ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 128–138

УДК 519.8

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ. II. НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ И РАЗМНОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

В. А. Тычинин*, О. Н. Тертышник**

* *Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, 49005. E-mail: tychynin@ukr.net*

** *Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, 49005. E-mail: OlesyaTNik@yandex.ru*

Получено конечное нелокальное интегро-дифференциальное преобразование, линеаризующее телеграфное уравнение $u_{tt}-\partial_x(-u^{-1}+u^{-2}u_x)=0$. Построены формулы нелинейной суперпозиции и размножения его решений. Найдены новые решения этого уравнения. Для уравнений, связанных с указанным посредством потенциальной системы, исследованы лиевские симметрии и получены точные решения. Потенциальные симметрии линейного уравнения использованы для построения новых потенциальных симметрий нелинейного телеграфного уравнения и размножения его решений.

Ключевые слова: точечные симметрии Ли, закон сохранения, потенциальная симметрия, нелокальное преобразование, размножение решений, нелинейная суперпозиция.

1. Введение

В этой работе мы продолжаем начатое в [1] исследование нелокальных симметрий нелинейного телеграфного уравнения

$$u_{tt}-\partial_x(-u^{-1}+u^{-2}u_x)=0. \tag{1.1}$$

Записав это уравнение в форме закона сохранения, Блюман и Доран-Ву в статье [2] свели соответствующую потенциальную систему точечным преобразованием переменных к линейной системе. Исключив потенциальную переменную в этом преобразовании, мы построили конечное интегро-дифференциальное преобразование, непосредственно линеаризующее уравнение (1.1). Это позволило нам в первом разделе построить принцип нелинейной нелокальной суперпозиции решений и осуществить размножение решений исходного уравнения. В разделе 2 из линеаризуемой потенциальной системы выведено соответствующее линеаризуемое уравнение для потенциальной функции, исследована его лиевская симметрия, построены точные решения. Классическое групповое исследование линейной потенциальной системы позволило описать потенциальные симметрии соответствующего линейного уравнения и с их помощью отыскать новые потенциальные симметрии уравнения (1.1), выполнить размножение его решений.

2. Классические симметрии уравнения (1.1) и связанных с ним уравнений. Нелокальная линеаризация

2.1. Лиевские симметрии уравнений

Классический метод С. Ли позволил в [1] найти максимальную алгебру инвариантности уравнения (1.1), состоящую из операторов

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + u\partial_u, \\ &X_4 = \mathrm{e}^{-x}\partial_x + \mathrm{e}^{-x}u\partial_u. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Понятие потенциальной симметрии дифференциального уравнения было введено Блюманом (и др.) [3,4]. В работе [5] было, в частности, установлено, что уравнение (1.1) помимо указанных выше лиевских симметрий обладает также потенциальной симметрией, соответствующий оператор для которой был получен в упомянутой работе.

В работе Блюмана и Доран-Ву [2], посвященной развитию метода построения законов сохранения, было, в частности, установлено, что для уравнения (1.1) существует отличная от рассмотренной нами в [1] потенциальная система

$$\begin{aligned} &v_x - u_t = 0, \\ &v_t - u^{-2}u_x + u^{-1} - 1 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Она обладает широким набором лиевских симметрий, описываемых сложной системой определяющих уравнений, которую полностью решить не удается. Соответствующая алгебра инвариантности включает, в частности, операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_v, \quad X_3 = t\partial_t + u\partial_u + t\partial_v. \tag{2.3}$$

Другой характерной чертой потенциальной системы (2.2) является возможность сведения ее к линейной системе дифференциальных уравнений.

