

УДК 517.9

НОВЫЕ ТИПЫ 3-D СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

В. Е. Белозеров, А. В. Белозеров

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. E-mail: belozvye@mail.ru*

Для некоторых типов 3-D систем квадратичных дифференциальных уравнений найдены новые типы хаотических аттракторов. Приводятся примеры.

Ключевые слова: система обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений, линейное преобразование, ограниченность, отрицательная определенность, гомоклиническая орбита, хаотический аттрактор, седло-фокус.

1. Введение

Хаос является очень интересным сложным нелинейным явлением, которое интенсивно изучается в последние четыре десятилетия в различных областях физики, биологии, математики, а также в инженерных приложениях. Недавно хаос был признан очень полезным феноменом, встречающимся во многих технологических дисциплинах, таких как синергетика, компьютерные науки, системы защиты информации, биомедицинские системы, динамика жидкости и газа и так далее. Поэтому не удивительно, что академические исследования в хаотической динамике эволюционировали от традиционного анализа нелинейных систем (бифуркации, устойчивость, периодичность) к современным исследованиям, в которых хаос понимается как новое направление в науке, дающее новые методы управления многими естественными процессами в окружающем нас мире (см., например, работы [1 – 4] и литературу, цитированную там же).

Сейчас имеется мало публикаций, в которых существование хаоса (с математической точки зрения) было строго доказано. Очень часто именно отсутствие таких доказательств не позволяет полностью понять причину возникновения хаотических процессов, происходящих в различных нелинейных динамических системах.

Настоящая работа является продолжением статьи [2]. Ее появление продиктовано желанием обобщить результаты, полученные в [2] и, одновременно, сделать эти результаты более строгими.

В данной работе для изучения хаоса в квадратичных 3-D системах используется 1-мерное неявное дискретное отображение, базирующееся на дискретной модели Риккера популяционной динамики [5]. Этот подход позволяет

установить сопряженность между отображением Риккера [2] и некоторым 1-мерным явным дискретным отображением, хаотические свойства которого известны. В результате можно прийти к утверждению о хаотичности процессов в непрерывной квадратичной 3-D системе, которая и порождает (через подходящие сечения Пуанкаре) упомянутое выше дискретное отображение Риккера.

Рассмотрим следующую систему (см. [2]):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1x(t) + a_{11}y^2(t) + a_{12}y(t)z(t) + a_{22}z^2(t), \\ \dot{y}(t) = b_1y(t) + c_1z(t) + bx(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = -c_1y(t) + b_1z(t) + cx(t)z(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

В дальнейшем будет показано, что система (1.1) обладает хаотическими аттракторами, не указанными в [2]. Существование этих аттракторов объясняется присутствием в системе (1.1) неявного итерационного процесса, порожденного дискретным отображением типа Риккера [2].

2. Исследование неявной функции

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \exp(\alpha \cdot \mathbf{y}) - \lambda \cdot \mathbf{x} \cdot \exp(\beta \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

(А) Для начала в этом разделе мы приведем несколько основных положений теории 1-мерных отображений.

Положим $\mathbb{V} = [0, \infty)$. Определим на множестве \mathbb{V} метрику d формулой: $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V} \ d = \|v_1 - v_2\|$. Определим формулой $h(v) = v \cdot \exp(r - v)$ явную функцию $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, где $r > 0$, $v \in \mathbb{V}$.

Пусть $v^* \neq 0$ – неподвижная точка отображения h . Очевидно, что $v^* = r$.

Обозначим через $B_\delta(a) = \{v \in \mathbb{V} : d(v, a) < \delta\}$ и $\overline{B}_\delta(a) = \{v \in \mathbb{V} : d(v, a) \leq \delta\}$ открытый и замкнутый шары в \mathbb{V} . Ясно, что $a \geq \delta \geq 0$.

Определение 2.1. [3]. Точка $v^* \in \mathbb{V}$ называется растягивающей неподвижной точкой отображения h в $\overline{B}_\delta(v^*)$ для некоторой постоянной $\delta > 0$, если $h(v^*) = v^*$ и существует константа $\lambda > 1$ такая, что

$$d(h(x), h(y)) \geq \lambda d(x, y), \forall x, y \in \overline{B}_\delta(v^*).$$

Кроме того, точка v^* называется регулярной растягивающей неподвижной точкой отображения h в $\overline{B}_\delta(v^*)$, если v^* является внутренней точкой множества $h(B_\delta(v^*))$.

