|\cdot\|_\rho.$$

Таким чином, виконання умови (5.13) при всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$ не гарантує рівність $y_1(t) = y_2(t)$ м.с. на Ω .

Беручи до уваги наведені зауваження, введемо наступне поняття:

Означення 5.2. Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Будемо казати, що функція $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо тотожності (5.7)–(5.8) виконуються при всіх $v \in V_\rho$.

Як буде показано далі, для будь-якого проміжного простору V_ρ існування V_ρ -розв'язків є наслідком відомої теореми про розв'язність абстрактних еволюційних рівнянь з монотонними операторами, а єдиність таких розв'язків забезпечується умовою строгої монотонності

$$(A(x)\xi - A(x)\eta, \xi - \eta)_{\mathbb{R}^N} > 0 \quad \forall \xi \neq \eta \in \mathbb{R}^N \text{ м. с. на } \Omega,$$

яка, у свою чергу, є наслідком властивості $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ (див. (5.1)). У зв'язку з цим нагадаємо наступний результат (див., напр., [2, с. 75]):

Теорема 5.1. *Нехай V — рефлексивний сепарабельний банахів простір, який неперервно вкладений в гільбертів простір H , і нехай V^* — дуальний до V простір. Нехай $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$ — обмежений демінеперервний коерцитивний монотонний оператор. Тоді задача*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + \mathcal{A}y(t) &= f \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок $y \in \mathcal{W}(0, T)$ при кожних $f \in L^2(0, T; V^*)$ та $y_0 \in H$, де

$$\mathcal{W}(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) : \dot{y} \in L^2(0, T; V^*)\},$$

такий, що

$$\begin{aligned} (y(t), v)_H \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathcal{A}y(t), v \rangle_{V^*; V} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v \rangle_{V^*; V} dt \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq T, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle y(t), v \rangle_{V^*; V} &= \langle y_0, v \rangle_{V^*; V} = (y_0, v)_H. \end{aligned}$$

для довільного $v \in V$.

Тут властивості монотонності, демінеперервності та коерцитивності оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$ розуміються в такому сенсі:

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle_{V^*; V} \geq 0 \quad \forall u, v \in V; \quad (5.14)$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}(u + tv), w \rangle_{V^*; V} \text{ неперервне при всіх } u, v, w \in V; \quad (5.15)$$

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{V^*; V} \|v\|_V^{-1} = +\infty. \quad (5.16)$$

Теорема 5.2. *Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді при заданих $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ задача (5.2)–(5.4) має єдиний V_ρ -розв'язок $y \in \mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$ (див (4.6)).*

Доведення. Покажемо, що в цьому випадку виконуються усі передумови теореми 5.1. Справді, поклавши в теоремі 5.1 $V = V_\rho$ і $H = W_\rho$, пов'яжемо з задачею (5.2)–(5.4) лінійний оператор $\mathcal{A} : V_\rho \rightarrow V_\rho^*$, який означимо за правилом:

$$\langle \mathcal{A}y, v \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = [y, v]_\rho^A \quad \forall y, v \in V_\rho. \quad (5.17)$$

Тоді в силу оцінки (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, білінійна форма $[y, v]_\rho^A$ при кожному фіксованому $y \in V_\rho$ є неперервною за аргументом v . Отже, оператор $\mathcal{A} : V_\rho \rightarrow V_\rho^*$ в (5.17) є лінійним і обмеженим. При цьому зауважимо, що властивості (5.14)–(5.16) є очевидним наслідком (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$. Таким чином, за теоремою 5.1 задача (5.2)–(5.4) має єдиний V_ρ -розв'язок у просторі $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$, що і потрібно було встановити. \square

Наведемо ще одну характеристику V_ρ -розв'язків задачі (5.2)–(5.4), яка буде залучена далі.