2.2. Нелокальная линеаризация

В работе [2] было найдено точечное преобразование

$$x = r + \ln p(r,s), \quad t = s + q(r,s), \quad u(x,t) = p(r,s), \quad v(x,t) = q(r,s), \tag{2.4}$$

которое переводит потенциальную систему (2.2) в систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &q_r - p_s = 0, \\ &q_s - p_r - p + 1 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где r, s и $p(r,s)$, $q(r,s)$ — новые независимые и зависимые переменные, соответственно. Обратным для (2.4) является преобразование

$$r = x - \ln u(x,t), \quad s = t - v(x,t), \quad p(r,s) = u(x,t), \quad q(r,s) = v(x,t). \tag{2.6}$$

Система (2.5) допускает бесконечную алгебру инвариантности

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_r + a(r,s)\partial_p + (b(r,s) + s)\partial_q, \\ X_2 = \partial_s + a(r,s)\partial_p + (b(r,s) + s)\partial_q, \\ X_3 = a(r,s)\partial_p + (b(r,s) + s + 1)\partial_q, \\ X_4 = (p + a(r,s))\partial_p + (b(r,s) + 2s + q)\partial_q, \\ X_5 = s\partial_r + r\partial_s + (-\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}ps + a(r,s))\partial_p + \\ +(b(r,s) + s - \tfrac{1}{2}(p + r + sq + \tfrac{1}{2}s^2))\partial_q, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $(a(r,s), b(r,s))$ – произвольное решение системы (2.5).

Положим в (2.7) $a(r,s) = 0$, тогда в силу (2.5) $b(r,s) = -s$ и алгебра операторов инвариантности линейной системы становится конечной

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_r, \quad X_2 = \partial_s, \quad X_3 = \partial_q, \quad X_4 = p\partial_p + (s+q)\partial_q, \\ X_5 = s\partial_r + r\partial_s - \tfrac{1}{2}(q + ps)\partial_p - \tfrac{1}{2}(p + r + sq + \tfrac{1}{2}s^2)\partial_q. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Покажем, что система (2.5) представляет собой автопреобразование Бэклунда (АПБ) некоторого линейного уравнения. В самом деле, исключая из уравнений системы переменную q, приходим к уравнению

$$p_{ss} - p_{rr} - p_r = 0, \tag{2.9}$$

а, исключая переменную p, получаем:

$$q_{ss} - q_{rr} - q_r = 0. \tag{2.10}$$

Нетрудно заметить, что лишь оператор X_5 алгебры (2.7) определяет потенциальную симметрию уравнения (2.9). Операторы максимальной алгебры инвариантности уравнения (2.9) таковы:

$$X_1 = \partial_r + a(r,s)\partial_p, \; X_2 = \partial_s + a(r,s)\partial_p, \; X_3 = (p + a(r,s))\partial_p,$$

$$X_4 = s\partial_r + r\partial_s + (a(r,s) - \frac{1}{2}ps)\partial_p. \tag{2.11}$$

Здесь $a(r,s)$ — произвольное решение уравнения (2.9).

Таким образом, (2.5) является одновременно потенциальной системой для двух одинаковых уравнений (2.10) и (2.9). Наличие АПБ (2.5) позволяет осуществить размножение решений уравнения (2.10) (системы (2.5)) и, следовательно, уравнения (1.1) (системы (2.2)), что будет сделано нами в соответствующем разделе данной статьи.

В пространстве независимых переменных r, s и зависимых переменных $p(r,s)$, $q(r,s)$ воспользуемся равенством $q_r = p_s$ и заменим в формулах преобразования (2.6) переменную $q(r,s)$ интегралом $\int p_s(r,s)\ dr$. Теперь преобразование связывает переменные x, t, $u(x,t)$ с переменными r, s, $p(r,s)$, $\int p_s(r,s)dr$

$$x = r + \ln p, \quad t = s + \int p_s(r,s)dr, \quad u(x,t) = p, \tag{2.12}$$

становясь интегро-дифференциальным.