Определение 2.2. [3]. Предположим, что v^* – растягивающая неподвижная точка отображения h в $\overline{B}_\delta(v^*)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда говорят, что v^* является грубым обратным репеллером отображения h , если существует точка $v_0 \in B_\delta(v^*)$ такая, что $v_0 \neq v^*$ и $h^{(m)}(v_0) = v^*$ для некоторого положительного целого m . Кроме того, точка v^* называется невырожденным грубым обратным репеллером отображения h , если существуют положительные константы μ и δ_0 такие, что $B_{\delta_0}(v_0) \subset B_\delta(v^*)$ и

$$d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \mu d(x, y), \forall x, y \in \overline{B}_{\delta_0}(v_0).$$

Определение 2.3. [3]. Точка v^* называется регулярным грубым обратным репеллером отображения h , если множество $h(B_\delta(v^*))$ открыто и существует положительная константа γ_0 такая, что $B_{\gamma_0}(v_0) \subset B_\delta(v^*)$ и v^* является внутренней точкой множества $h^{(m)}(B_\gamma(v_0))$ для любого положительного $\gamma < \gamma_0$.

Теорема 2.1. [3]. Предположим, что $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ имеет регулярный и невырожденный грубый обратный репеллер v^* , ассоциированный с v_0 ; m и δ указаны в определениях 2.1 – 2.3, отображение h является непрерывным в $\overline{B_\delta(v^*)}$, отображение $h^{(m)}(v)$ непрерывно в некоторой окрестности v_0 . Кроме того, h непрерывно в некоторых окрестностях точек v_1, \dots, v_{m-1} , где $v_j = f^{(j)}(v_0)$ для $j = 1, \dots, m-1$. Тогда существует такое компактное совершенное инвариантное множество $D \subset \mathbb{V}$, содержащее канторово множество, что отображение h является хаотическим в смысле Дивани на D (так же как и в смысле Ли – Йорке) и это отображение имеет плотную орбиту в D .

Теперь, для функции $h(v)$, мы определим значения параметров, которые указаны в определениях 2.1 – 2.3. Тогда, в соответствии с теоремой 2.1, и будет доказана хаотичность отображения h .

(a1) Оценим расстояние между точками $h(v^* - \delta)$ и $h(v^* + \delta)$, где $\delta > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} d(h(v^* - \delta), h(v^* + \delta)) &= \|(v^* - \delta) \exp(r - (v^* - \delta)) - (v^* + \delta) \exp(r - (v^* + \delta))\| = \\ &= \|v^* \exp(r - v^*) \cdot \exp \delta - \delta \cdot \exp(r - v^*) \exp \delta - \\ &- v^* \cdot \exp(r - v^*) \cdot \exp(-\delta) - \delta \cdot v^* \exp(r - (v^* + \delta))\|. \end{aligned}$$

Так как $v^* \exp(r - v^*) = v^*$, то из последней формулы следует:

$$\begin{aligned} d(h(v^* - \delta), h(v^* + \delta)) &= \|r \cdot (\exp(\delta) - \exp(-\delta)) - \delta \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))\| \geq \\ &\geq 2\delta \cdot (r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))) = \lambda \cdot d(v^* - \delta, v^* + \delta), \end{aligned}$$

где $\lambda = r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))$.

Пусть $\exp(\delta) = u$. Предположим, что

$$r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta)) = \lambda > 1.$$

Отсюда следует $u^2 - 2(r - 1)u + 1 < 0$. Это неравенство имеет решение $1 \leq u < [r - 1 + \sqrt{r(r - 2)}]$. Таким образом, если

$$0 \leq \delta < \ln[r - 1 + \sqrt{r(r - 2)}] \quad \text{и} \quad r > 2,$$

то $\lambda > 1$.

(a2) Имеем $h'(v) = (1 - v) \cdot \exp(r - v)$. Точка максимума функции $h(v)$ может быть найдена из условия $h'(v) = 0$. Отсюда следует $v_{\max} = 1$ и $h_{\max} = \exp(r - 1)$. Таким образом, если $r > 1$, то функция $h(v)$ будет немонотонной

и унимодальной на интервале $[0, \infty)$: интервал $[0, 1)$ является интервалом возрастания, а интервал $(1, \infty)$ является интервалом убывания. Принимая во внимание пункт (а1), мы получим, что при $r > 2$ точка $v^* = r$ является репеллером ($||h'(r)|| > 1$ при $r > 2$). Ясно, что v^* – регулярная растягивающая точка отображения h в $\overline{B_\delta}(v^*)$.

(а3) Рассмотрим итерационный процесс

$$v_{i+1} = v_i \exp(r - v_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где $r > 0$, $v_i > 0$; $i = 0, 1, 2, \dots$

По определению положим $\mathbb{W} = [0, 1]$. Пусть $\mathbf{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ – непрерывное отображение, заданное формулой $w = (2/\pi) \cdot \arctan v$. Так как $\lim_{v \rightarrow \infty} (2/\pi) \cdot \arctan v = 1$, то мы можем считать, что \mathbf{T} – гомеоморфизм и $\mathbf{T}(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$, $\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{W}) = \mathbb{V}$.

Символом

$$g(w) \equiv \mathbf{T}^{-1}(h(\mathbf{T}(w))) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\tan \frac{\pi w}{2} \cdot \exp \left(r - \tan \frac{\pi w}{2} \right) \right) \quad (2.2)$$

определим непрерывное сопряженное h отображение $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ [4].