Означення 5.3. Будемо казати, що трійка просторів

$$V_\rho \subseteq L^2(\Omega) \subseteq V_\rho^* \quad (5.18)$$

є еволюційною, якщо простір V_ρ неперервно та щільно вкладається в $L^2(\Omega)$.

Зауважимо, що виходячи з умов (i)–(ii) параграфу 4 та зауваження 4.1, трійка (5.18) є еволюційною принаймні для $V_\rho = H_\rho$.

Твердження 5.1. Нехай функція $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4) і нехай при заданому V_ρ трійка просторів (5.18) є еволюційною. Тоді $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ і при цьому для будь-яких $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ виконується енергетична рівність:

$$\frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\|y(t)\|_\rho^A)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (5.19)$$

де позначено

$$\|y(t)\|_\rho^A = \left(\int_\Omega [A(x)\nabla y(t), \nabla y(t)]_{\mathbb{R}^N} \rho + y^2(t) dx \right)^{1/2}.$$

Доведення. Перепишемо тотожність (5.7) у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t), v \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v]_\rho^A dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} dt,$$

де v є довільною функцією з V_ρ . Оскільки $\langle \dot{y}(t), v \rangle_{V_\rho^*; V_\rho}$ є розподіленням у $\mathcal{D}'(0, T)$, то з попереднього отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t), v\varphi(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v\varphi(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v\varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Оскільки функції $\{v\varphi(t)\}$ утворюють щільну підмножину в $L^2(0, T; V_\rho)$, співвідношення (5.20) залишиться в силі, якщо покласти замість $v\varphi(t)$ функцію

$y(t)$. Тепер скористаємося формулою інтегрування за частинами

$$(y(t), u(t))_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}(t), u(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} + \langle \dot{u}(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} \right] dt$$

$$\forall u, y \in \mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*), \quad (5.21)$$

справедливість якої гарантована вихідними припущеннями щодо еволюційності трійки просторів (5.18) (див. [2, с. 15]). В результаті енергетична рівність (5.19) є наслідком співвідношень (5.20)–(5.21) при $u(t) = y(t)$. Для завершення доведення досить скористатися наступним відомим результатом (див. [4]): якщо $V \subseteq H \subseteq V^*$ — еволюційна трійка просторів, де H — гільбертів простір, то вкладення $\mathcal{W}(0, T; V, V^*) \hookrightarrow C([0, T]; H)$ є неперервним. \square

Зауваження 5.4. Якщо в умовах твердження 5.1 не вимагати, аби простори (5.18) утворювали еволюційну трійку, то енергетична рівність (5.19) набуде вигляду:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} + (\|y(t)\|_\rho^A)^2 \right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \quad (5.22)$$

Як легко бачити, рівність (5.22) не залежить явно від вибору простору V_ρ . Отже, в певному сенсі її можна вважати визначальною. У зв'язку з цим прийmemo за основу наступне поняття:

Означення 5.4. V_ρ -розв'язок $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4) будемо називати варіаційним, якщо він задовольняє енергетичну рівність (5.19).

Зауважимо, що варіаційні розв'язки не вичерпують усієї множини слабких розв'язків. Для уточнення сказаного наведемо наступний результат.

Твердження 5.2. Нехай функції y_1 та y_2 є варіаційними розв'язками задачі (5.2)–(5.4) і такими, що $y_1 \neq y_2$. Тоді функція $(y_1 + y_2)/2$ є слабким, проте не варіаційним розв'язком тієї ж задачі.

Доведення. Справді, для півсуми $(y_1 + y_2)/2$, як легко бачити, інтегральні тотожності (5.7)–(5.8) залишаються в силі. Проте, що стосується енергетичної рівності (5.19), то в силу оцінки

$$\left[\frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}, \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} \right]_\rho^A < \frac{1}{2} \left([y_1(t), y_1(t)]_\rho^A + [y_2(t), y_2(t)]_\rho^A \right)$$

її виконання стає неможливим. Твердження доведено. \square

Наступний результат можна вважати центральним у даному розділі.

