

УДК 532.5 + 517.958

## ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРОСТОРОВИХ ВИХОРИВ ІЗ РІЗНИМИ ІНТЕНСИВНІСТЮ І КРУТКОЮ

О. А. Мельник\*, В. І. Перехрест\*\*

\* Національна металургійна академія України,  
Дніпропетровськ, 49005. E-mail: nmetau-melnik@mail.ru

\*\* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,  
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: perekhrest@i.ua

Розглядається кінематична взаємодія паралельних просторових вихорів одного напрямку обертання з різними інтенсивностями та закручуванням, яка зумовлює зміщення їх центрів та об'єднання в один вихор. Показано, що результати взаємодії просторових вихорів суттєво відрізняються від результатів накладання плоских течій, породжених комплексними потенціалами джерел і вихроджерел.

**Ключові слова:** планетарний вихор, резонансні умови і траєкторії, утворення супутників планет.

### 1. Вступ

У праці [3] отримано та детально вивчено окремий розв'язок рівнянь Ейлера, який являє собою одиничний вихор-шнур у просторі. Це своєрідне вихроджерело є просторовим аналогом відповідних вихроджерел у плоскій задачі гідродинаміки [1, 2]. Відомо [1], що при накладанні течій, породжених комплексними потенціалами типу джерел і вихроджерел, моделюються складні взаємодії вихорів та обтікання плоских тіл. При цьому центри складених джерел – особливі точки різних типів – при взаємодії не зміщуються. Таким чином конструюються відомі моделі вихрових ниток, вихрових ланцюжків, доріжок Кармана та ін. Нижче досліджуються моделі взаємодії просторових вихорів [3] із паралельними осями; показано, що при таких взаємодіях центри вихорів завжди зміщуються [4, 5], а у випадках одного напрямку закручування об'єднуються [4] при певних, «критичних» відстанях.

### 2. Побудова моделі взаємодії двох вихорів

Випишемо осесиметричне поле швидкостей одиничного вихрового шнура з віссю Oz у циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$\begin{aligned} V_y^{(0)} = 0; \quad V_z^{(0)} &= A_0 \left( 1 - \frac{y^2}{2} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right); \\ V_\varphi^{(0)} &= A_0 y \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $y = C_0 r / 2$  – безрозмірна радіальна змінна,  $A_0 = C_0^2 A / 4$  – константа,  $C_0$ ,  $A$  – довільні сталі, причому  $C_0$  визначає інтенсивність закручування вихора і одночасно є масштабним множником радіальної безрозмірної координати  $y$ . Зі збільшенням цього параметра вихрове збурення-шнур стискується до осі одночасно із зростанням амплітуд швидкостей та його енергії. Течія (2.1) є просторовим гвинтом, де поєднується суто вертикальний рух уздовж осі  $Oz$  зі швидкістю  $A_0$  з чисто обертальним рухом циліндра  $y = \sqrt{2}$  зі швидкістю  $A_0/e$ . Траєкторіями руху на проміжних циліндрах є просторові гвинтові лінії зі змінним кроком. При цьому в області власне шнура  $0 \leq y \leq \sqrt{2}$  течія є висхідною з витоком поля  $Q_z = 2\pi A/e$  і не залежить від величини закручування  $C_0$ . Зовні шнура маємо низхідну течію з тим же витоком протилежного напрямку. Запишемо це поле, як у праці [5], у глобальній циліндричній системі координат, з початком координат, у якій вісь шнура (2.1) має координати  $(y_0, \varphi_0)$ .