Теорема 2.1. *Интегро-дифференциальное преобразование (2.12) переводит уравнение (1.1) в выражение, обращающееся в ноль на множестве интегро-дифференциальных следствий уравнения (2.9).*

Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства этого утверждения применим преобразование (2.12) к уравнению (1.1). Переходя в полученном результате на многообразие, которое задано интегро-дифференциальными следствиями уравнения (2.9) и самим уравнением

$$\int p_{sss}dr = p_s + pp_{rs}, \ \int p_{ss}dr = -1 + p + p_r, \ \ p_{ss} = p_{rr} + p_r, \tag{2.13}$$

получаем ноль. □

2.3. Уравнение для потенциальной переменной

Дифференциальное уравнение для потенциальной переменной $v(x,t)$, соответствующее системе (2.2), получаем исключением из неё переменной u. Проинтегрировав первое уравнение системы (2.2) по t и подставив результат $u = \int v_x\ dt$ во второе уравнение системы, находим:

$$(v_t - 1)\left(\int v_x\ dt\right)^2 - \int v_{xx}\ dt + \int v_x\ dt = 0.$$

Продифференцировав полученное выражение по переменной t, получаем квадратное уравнение для интеграла $\int v_x\ dt$:

$$v_{tt}\left(\int v_x\ dt\right)^2 + 2(v_t - 1)v_x \int v_x\ dt - v_{xx} + v_x = 0. \tag{2.14}$$

Разрешив (2.14) относительно интегральной неизвестной и продифференцировав результат по t, получаем два дифференциальных уравнения для потенциальной переменной:

$$v_x + \partial_t \left(\frac{(v_t - 1)v_x \pm \sqrt{(v_t - 1)^2 {v_x}^2 + v_{tt}(v_{xx} - v_x)}}{v_{tt}} \right) = 0. \tag{2.15}$$

Отыскать точечные симметрии этих уравнений непосредственно не удается в силу их иррационального характера. Избавившись в каждом из этих уравнений от иррациональности, получаем (одно и то же) уравнение, которое ввиду громоздкости здесь не выписываем. Это уравнение допускает максимальную алгебру инвариантности, состоящую из операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_v \quad X_4 = x\partial_x - \tfrac{1}{2}t\partial_t - \tfrac{1}{2}t\partial_v. \tag{2.16}$$

2.4. Решения, построенные на основе симметрий С. Ли

По операторам алгебры Ли инвариантности (2.1) уравнения (1.1) классическим методом Ли – Овсянникова [6] получены следующие решения [1]:

$$\begin{aligned} &1)\ \ u = \mathrm{e}^x(c_1 t + c_2), \quad 2)\ \ u = \tfrac{t}{c_1\mathrm{e}^{-x} - c_2}, \\ &3)\ \ (c_1^2 - 1)\ln|1 + c_1 u| + c_1 u - c_1^2\ln|u| + c_1^2(x - t - c_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь и далее c_i, $i = 1, 2, 3, ...$, – произвольные постоянные. Третье решение уравнения (1.1) получено в неявном виде.

Подставив каждое из найденных выражений 1) и 2) для функции $u(x,t)$ в уравнения потенциальной системы (2.2) и решая результат относительно $v(x,t)$, находим соответствующие выражения для потенциальной функции $v(x,t)$:

$$1)\ \ v = c_1\mathrm{e}^x + t + c_3, \quad 2)\ \ v = c_2\ \ln|t| - c_2^{-1}(\ln|c_1\mathrm{e}^{-x} - c_2| + x) + t + c_3. \tag{2.18}$$

Неявное решение 3) в общем случае не позволяет найти соответствующее значение $v(x,t)$. Полагая $c_1 = 1, c_2 = 0$, находим:

$$u(x,t) = -\mathrm{LambertW}(-\mathrm{e}^{x-t}).$$

Подставляя найденное $u(x,t)$ в уравнения потенциальной системы и решая полученную систему дифференциальных уравнений относительно $v(x,t)$, приходим к решению:

$$v(x,t) = \mathrm{LambertW}(-\mathrm{e}^{x-t}) + 2t + c_1.$$

Решая систему (2.5) методом разделения переменных, в основе которого также лежит принцип симметрии, получим следующие решения линейных уравнений на переменные $p(r,s)$ и $q(r,s)$:

$$p = 2c_1(2c_1 + 1)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{2c_1(2c_1(r+s)+s)}{(1+4c_1)}} + 1 + c_2\ \mathrm{e}^{-r},$$