Теорема 5.3. Слабкий розв'язок $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4) є її V_ρ -розв'язком тоді і тільки тоді, коли він варіаційний.

Доведення. Імплікація " V_ρ -розв'язок \implies слабкий розв'язок " є очевидною внаслідок означень 5.4 та 5.1. Нехай $y^* \in L^2(0, T; V_\rho)$ є тим слабким розв'язком, який задовольняє енергетичну рівність (5.19). Покажемо, що в цьому випадку має місце обернена імплікація " слабкий розв'язок $\implies V_\rho$ -розв'язок " при деякому V_ρ ($H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$).

Утворимо простір $L^2(0, T; V_\rho)$ за правилом:

$$L^2(0, T; V_\rho) = \text{Li} \{y^*, L^2(0, T; H_\rho)\},$$

де через $= \text{Li} \{A, B\}$ позначено лінійну оболонку множин A та B . Отже, $L^2(0, T; V_\rho)$ є найменшим за включенням підпростором простору $L^2(0, T; W_\rho)$, який містить y^* та $L^2(0, T; H_\rho)$. В результаті, для довільного елемента $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ має місце декомпозиція

$$y = \alpha y^* + \beta \tilde{y}, \quad (5.23)$$

де $\tilde{y} \in L^2(0, T; H_\rho)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Оскільки $y^* \in L^2(0, T; W_\rho)$ є слабким розв'язком, то за означенням 5.1 повинна виконуватися інтегральна тотожність:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), v\varphi(t) \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), v\varphi(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v\varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \quad (5.24)$$

при всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$. Оскільки функції

$$\{v\varphi(t) : v \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(0, T)\}$$

утворюють щільну множину в $L^2(0, T; H_\rho)$, то тотожність (5.24) можна поширити до вигляду

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \tilde{y}(t) \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \tilde{y}(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \tilde{y}(t))_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \quad (5.25)$$

де \tilde{y} — довільний елемент простору $L^2(0, T; H_\rho)$.

Беручи до уваги, що $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$, маємо: $W_\rho^* \subseteq V_\rho^* \subseteq H_\rho^*$. Отже, співвідношення (5.25) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \tilde{y}(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \tilde{y}(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \tilde{y}(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \tilde{y} \in L^2(0, T; H_\rho). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Для завершення доведення досить показати, що співвідношення (5.26) залишиться в силі для довільної функції $\tilde{y} \in L^2(0, T; V_\rho)$. Для цього скористаємося енергетичною рівністю (5.19) і перепишемо її у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), y^*(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), y^*(t)]_\rho^A \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y^*(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Тоді, залучаючи декомпозицію (5.23) та рівності (5.26) і (5.27), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), y(t)]_\rho^A \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall y \in L^2(0, T; V_\rho). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), v \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), v]_\rho^A \right] \varphi(t) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T), \quad \forall v \in V_\rho. \end{aligned}$$

Таким чином, y^* є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4), що і потрібно було встановити. \square

6. Про деякі застосування в теорії оптимальних систем

Нехай, як і вище, Ω є обмеженою відкритою множиною в \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай ξ_1 та ξ_2 — задані елементи простору $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ з наступними властивостями:

$$0 < \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \text{ майже скрізь в } \Omega, \quad \xi_1^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (6.1)$$

Нехай $m \in \mathbb{R}_+$ — додатна величина така, що $\|\xi_1\|_{L^1(\Omega)} \leq m \leq \|\xi_2\|_{L^1(\Omega)}$.