У подальшому застосуємо формули переходу між місцевими координатами  $(\bar{y}, \bar{\varphi})$  та глобальними координатами  $(y, \varphi)$  довільної точки простору

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 &= y_0^2 - 2y_0 y \cos(\varphi - \varphi_0) + y^2, \\ \sin \bar{\varphi} &= \frac{y}{\bar{y}} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{1}{y} (y \cos(\varphi - \varphi_0) - y_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Перетворимо з допомогою (2.2) поле (2.1) до глобальних координат  $(y, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} V_y &= -A_0 y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{y}^2\right), \\ V_z &= A_0 \left(1 - \frac{\bar{y}^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \\ V_\varphi &= A_0 (y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y) \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{y}^2\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Прямою підстановкою неважко перевірити, що рівняння нерозривності у глобальних координатах [4,5]:

$$\frac{\partial}{\partial y} (yV_y) + \frac{\partial}{\partial z} (yV_z) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.4)$$

поле (2.3) задовольняє тотожно при будь-яких  $y_0, \varphi_0$ . Знайдемо функцію течії поля (2.3), переписавши це поле у вигляді диференціальних рівнянь руху в координатах  $(y, \varphi, z)$ :

$$\frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z, \quad y \frac{d\varphi}{dt} = V_\varphi. \quad (2.5)$$

Комбінуючи ці рівняння, маємо наступне диференціальне рівняння у фазовій площині  $(y, \varphi)$ :

$$\frac{dy}{d\varphi} = y_0 \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{y(y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y)}, \quad (2.6)$$

або  $[y(y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y)] dy - y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) d\varphi = 0$ . Останнє рівняння за допомогою інтегрувального множника  $\mu = \exp\left(-\frac{y_0^2 + y^2}{2}\right)$  зводиться до рівняння у повних диференціалах і має інтеграл вигляду  $\Psi(y, \varphi) = \Psi_0$ , де

$$\Psi = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (2.7)$$

Неважко встановити, що швидкості (2.3) виражаються через функцію течії (2.7) такими залежностями [1-3]:  $V_y = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$ ,  $V_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $V_z = V_z(y, \varphi)$ . Поле тиску для одиничного вихрового шнура знайдено у праці [4] у формі безрозмірного тиску  $P = p/p_\infty$ ,  $P = 1 - q(y)$ ,  $q(y) = \chi^2 \exp(-\tilde{y}^2/2)$ , де  $q(y)$  – безрозмірне падіння тиску,  $p_\infty$  – тиск на нескінченності,  $\chi = \frac{AC_0^2}{4V_0}$ , а  $V_0 = \sqrt{2p_\infty/\rho}$  – швидкісний напір на нескінченності для даного середовища. Величину  $\chi$  доцільно назвати узагальненим коефіцієнтом інтенсивності шнура.

### 3. Дослідження взаємодії вихорів

Переходячи до розгляду взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання [5], для зручності розташуємо центри цих вихорів на однакову відстань  $y_0$  від початку координат  $y = 0$  на променях  $\varphi_0 = 0$  та  $\varphi_0 = \pi$ . Для другого (правого) вихору (рис. 1) покладемо  $\varphi_0 = 0$ , тоді формули переходу координат (2.2) набудуть такого вигляду:

$$\tilde{y}^2 = y_0^2 - 2y_0y \cos \varphi + y^2. \quad (3.1)$$

Щодо поля швидкостей (2.3), то з цих формул вилучимо параметр  $\varphi_0$ .

Для першого (лівого) вихору (рис. 1) покладемо  $\varphi_0 = \pi$  і врахуємо, що даний вихор має іншу закрутку та інтенсивність, ніж перший. Для цього введемо коефіцієнти відношення для інтенсивності  $\alpha = \frac{A_1}{A}$  і  $\kappa = \frac{C_{0,1}}{C_0}$  для закручування. Всі параметри першого вихору спочатку переведемо в реальні координати, а потім зведемо до безрозмірних координат другого вихору. Такі перетворення зведуть формулу (2.2) до вигляду:  $\tilde{y}^2 = (y_0^2 + 2y_0y \cos \varphi + y^2) \kappa^2$ , поле швидкостей (2.3) перетвориться до вигляду:

$$\begin{aligned} V_y^{(1)} &= \tilde{A}_0 y_0 \sin \varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{y}^2\right) \alpha \kappa^3, \\ V_z^{(1)} &= \tilde{A}_0 \left(1 - \frac{\tilde{y}^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) \alpha \kappa^2, \\ V_\varphi^{(1)} &= \tilde{A}_0 (y - y_0 \cos \varphi) \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{y}^2\right) \alpha \kappa^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