$$q = \mathrm{e}^{\frac{2c_1(2c_1(r+s)+s)}{(1+4c_1)}}.$$

Применяя к этому решению преобразование (2.6), находим в неявной форме решение

$$-4\ln|u|c_1^2\mathrm{e}^x-(1+2c_1)^2(\mathrm{e}^x-c_2)u-(1+4c_1)\mathrm{e}^x\ln\left|\frac{(1+2c_1)(u-\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x-c_2)}{2c_1}\right|$$

$$+(1+2c_1)^2\mathrm{e}^x(1+x)+2(1+2c_1)c_1t\mathrm{e}^x=0,$$

$$v=\frac{1}{2c_1}(u(1+2c_1-2c_1c_2-c_2)\mathrm{e}^x-(1+2c_1)).$$

Решая же методом разделения переменных уравнение (2.9), получаем:

$$p=\mathrm{e}^{\frac{2c_1(2c_1(r-s)+s)}{(1-4c_1)}} \tag{2.19}$$

и, следовательно,

$$q=-\frac{2c_1-1}{2c_1}\,\mathrm{e}^{\frac{2c_1(2c_1(r-s)+s)}{(1-4c_1)}}-s+c_2.$$

Отсюда находим:

$$u=\frac{2c_1(c_1-t)}{2c_1-1},$$

$$v=\frac{(1-2c_1)^2\ln|u|+4c_1^2(t-x)-2c_1t}{2c_1(2c_1-1)}.$$

3. Суперпозиция решений

Для построения алгоритма суперпозиции решений уравнения (1.1) введем необходимые обозначения. Пусть $u^{\mathrm{I}}(x,t),u^{\mathrm{II}}(x,t)$ – известные решения уравнения (1.1). Искомое новое решение этой системы обозначим $u^{\mathrm{III}}(x,t)=u(x,t)$.

Алгоритм 3.1. *Перепишем известные решения, заменив в них исходные аргументы параметрами $u^{\mathrm{J}}(\tau^{\mathrm{J}},\eta^{\mathrm{J}})$, J=I, II, и выполним преобразование*

$$\tau^{\mathrm{J}}=r+\ln p^{\mathrm{J}}(r,s),\quad \eta^{\mathrm{J}}=s+\int p_s^{\mathrm{J}}(r,s)dr,\quad u^{\mathrm{J}}(\tau^{\mathrm{J}},\eta^{\mathrm{J}})=p^{\mathrm{J}}(r,s). \tag{3.1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно интеграла $\int p_s^{\mathrm{J}}(r,s)dr$. Существует две возможности записать дифференциальное уравнение для $p^{\mathrm{J}}(r,s)$. Первая – продифференцировать обе части полученного равенства по r. Вторая возможность заключается в том, чтобы выполнить дифференцирование по s и затем воспользоваться равенством

$$\int {p^{\mathrm{J}}}_{ss}\;dr=-1+p^{\mathrm{J}}+p_r^{\mathrm{J}}. \tag{3.2}$$

Решив каждое из полученных дифференциальных уравнений, найдем соответствующие решения $p^{\mathrm{I}}(r,s)=P^{\mathrm{I}}(r,s),p^{\mathrm{II}}(r,s)=P^{\mathrm{II}}(r,s)$, зависящие от *произвольной функции $f^{\mathrm{J}}(r,s)$. Для уточнения этих функций подставим каждое $p^{\mathrm{J}}(r,s) = P^{\mathrm{J}}(r,s)$ в соответствующее линейное уравнение (J=I, II)*

$$p^{\mathrm{J}}(r,s)_{ss} - p^{\mathrm{J}}(r,s)_{rr} - p^{\mathrm{J}}(r,s)_r = 0. \tag{3.3}$$

В силу принципа линейной суперпозиции уравнения (3.3) построим для него новое решение

$$p(r,s) = P^{\mathrm{I}}(r,s) + P^{\mathrm{II}}(r,s). \tag{3.4}$$

Для полученного равенства воспользуемся обратным преобразованием

$$r = x - \ln u(x,t), \quad s = t - \int u_t(x,t)\ dx, \quad p(r,s) = u(x,t), \tag{3.5}$$

