ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 74–77

Проблеми математичного моделювання
та теорiї диференцiальних рiвнянь

УДК 517.91

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49010.

Рассмотрена третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода продолжений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, полуограниченная область.

Введение

В физике достаточно часто используются математические модели, основой которых является телеграфное уравнение. Такого рода модели позволяют учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. Однако до недавнего времени для телеграфного уравнения удалось получить только точное решение задачи Коши, обобщенной задачи Коши и задачи Гурса [4].

В [1] с помощью функции Римана разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение третьей краевой задачи в полуограниченной области.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x-x_n < l,\;\; t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0\;, \qquad (1.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t_n) = 0;\quad u_t(x,t_n) = 0,\quad x > x_n \qquad (1.2)$$

и краевому условию третьего типа

$$u_x(x_n,t) + h(x_n,t)u(x_n,t) = \kappa(t-t_n).\;\; t > t_n. \qquad (1.3)$$

2. Решение задачи

Для решения этой задачи применяется метод, разработанный в [3,4]. Решение поставленной задачи основано на установленном в [1] факте, что в случае краевых условий третьего типа решением дифференциального уравнения (1) является функция

$$u(x,t) = e^{\frac{-B(x-xn)}{2}} \int_{t-t_n+\frac{x-xn}{a}}^{t-t_n-\frac{x-xn}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2\,(t-tn-\eta)}{2}} \omega(\eta) d\eta$$

с произвольной функцией $\omega(\eta)$. Здесь $J_0(z)$— функция Бесселя нулевого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x-x_n)^2 - a^2((t-t_n)-\eta)^2]}; \tag{2.1}$$

$$c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \tag{2.2}$$

Функция $\omega(\eta)$ должна быть определена на всей числовой оси. Так как в краевом условии (3) функция $\kappa(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t. Учитывая нулевые начальные условия (2), функцию $\kappa(t)$ на всю ось t необходимо продолжать нулем. Поэтому продолжение функции $\kappa(t)$ на всю ось t будет выглядеть следующим образом:

$$K\,(t-t_n) = \begin{cases} \kappa\,(t-t_n)\,, & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Краевое условие (1.3) также продолжается на всю ось t:

$$u_x(x_n,t) + h(x_n,t)u(x_n,t) = K(t-t_n). \;\; t > t_n.. \tag{2.4}$$

Учитывая, что по условиям постановки задачи волны в среде возбуждаются на левом конце и распространяются в среду в направлении положительных x, решение задачи отыскивается в виде функции

$$u(x,t) = 2e^{\frac{-B(x-xn)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-xn}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2\,(t-tn-\eta)}{2}} K_0(\eta) d\eta \tag{2.5}$$

с неизвестной функцией $K_0(\eta)$. Здесь z и c_1 определяются формулами (2.1) и (2.2) соответственно.

Функция (2.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) при произвольной функции $K_0(t)$. Для анализа краевого условия (2.4) вычислим производную функции (2.5) по x. Получим:

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{a} e^{-\frac{B-Da}{2}(x-x_n)} K_0\left(t-t_n-\frac{x-x_n}{a}\right) +$$

$$e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \int\limits_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0\,(z) - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1\,(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_{0(\eta)} d\eta. \tag{2.6}$$

При вычислении этой производной учтено, что $\frac{\partial z}{\partial x} = c_1 \frac{x - x_n}{z}$, $\frac{\partial J_0(z)}{\partial x} = \frac{dJ_{0(z)}}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x-x_n)}{z}\frac{dJ_0(z)}{dz} = -\frac{c_1(x-x_n)}{z}J_1(z)$, так как $\frac{dJ_0(z)}{z} = -J_1(z)$. Учтено также, что при $\eta = t - t_n - \frac{x - x_н}{a}$ $z = 0$, а $J_0(0) = 1$.

Подставим теперь форму решения (2.5) в краевое условие (2.4) с учетом (2.6). Получим:

$$-\frac{1}{a}K_0(t - t_n) + \int\limits_0^{t-t_n} [h(x_n, t) - \frac{B}{2}] J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_0(\eta) \, d\eta = \\ = K(t - t_n). \quad (2.7)$$

В равенстве (2.7) следует принимать $z|_{x=x_n} = a(t - t_n - \eta)\sqrt{-c_1}$.

Равенство (2.7) представляет собой интегральное уравнение для определения функции K_0. Выполним в уравнении (2.7) преобразование $\tau = t - t_n$. Тогда уравнение (2.7) примет вид:

$$-\frac{1}{a}K_0(\tau) + \int\limits_0^{\tau} [h(x_n, \tau + t_n) - \frac{B}{2}] J_0\left(a(\tau - \eta)\sqrt{-c_1}\right) e^{\frac{Da^2}{2}(\tau-\eta)} K_0(\eta) \, d\eta = \\ = K(\tau). \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) и свойства (2.3) функции $K(\tau)$ следует, что функция $K_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$K_0(\tau) \equiv 0, \ \tau < 0. \quad (2.9)$$

В силу свойства (2.9) функции $N_0(\tau)$ функция (2.5) будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Действительно, при $t = t_n$ из формулы (2.5) получаем: $u(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \int\limits_0^{-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{-\frac{Da^2}{2}\eta} K_0(\eta) \, d\eta$.

При $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (2.9) функции $K_0(\tau)$, $u(x, t_n) = 0$. Иными словами, функция (2.5) удовлетворяет первому начальному условию (1.2). Продифференцируем функцию (2.5) по t. Получим:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} [e^{\frac{Da}{2}(x-x_n)} K_0\left(t - t_n - \frac{x - x_n}{a}\right) + \\ \int\limits_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Da^2}{2}J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_0(\eta) \, d\eta]. \quad (2.10)$$

При вычислении производной учтено, что $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z}$,

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{dJ_0(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z}\frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z} J_1(z).$$

Из формулы (2.10) при $t = t_{н}$ получаем:

$$u_t(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)}[e^{\frac{Da}{2}(x-x_n)} K_0\left(-\frac{x-x_n}{a}\right) + \int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} [\frac{Da^2}{2} J_0(z) - c_1 a^2 \frac{\eta}{z} J_1(z)] e^{-\frac{Da^2}{2}\eta} K_0(\eta)\, d\eta].$$

В правой части этой формулы при $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования и аргумент функции $K_0(\tau)$ отрицательны. Поэтому, на основании свойства (2.9) функции $K_0(\tau)$, $u_t(x, t_n) = 0$. А это значит, что функция (2.5) удовлетворяет второму начальному условию (1.2).

Таким образом, показано, что функция (2.5) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

3. Выводы

В результате применения комбинации интегрального представления решения и метода продолжений получено в квадратурах решение первой краевой задачи для телеграфного уравнения. Анализ формулы (2.5), представляющей решение задачи, показывает, что это решение имеет характер распространяющихся со скоростью a волн. В то же время в процессе распространения происходит искажение этих волн, зависящее от коэффициентов B и D при первых производных в уравнении (1.1). Разработанный метод может быть применен для решения других краевых задач подобного типа. В частности, с его помощью могут быть решены краевые задачи для полуограниченных областей с иными краевыми условиями. В дополнительной комбинации с методом отражений могут быть также получены решения краевых задач для ограниченных областей.

Библиографические ссылки

1. *Остапенко В. А.* Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения / В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск, 2008. — С. 3–17.
2. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области/ В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. РВВ ДНУ, Днепропетровск, 2008 —- С. 18–20.
3. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. / В. А. Остапенко // Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, Серия Моделирование, вып. 1. — С. 149–161.
4. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // — М. : Наука 1966. — С. 724.

Надійшла до редколегії 28.11.2010