адже для першого вихору маємо:  $\tilde{A}_0 = C_{0,1}^2 A_1 / 4 = \alpha \kappa^2 C_0^2 A / 4 = \alpha \kappa^2 A_0$ ,  $\tilde{y}_0 = \kappa y_0$ . При накладанні полів швидкостей двох даних вихрових шнурів будуть складатися відповідні компоненти полів швидкостей обох вихорів:

$$V_y^{(s)} = V_y^{(1)} + V_y^{(2)}, \quad V_z^{(s)} = V_z^{(1)} + V_z^{(2)}, \quad V_\varphi^{(s)} = V_\varphi^{(1)} + V_\varphi^{(2)}. \quad (3.3)$$

Це невісесиметричне поле як сума полів типу (2.3) через лінійність рівняння нерозривності (2.4) буде тотожно його задовольняти, тобто кінематично сумарне поле (3.3) може існувати. Неважко бачити, що воно є неперервним в усьому просторі, оскільки при  $y \rightarrow +\infty$  маємо [5]:  $\lim_{y \rightarrow +\infty} V_y^{(s)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} V_\varphi^{(s)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} V_z^{(s)} = 0$ . Функція течії даного поля (3.3) знаходиться також складанням функцій течії двох даних вихорів, і являє собою інтеграл вигляду

$$\Psi = \alpha \kappa^2 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right). \quad (3.4)$$

Як ми бачимо, фактично функція течії сумарного поля (3.3) є сумою функцій течій кожного вихору, записана у спільних координатах  $(y, \varphi)$ . Швидкості (3.3) виражаються через функцію течії (3.4) такими залежностями:

$$V_y^{(s)} = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi^{(s)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V_z^{(s)} = V_z^{(s)}(y, \varphi), \quad (3.5)$$

в силу чого рівняння нерозривності (2.4) завжди задовольняється. Інтеграл (3.4) дає сім'ю циліндричних поверхонь течії з напрямними лініями (рис. 1). На рисунку 1 ліворуч знаходиться вихор зі зміненими параметрами, якому відповідає перша експонента з формули (3.4) і, відповідно, праворуч ми помістили вихор з параметрами  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$ . Надалі виконаємо дослідження взаємодії цих вихорів за допомогою просторового відображення ізоліній функції течії (3.4).

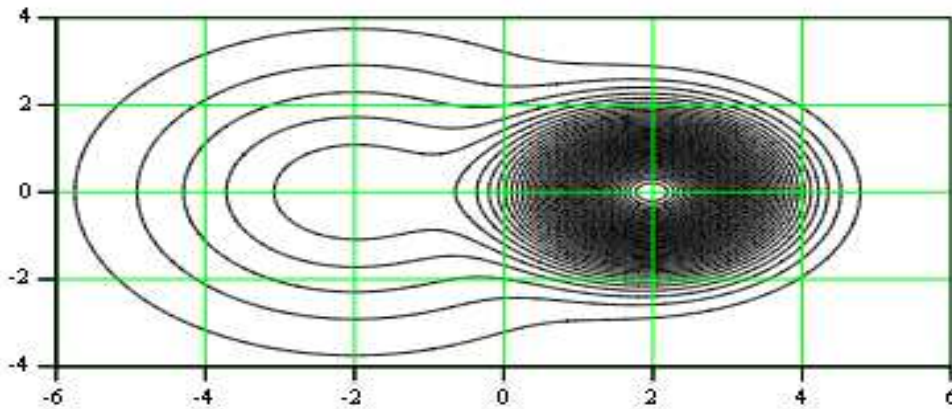


Рис. 1. Лінії течії

Рисунок 1 показує лінії течії двох взаємодіючих вихорів в площині  $(y, \varphi)$ , при  $\alpha = 1/2$ ,  $\kappa = 1/2$ ,  $y_0 = 2$  ( $y_1 = -1,9478$ ,  $y_2 = 1,9828$ ,  $y^* = -0,7882$ ).