в результате чего получим выражение, содержащее $\int u_t(x,t)\ dx$. Разрешим полученное уравнение относительно интеграла. Обозначим

$$\int u_t(x,t)\ dx = H(x,t,u...).$$

Вновь существует две возможности получить дифференциальное уравнение для $u(x,t)$. Первая – продифференцировать обе части полученного равенства по x. Вторая – выполнить дифференцирование по t и затем воспользоваться равенством

$$1 - u^{-1} + u^{-2}u_x = \partial_t H(x,t,u...). \tag{3.6}$$

Решив соответствующее дифференциальное уравнение относительно $u(x,t)$, находим анзац для уравнения (1.1), уточнение которого осуществляем непосредственной подстановкой его в это уравнение.

Для демонстрации работы описанного Алгоритма 3.1 выполним построение ряда новых решений уравнения (1.1) по двум заданным:

1. $u^{\mathrm{I}}(x,t) = \mathrm{e}^x(at+b), \quad u^{\mathrm{II}}(x,t) = \dfrac{t}{k\ \mathrm{e}^{-x} - h} \quad \to$
$u(x,t) = \frac{1}{2c_1^2}\left(-2\ \mathrm{e}^{2x} + (c_2-t)c_1\ \mathrm{e}^x \pm \left((2\ \mathrm{e}^{2x} - (c_2-t)c_1\ \mathrm{e}^x)^2 - 16c_1^2\mathrm{e}^{2x}\right)^{1/2}\right)$.

Параметры a, b, k, h исчезают либо в процессе дифференцирования, либо за счет выбора нулевым значения параметра c_4, возникающего в процессе интегрирования дифференциальных уравнений.

2. $u^{\mathrm{I}}(x,t) = \mathrm{e}^x t, \quad u^{\mathrm{II}}(x,t) = \dfrac{t}{k\ \mathrm{e}^{-x} - h} \quad \to$
$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^x}{2c_1^2}\left(\frac{c_5((1-c_3)\mathrm{e}^x + c_1 t)}{c_1} + c_6 \pm \left((\frac{c_5((1-c_3)\mathrm{e}^x + c_1 t)}{c_1} + c_6)^2 - 4c_1^2(1-c_3^2)\right)^{1/2}\right)$.

Параметр c_2 исчезает в процессе вычислений, а c_4 выбран нулевым.

3. $u^{\mathrm{I}}(x,t) = c_1, \quad u^{\mathrm{II}}(x,t) = \dfrac{t}{k\ \mathrm{e}^{-x} - h} \quad \to$
$\ln|hu - ku\mathrm{e}^{-x} - h(c_1-c_3)|h^2(c_1+c_3) + (c_1+c_3)\ln|u| +$
$u(h^2 - kh\mathrm{e}^{-x}) + h(t-c_4) - (c_1+c_3)x = 0.$

4. $u^{\mathrm{I}}(x,t)=c_1,\quad u^{\mathrm{II}}(x,t)=t\,\mathrm{e}^x \quad \to$
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(c_1\mathrm{e}^{2x}+(t-c_2)\mathrm{e}^x\pm\left((c_1\mathrm{e}^{2x}+(t-c_2)\mathrm{e}^x)^2-4c_1^2\mathrm{e}^x)\right)^{1/2}\right).$$

Полагая здесь $c_1=1, c_2=0$, приходим к решению, получающемуся из исходных по формуле нелинейной суперпозиции решений потенциальной системы (2.2):
$$u(x,t)=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+t\pm\left((\mathrm{e}^x+t)^2-1)\right)^{1/2}\right).$$

Здесь все c_i произвольные постоянные.