Для заданих $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ та $y_d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$I(A, \rho, y) = \zeta \int_{\Omega} |y(x) - y_d(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \|\nabla y(x)\|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \longrightarrow \inf \quad (6.2)$$

за таких обмежень:

$$y' - \operatorname{div} A(x)\rho(x)\nabla y + y = f \quad \text{в } Q^T, \quad (6.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (6.4)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } S_T. \quad (6.5)$$

Будемо казати, що пара $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням для початково-крайової задачі (6.3)–(6.5), якщо $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N] \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ і $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$, де позначено

$$\mathcal{R}_{ad} = \left\{ \rho \in L^1(\Omega) : \int_\Omega \rho dx = m, \xi_1(x) \leq \rho(x) \leq \xi_2(x) \text{ м. с. в } \Omega \right\}. \quad (6.6)$$

Наступне поняття є ключовим для даної задачі:

Означення 6.1. Будемо казати, що трійка функцій (A, ρ, y) є допустимою для задачі оптимального керування (6.2)–(6.6), якщо $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням, а елемент

$$y \in L^2(0, T; W_\rho) = \left\{ g \in L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) : \int_0^T \int_\Omega (g^2 + \rho |\nabla g|^2) dxdt < +\infty \right\} \quad (6.7)$$

є слабким розв'язком задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 5.1, тобто для кожного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ функція $y = y(A, \rho)$ задовольняє інтегральну тотожність (5.7) та умову (5.8).

Позначимо через Ξ множину усіх допустимих розв'язків наведеної вище задачі оптимального керування. Зрозуміло, що проблема єдиності слабого розв'язку тісно пов'язана з проблемою щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ у ваговому просторі Соболева W_ρ . Проте, як показано у праці [5], існують приклади вироджених вагових функцій ρ , при яких означена вище властивість щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ в W_ρ порушується. Отже, в цьому випадку для задачі (6.3)–(6.5) при фіксованій парі $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ може існувати декілька, загалом незалежних, слабких розв'язків. Проте в силу лінійності вихідного об'єкта керування, при кожному допустимому наборі (A, ρ) відповідна множина слабких розв'язків задачі (6.3)–(6.5) є опуклою і замкненою. До того ж, залучаючи аргументи праці [5] та теорему 5.2, легко показати, що для кожної допустимої пари (A, ρ) початково-крайова задача (6.3)–(6.5) допускає принаймні один слабкий розв'язок у сенсі означення 5.1. Таким чином, $\Xi \neq \emptyset$, а отже, задача оптимального керування (6.2)–(6.6) є регулярною.

Означення 6.2. Будемо казати, що набір функцій

$$(A^0, \rho^0, y^0) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0, T; W_\rho)$$

є слабким оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6), якщо (A^0, ρ^0, y^0) є мінімізантом наступної задачі

$$\left\langle \inf_{(A, \rho, y) \in \Xi} I(A, \rho, y) \right\rangle.$$

У зв'язку з цим зауважимо, що існування слабких оптимальних розв'язків задач керування для вироджених параболічних рівнянь є на сьогодні новою і не дослідженою в повному обсязі проблемою. Основними причинами такої ситуації є такі: по-перше, для слабких розв'язків початково-крайової задачі (6.3)–(6.5) немає зручних апріорних оцінок у нормі простору $\|\cdot\|_{L^2(0,T;W_\rho)}$. По-друге, недослідженими залишаються такі топологічні властивості множини допустимих слабких розв'язків Ξ як замкненість та компактність. По-третє, що є характерним лише для задач означеного вище класу, кожна допустима трійка (A, ρ, y) належить відповідному (тобто строго асоційованому з нею) простору $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0, T; W_\rho)$, а отже, множина Ξ утворена сукупністю об'єктів, які належать різним функціональним просторам.

За аналогією з попередніми параграфами, для кожного допустимого керування (A, ρ) , позначимо через H_ρ замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за $\|\cdot\|_\rho$ -нормою. Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді, залучаючи аргументи з [6], легко переконатися в справедливості наступного результату, який є характерним для означеного класу задач.