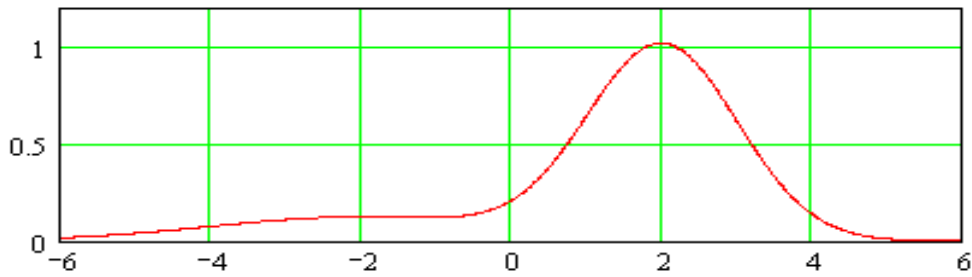


Рис. 2. Січна лінія

Рисунок 2 дає січну лінію поверхні функції течії, при  $\alpha = 1/2$ ,  $\kappa = 1/2$ ,  $y_0 = 2$  ( $y_1 = -1,9478$ ,  $y_2 = 1,9828$ ,  $y^* = -0,7882$ ).

Щоб працювати в декартовій системі координат  $(x_1; y_1)$ , було зроблено звичайний перехід від полярної  $(y, \varphi)$ :  $\{x_1 = y \cos \varphi, y_1 = y \sin \varphi$ , причому фіксована точка  $(y_0, \varphi_0)$  в декартовій системі координат буде мати наступні координати  $(x_{01} = y_0 \cos \varphi_0, y_{01} = y_0 \sin \varphi_0)$  і, оскільки ми розташуємо центри вихорів на одній лінії симетрично відносно початку координат, то для лівого вихору маємо  $y_{01} = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi$ , а для правого вихору маємо  $y_{01} = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ . Отже, функцію течії (3.4) отримаємо у вигляді:

$$\Psi(x_1, y_1) = \alpha \kappa^2 A_0 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + A_0 \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \quad (3.6)$$

де  $\tilde{y}^2 = (x_{01}^2 + 2x_{01}x_1 + x_1^2 + y_1^2) \kappa^2$ ,  $\bar{y}^2 = x_{01}^2 - 2x_{01}x_1 + x_1^2 + y_1^2$ .

Також для отримання осового перерізу поверхні течії (див. рис. 2) достатньо в (3.6) покласти  $y_1 = 0$ :

$$\Psi(x_1, 0) = \alpha \kappa^2 A_0 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + A_0 \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \quad (3.7)$$

де  $\tilde{y}^2 = (x_{01}^2 + 2x_{01}x_1 + x_1^2) \kappa^2$ ,  $\bar{y}^2 = x_{01}^2 - 2x_{01}x_1 + x_1^2$ .

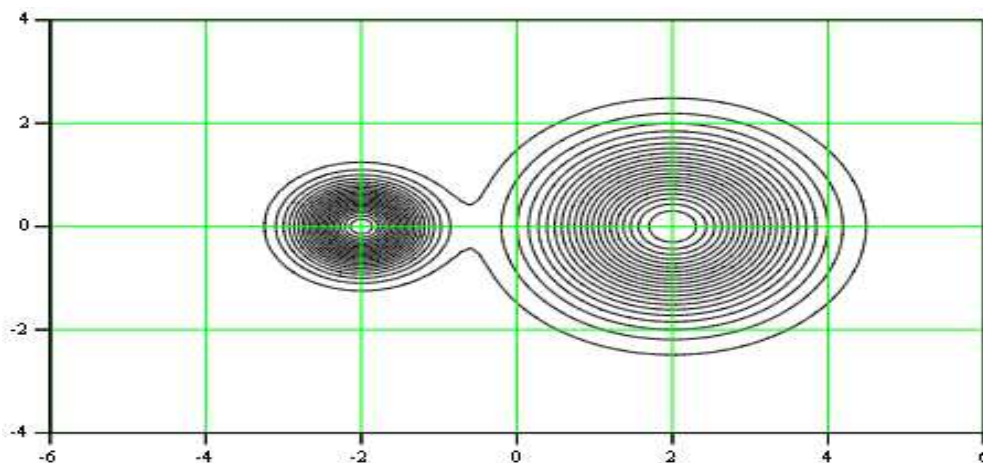


Рис. 3. Лінії течії

Рисунок 3 показує лінії течії двох взаємодіючих вихорів у площині  $(y, \varphi)$ , при  $\alpha = 1/4, \kappa = 2, y_0 = 2$  ( $y_1 = -1,9997, y_2 = 2,0, y^* = -0,5682$ ).