4. Потенциальные и нелокальные симметрии

Линеаризующее потенциальную систему точечное преобразование (2.4) позволяет поставить в соответствие операторам алгебры (2.7) операторы алгебры Ли системы (2.2):
$$\begin{array}{l}
X_1=\frac{u+a(x-\ln|u|,t-v)}{u}\ \partial_x+(t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_t+\\
a(x-\ln|u|,t-v)\ \partial_u+(t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_v,\\
X_2=\frac{a(x-\ln|u|,t-v)}{u}\ \partial_x+(1+t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_t+\\
a(x-\ln|u|,t-v)\ \partial_u+(t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_v,\\
X_3=\frac{a(x-\ln|u|,t-v)}{u}\ \partial_x+(1+t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_t+\\
a(x-\ln|u|,t-v)\ \partial_u+(1+t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_v,\\
X_4=\frac{u+a(x-\ln|u|,t-v)}{u}\ \partial_x+(2t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_t+\\
(u+a(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_u+(2t-v+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_v,\\
X_5=\frac{(t-v)u-v+2a(x-\ln|u|,t-v)}{2u}\ \partial_x+\\
(\frac{x-u-\ln|u|}{2}+b(x-\ln|u|,t-v)+t-v-\frac{t^2-v^2}{4})\ \partial_t+\\
(a(x-\ln|u|,t-v)-\frac{u(t-v)}{2}-\frac{v}{2})\ \partial_u+\\
(t-v-\frac{x+u-\ln|u|}{2}-\frac{t^2-v^2}{4}+b(x-\ln|u|,t-v))\ \partial_v.
\end{array} \tag{4.1}$$

Здесь $(a(r,s),b(r,s))$ – произвольное решение системы (2.5).

В общем случае все операторы этой алгебры описывают соответствующие потенциальные симметрии уравнения (1.1). Любая такая симметрия может быть представлена в виде соответствующей формулы нелокального размножения решений.

Полагая в (4.1) $a=0, b=-s$, получаем простейший случай конечной алгебры инвариантности нелинейной потенциальной системы (2.2):

$$\begin{array}{l}
X_{01}=\ \partial_x, X_{02}=\ \partial_t, X_{03}=\ \partial_t+\ \partial_v, X_{04}=\ \partial_x+t\ \partial_t+u\ \partial_u+t\ \partial_v,\\
X_{05}=\frac{(t-v)u-v}{2u}\partial_x+\frac{1}{4}\left(2x-2u-2\ln|u|-t^2+v^2\right)\partial_t+\frac{1}{2}((-t+v)u-v)\partial_u-\\
\frac{1}{4}(2x+2u-2\ln|u|+t^2-v^2)\partial_v.
\end{array} \tag{4.2}$$

Заметим, что только последний оператор этой алгебры определяет потенциальную симметрию уравнения (1.1).

5. Размножение решений с помощью нелокального преобразования

Построим формулу размножения решений уравнения (1.1) исходя из произвольного оператора, определяющего его потенциальную симметрию. Для оператора X_1 алгебры (2.7) легко строится преобразование соответствующей группы Ли:

$$r = R+\varepsilon, s = S, p(r,s) = a(R+\varepsilon,S)\varepsilon + P(R,S),$$
$$q(r,s) = b(R+\varepsilon,S)\varepsilon + S\varepsilon + Q(R,S). \quad (5.1)$$

Выполним для обоих комплектов переменных (x,t,u,v) (X,T,U,V) преобразование (2.6):

$$\begin{aligned} &x = \ln|a(X-\ln|U|+\varepsilon, T-V)|\varepsilon + U + X - \ln|U| + \varepsilon,\\ &t = b(X-\ln|U|+\varepsilon, T-V)\varepsilon + \varepsilon(T-V) + T,\\ &u(x,t) = a(X-\ln|U|+\varepsilon, T-V)\varepsilon + U,\\ &v(x,t) = b(X-\ln|U|+\varepsilon, T-V)\varepsilon + \varepsilon(T-V) + V. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Легко проверяется, что это преобразование переводит систему (2.2) в себя. Исключив из этого преобразования переменную $v(x,t)$ и заменив $V(X,T)$ интегралом $\int U_T\, dX$, приходим к интегро-дифференциальному преобразованию:

$$\begin{aligned} &x = \ln|a(X-\ln|U|+\varepsilon, T-\textstyle\int U_T\, dX)|\varepsilon + U + X - \ln|U| + \varepsilon,\\ &t = b(X-\ln|U|+\varepsilon, T-\textstyle\int U_T\, dX)\varepsilon + \varepsilon(T-\textstyle\int U_T\, dX) + T,\\ &u(x,t) = a(X-\ln|U|+\varepsilon, T-\textstyle\int U_T\, dX)\varepsilon + U. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полученное преобразование переводит исследуемое уравнение в интегро-дифференциальное выражение, обращающееся в ноль на многообразии, заданном уравнением и его интегро-дифференциальными следствиями. При этом для функций $a(.,.), b(.,.)$ должны выполняться условия (2.5).