Твердження 6.1. Нехай (A, ρ) — допустиме керування, і нехай $V_{1,\rho}$ і $V_{2,\rho}$ — пов'язані з ним проміжні простори такі, що $(V_{1,\rho} \neq V_{2,\rho})$. Нехай $y_1 = y_1(A, \rho)$ та $y_2 = y_2(A, \rho)$ є відповідними V_ρ -розв'язками початково-крайової задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 5.2. Припустимо, що $y_1 \neq y_2$. Тоді будь-який елемент їх опуклої оболонки

$$\text{conv} \{y_1, y_2\} = \{\eta y_1 + (1 - \eta)y_2 : \forall \eta \in (0, 1)\}$$

є лише слабким, проте не еволюційним, розв'язком вихідної задачі (6.3)–(6.5).

Беручи даний факт до уваги, покажемо, що для задачі (6.2)–(6.6) має місце результат, який не є характерним для теорії лінійно-квадратичних задач оптимального керування.

Твердження 6.2. Нехай $(A^0, \rho^0, y^0) \in \Xi$ є слабким, проте не варіаційним, оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6). Припустимо, що множина

$$E = \left\{ x \in \Omega : A^0(x) > \alpha I, (A^0(x))^{-1} > \beta^{-1} I \right\} \quad (6.8)$$

має ненульову лебегову міру й існує матриця $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ така, що для довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ та $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ виконується рівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left(A^*(x) \nabla y^0, \nabla \varphi \right)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 dx dt = 0. \quad (6.9)$$

Тоді слабкі оптимальні розв'язки задачі (6.2)–(6.6) утворюють континуум.

Доведення. Оскільки $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, то, як легко бачити, матриця

$$A_\theta(x) = A^0(x) + \theta \chi_E(x) A^*(x)$$

буде також належати множині $M_\alpha^\beta(\Omega)$ при всіх достатньо малих $|\theta|$. Тут через χ_E позначено характеристичну функцію множини E . В результаті, поєднуючи інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} & (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y^0(t), \varphi]_{\rho^0}^{A^0} dt - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt := \\ & := (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(A^0(x)\nabla y^0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T \end{aligned}$$

з умовою (6.9), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} & (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(A_\theta(x)\nabla y^0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned}$$

Отже, трійка функцій (A_θ, ρ^0, y^0) є також слабким допустимим розв'язком задачі оптимального керування (6.2)–(6.6) при достатньо малих значеннях $|\theta|$, тобто $(A_\theta, \rho^0, y^0) \in \Xi \forall \theta \in (0, \theta^*)$ з деяким $\theta^* > 0$. Оскільки

$$I(A_\theta, \rho^0, y^0) \equiv I(A^0, \rho^0, y^0),$$

то пара (A_θ, ρ^0) є слабким оптимальним керуванням при всіх $\theta \in (0, \theta^*)$, що і потрібно було встановити. \square

Зауваження 6.1. Припущення щодо існування матриці $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, яка б задовольняла умову (6.9), є прямим наслідком ефекту Лаврентьєва: для заданої виродженої вагової функції ρ^0 простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у ваговому просторі Соболева W_{ρ^0} , а отже, $H_{\rho^0} \neq W_{\rho^0}$ (див. твердження 1.1 в [5]).

Бібліографічні посилання

1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения/ Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М. : Мир, 1978. — 337 с.
2. Иваненко В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами/ В. И. Иваненко, В. С. Мельник.— К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
3. Drabec P. Nonlinear elliptic equations, singular and degenerate cases/ P. Drabec, A. Kufner, N. Nicolosi.— University of West Bohemia, 1996.
4. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications/ E. Zeidler.— IIA, IIB, Springer-Verlag, New York, 1990.
5. Zhikov V. V., Weighted Sobolev spaces/V. V. Zhikov. Sbornik: Mathematics, No. 8, Vol. 189, 1998, P. 27–58.
6. Zhikov V. V., Pastukhova S. E., Homogenization of degenerate elliptic equations/ V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Siberian Math. Journal, No. 1, Vol. 49, 2006, P. 80–101.