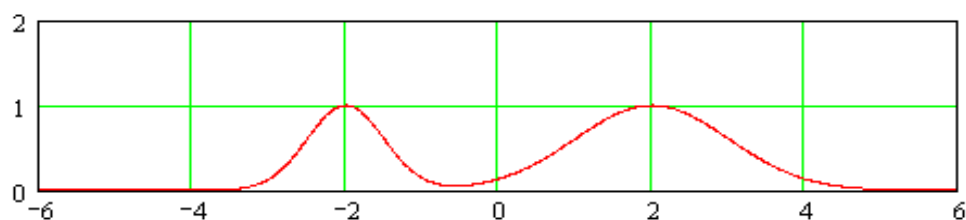


Рис. 4. Січна лінія

На рисунку 4 зображена січна лінія поверхні функції течії, при  $\alpha = 1/4, \kappa = 2, y_0 = 2$  ( $y_1 = -1,9478, y_2 = -1,9828, y^* = -0,7882$ ).

Згідно з рисунками 1 і 3 маємо три особливі точки, дві з яких є зміщеними центрами вихорів — точки типу центр і третя точка (вузлова) являє собою точку самоперетину сепаратриси, яка обходить навколо обох центрів. Цим точкам (див. рис. 2 і 4) відповідають два локальні максимуми і один локальний мінімум. Елементарні обчислення дозволяють скласти таблицю 1 критичних відстаней  $y_0^*$ , при яких відбувається злиття обох центрів з точкою самоперетину сепаратриси в точці  $y^*$ . Таблиця 2 містить ці ж критичні відстані  $y_0^*$  при заміні амплітудного параметра  $\alpha \rightarrow 1/\alpha$  і параметра закручування  $k \rightarrow 1/k$ .

$\alpha$	$\kappa$	$y_0^*$	$y^*$
1	2	0,877	0,707
1	3	0,670	0,570
1	5	0,456	0,407
3	1	1,422	1,010
5	1	1,539	1,170
7	1	1,609	1,260

Таблиця 1.

$\alpha$	$\kappa$	$y_0^*$	$y^*$
1/7	1	1,609	-1,260
1/5	1	1,538	-1,170
1/3	1	1,422	-1,012
1	1/2	1,754	-1,414
1	1/3	2,010	-1,724
1	1/5	2,280	-2,034

Таблиця 2.

$y_0$	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
$y_1$	-2,8	-2,5998	-2,3985	-2,1909	-1,9478			
$y^*$	-0,1842	-0,3567	-0,5535	-0,7882	-1,0993			
$y_2$	2,7965	2,5944	2,3915	2,1876	1,9828	1,7774	1,5718	1,3668

Таблиця 3.  $\alpha = 1/2, \kappa = 2$

$y_0$	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
$y_1$	-2,8	-2,6	-2,3992	-2,1955	-1,9765	-1,6608		
$y^*$	0,0606	-0,0944	-0,2705	-0,4775	-0,7369	-1,1393		
$y_2$	2,7929	2,5888	2,3829	2,175	1,9653	1,7542	1,5428	1,3327

Таблиця 4.  $\alpha = 1$ ,  $\kappa = 1/2$ 

Порівнюючи таблиці 4 і 3, а також 6 і 7, бачимо, що при однакових інтенсивностях на досить великих відстанях вихори не зазнають жодного зміщення центрів, але при поступовому наближенні центрів, більшого зміщення зазнає вихор, у якого більша закрутка. Також із таблиць 3, 4 та формули (3.4) бачимо, що зменшення закрутки, тобто зменшення  $k$ , майже так само гасить сам вихор і його вплив на інший вихор, як зменшення інтенсивності, тобто в деякому сенсі  $\kappa^2 \approx \alpha$ .