Выберем частное решение линейной системы, для независимых переменных которого выполнено преобразование (5.3):

$$\begin{aligned} &a(X-\ln|U|+\varepsilon, T-\textstyle\int U_T\, dX) = c_1 \mathrm{e}^{\frac{2(\ln|U|-X+T-\int U_T\ dX)}{3}} \mathrm{e}^{X-\ln|U|},\\ &b(X-\ln|U|+\varepsilon, T-\textstyle\int U_T\, dX) = -1 - T + \textstyle\int U_T\, dX +\\ &2c_1 \mathrm{e}^{\frac{2(\ln|U|-X+T-\int U_T\ dX)}{3}} \mathrm{e}^{X-\ln|U|}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставив функции (5.4) в формулы преобразования (5.3), приходим к преобразованию Ли – Бэклунда с интегральной переменной:

$$\begin{aligned} &x = \ln\left|c_1 \mathrm{e}^{\frac{2(\ln|U|-X+T-\int U_T\ dX)}{3}} \mathrm{e}^{X-\ln|U|}\right|\varepsilon + U + X - \ln|U| + \varepsilon,\\ &t = (-1 - T + \textstyle\int U_T\, dX + 2c_1 \mathrm{e}^{\frac{2(\ln|U|-X+T-\int U_T\ dX)}{3}} \mathrm{e}^{X-\ln|U|})\varepsilon +\\ &\varepsilon(T-\textstyle\int U_T\, dX) + T,\\ &u(x,t) = (c_1 \mathrm{e}^{\frac{2(\ln|U|-X+T-\int U_T\ dX)}{3}} \mathrm{e}^{X-\ln|U|})\varepsilon + U, \end{aligned} \quad (5.5)$$

оставляющему уравнение (1.1) инвариантным. Подставляя в (5.5) известное решение $U(X,T)$ уравнения (1.1) и решая эту систему относительно $u(x,t)$, получаем для него новое решение.

Приведем пример. Преобразовав по формулам (5.5) решение уравнения (1.1)

$$u^{\mathrm{I}}(x,t) = t,$$

разрешим результат относительно интегральной переменной. Дифференцированием обеих частей полученного равенства по x получим дифференциальное уравнение, решая которое, находим нелокальный анзац для (1.1). Полагая в этом анзаце произвольную функцию равной нулю, приходим к решению:

$$u(x,t) = \frac{\left(\left(9(t+\varepsilon) + \sqrt{3}\sqrt{1+27\mathrm{e}^{x}(t+\varepsilon)^2}\mathrm{e}^{-x/2}\right)^{2/3}\mathrm{e}^{4x/3} - 3^{1/3}\mathrm{e}^{x}\right)^{3}\mathrm{e}^{-4x}}{18\left(9(t+\varepsilon) + \sqrt{3}\sqrt{1+27\mathrm{e}^{x}(t+\varepsilon)^2}\mathrm{e}^{-x/2}\right)}.$$

6. Заключение и обсуждение полученных результатов

В работе построено конечное нелокальное интегро-дифференциальное преобразование, линеаризующее нелинейное телеграфное уравнение

$$u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0.$$

На основе этого преобразования построен алгоритм нелинейной суперпозиции его решений. Построены его новые точные решения. По найденным потенциальным симметриям линейного уравнения вычислены новые потенциальные симметрии нелинейного телеграфного уравнения. Найденное преобразование, будучи применено к формулам размножения решений, порожденным потенциальной симметрией линейного уравнения, позволило записать соответствующий алгоритм размножения решений нелинейного уравнения (1.1). Кроме того в работе выведены нелинейные уравнения на потенциальную переменную, связанные с исследуемым уравнением посредством потенциальной системы как преобразованием Бэклунда. Эти уравнения, в свою очередь, могут быть линеаризованы соответствующим нелокальным преобразованием.