$y_0$	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
$y_1$	-2,7995	-2,5955	-2,365					
$y^*$	-1,0097	-1,2881	-1,6238					
$y_2$	2,7952	2,5951	2,3952	2,1952	1,9954	1,7956	1,5958	1,3961

Таблиця 5.  $\alpha = 1$ ,  $\kappa = 1/5$ 

$y_0$	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
$y_1$	-2,80	-2,60	-2,4	-2,1992	-1,9959	-1,7824	-1,5297	
$y^*$	-0,2249	-0,2481	-0,2772	-0,3153	-0,3676	-0,4456	-0,5812	
$y_2$	2,8	2,6	2,4	2,2	1,9996	1,7981	1,5935	1,3806

Таблиця 6.  $\alpha = 1/3$ ,  $\kappa = 1$ 

$y_0$	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
$y_1$	-2,8	-2,6	-2,3997	-2,1981	-1,9903	-1,7551		
$y^*$	-0,3987	-0,4399	-0,4921	-0,5607	-0,6571	-0,8097		
$y_2$	2,8	2,6	2,4	2,2	1,998	1,7992	1,5972	1,392

Таблиця 7.  $\alpha = 1/7$ ,  $\kappa = 1$ 

#### 4. Висновки

Характеризуючи взаємний вплив такого роду вихорів, можна сказати, що дані вихори притягуються тим сильніше, чим більша закрутка обох вихорів, і чим ближче розташовані один до одного їх фактичні осьові центри. Так,

із таблиці 1 маємо, що із збільшенням закручування лише одного з вихорів у 3, 5, 7 разів критична відстань об'єднання зростає від 1,4 до 1,6. У разі дуже різних закруток більш закручений і сконцентрований вихор ніби проникає у широке поле дії другого вихору, наближається до його центра і потім об'єднується з ним у точці  $y^*$  (рис. 1, 3). Також слід зазначити, що в кожному конкретному випадку є своє критичне значення  $y_0$ , при якому відбувається об'єднання точки перетину сепаратриси з центром одного із вихорів, після цього критичного  $y_0$  той вихор, центр якого залишився, сам по собі поглинає іншого, за умови зменшення значення  $y_0$ . Ця особливість взаємодії просторових вихорів принципово відрізняється від взаємодій плоских вихроджерел, центри яких при взаємодії не зміщуються.

Також зазначимо, що у силу симетрії в площині  $(y, \varphi)$  рух центрів вихорів відбувається по лінії їх початкового положення — саме по цій лінії ми зробили переріз (рис. 2, 4) функції течії (3.4), щоб виконати необхідні числові розрахунки. Центрам вихорів  $y_1, y_2$  відповідають максимуми на цій лінії, а сідловій точці  $y^*$  перетину сепаратриси — точка мінімуму. Розрахунки були зроблені у середовищі MathCad.

Аналіз даних таблиць 1, 2 показує, що критичні відстані  $y_0^*$  та точка об'єднання вихорів  $y^*$  за параметрами  $\alpha$  і  $(1/\alpha)$  симетричні відносно нуля — це є наслідком лінійної залежності інтенсивності вихорів від цього параметра. Для параметра  $k$  такої симетрії не існує, бо параметр  $k$  входить у формули, що описують взаємодію, у квадратичній та експоненційній залежностях.

#### Бібліографічні посилання

1. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков / О. Ф. Васильев. М.-Л. : Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.
2. Милн-Томсон. Теоретическая гидродинамика / Милн-Томсон. М. : Мир, 1964. — 655 с.
3. Перехрест В. І. Просторовий циліндричний вихровий шнур як точний розв'язок рівнянь Ейлера / В. І. Перехрест // Вісник ДНУ, Сер. Механіка, 2003. — Т. 1, № 7. — С. 46–53.
4. Перехрест В. І. Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності / В. І. Перехрест, О. А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. ДДУ. Дніпропетровськ, 2003. — С. 141–148.
5. Перехрест В. І. Про взаємодію просторових вихорів / В. І. Перехрест, О. А. Мельник (у друку).

Надійшла до редколегії 7.04.2010