Библиографические ссылки

1. *Тычинин В.А.* Нелокальные симметрии нелинейного телеграфного уравнения. I. Нелокальная инвариантность и размножение решений/ В. А. Тычинин, О. Н. Тертышник. Вісник ДНУ. Серія: Моделювання, Вип. 3, № 8, 2011.— С. 143–159.
2. *Bluman G. W.*, The use of factors to discover potential systems or linearizations/ G. W. Bluman, P. Doran–Wu. Acta Appl. Math, No. 41, 1995, p. 21–43.
3. *Bluman G. W.*, New classes of symmetries for partial differential equations/ G. W. Bluman, G. J. Reid , S. Kumei. J. Math. Phys, No. 4, Vol. 29, 1988, p. 806–811.

4. *Bluman G. W.* Symmetries and Differential Equations/ G. W. Bluman, S. Kumei. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 354 p.
5. *Bluman G. W.*, Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation/ G. W. Bluman, Temuerchaolu, R. Sahadevan. Journal of mathematical physics, No. 46, 2005, 023505, 12 p.
6. *Ovsiannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations/ L. V. Ovsiannikov.— New York: Academic Press, 1982. — 400 p.
7. *Tychynin V. A.*, Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym type equations/ V. A. Tychynin. J. Phys. A: Math. Gen., No. 14, Vol. 27, 1994, p. 2787–2797.
8. *Tychynin V. A.* Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations/ V. A. Tychynin, O. V. Petrova, O. M. Tertyshnyk. SIGMA, No. 3, 2007, 0702033, 14 p.
9. *Reyes E. G.*, Nonlocal symmetries and the Kaup–Kupershmidt equation/ E. G. Reyes. J. Phys. A: Math. Gen., No. 46, 2005, 073507, 19 p.
10. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. 1/ W. F. Ames. — New York: Academic press, 1965. — 511 p.
11. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations/ P. J. Olver. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 639 p.
12. *Debnath L.* Nonlinear PDEs for scientists and engineers/ L. Debnath. — Birkhauser, 1997. — 600 p.
13. *Jeffrey A.* Applied partial differential equations. An introduction/ A. Jeffrey. — New York: Academic Press, 2003. — 408 p.
14. *Rogers C.* Bäcklund transformations and their applications/ C. Rogers, W. F. Shadwick. — New York: Academic Press, 1982. — 321 p.
15. *Bluman G. W.*, Use and construction of potential symmetries/ G. W. Bluman. Math. Comput. Modeling, No. 10, Vol. 18, 1993, p. 1–14.
16. *Gandarias M. L.*, Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation/ M. L. Gandarias, M. Torrisi, A. Valenti. International Journal of Non-linear Mechanics, No. 39, 2004, p. 389–398.
17. *Kingston J. G.*, Symmetries and form-preserving transformations of one-dimentional wave equations with dissipation/ J. G. Kingston, C. Sophocleous. International Journal of Non-linear Mechanics, No. 36, 2001, p. 987–997.
18. *Huang D. J.*, Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equation/ D. J. Huang, N. Ivanova. Journal of mathematical physics, No. 48, 2007, 073507, 23 p.
19. *Anderson R. L.* Lie-Backlund transformations in applications/ R. L. Anderson, N. H. Ibragimov. — Philadelphia: SIAM, 1979. — 124 p.
20. *Lisle I.G.* Equivalence transformations for classes of differential equations. Thesis. University of British Columbia/ I. G. Lisle. 1992.
21. *Ivanova N. M.*, Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations/ N. M. Ivanova, R. O. Popovych, C. Sophocleous, O. O. Vaneeva. Physica A, No. 388, 2008, p. 343–356.

Надійшла до редколегії 08.02.2012