Функция $g(w)$ похожа на функцию $h(v)$: $w_{\max} = 0.5$ и $g_{\max} = (2/\pi) \cdot \arctan \exp(r - 1) < 1$ ($\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\max} = 1$); интервал $[0, 0.5)$ является интервалом возрастания и интервал $(0.5, 1]$ является интервалом убывания. Поэтому, если $w^* = r > 0.5$, то

$$(2/\pi) \cdot \arctan \exp(r - 1) > (2/\pi) \cdot \arctan r.$$

Отсюда следует $\exp(r - 1) > r$ и $r > 1$.

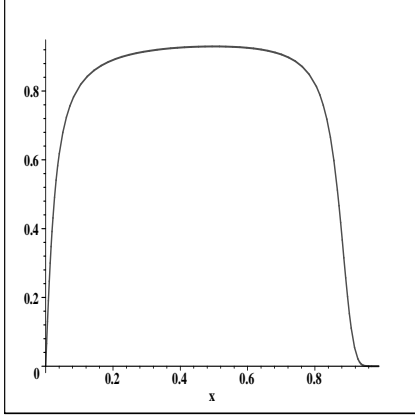
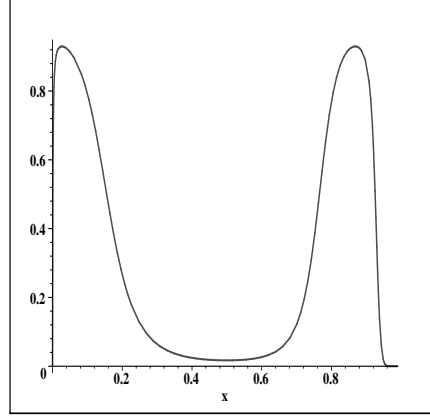
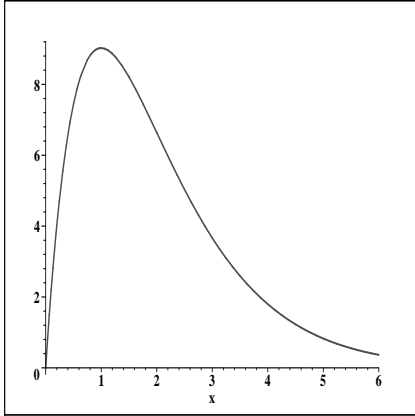
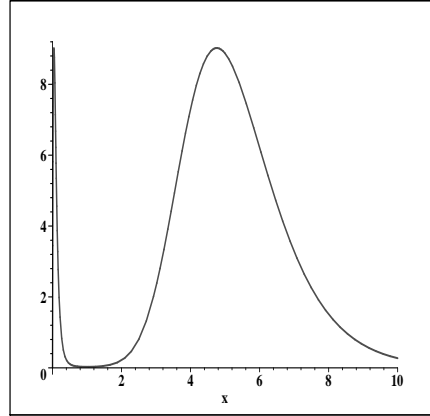
Ясно, что обратное отображение $g^{-1}(w)$ имеет две ветви: $g_1^{-1}(w)$ и $g_2^{-1}(w)$, где каждое из отображений $g_1^{-1}(w)$ и $g_2^{-1}(w)$ обратимо.

Определим функцию $G : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ правилом

$$G(w) = g_{i_1}^{-1}(g_{i_2}^{-1}(\dots(g_{i_k}^{-1}(w))\dots)), \quad k = 2, 3, \dots$$

где или $i_k = 1$ или $i_k = 2$. Ясно, что отображение $G(w)$ является монотонным.

Отображение $G(w)$ имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку w^* . Известно, что неподвижная точка w^* отображения $G(w)$ соответствует неподвижной точке w^{**} отображения $g^{(k)}(w) = g(g(\dots g(w)))$. Точка w^{**} отображения $g^{(k)}(w)$ соответствует или неподвижной точке или p -циклу отображения $g(w)$. Первая ситуация возможна только при $i_1 = i_2$. Так как можно взять любое целое k и произвольно выбрать числа i_1, i_2 равными 1 или 2, то из условия $g_1^{-1}(g_2^{-1}(w)) \neq g_2^{-1}(g_1^{-1}(w))$ следует, что немонотонная функция $g(w)$ может иметь любое число циклов различной кратности p и бесконечное множество непериодических траекторий.


 Рис. 1. Отображение $g(x)$; $r = 3.2$

 Рис. 2. Отображение $g(g(x))$; $r = 3.2$

 Рис. 3. Отображение $h(x)$; $r = 3.2$

 Рис. 4. Отображение $h(h(x))$; $r = 3.2$

Мы покажем, что при некоторых значениях параметра r функция (2.2) может быть хаотической. Для этой цели мы укажем те значения параметра r , при которых в системе $w_{i+1} = g(w_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, будут присутствовать 3-циклы.

Уравнения $w = g(w)$, $w = g(g(w))$ и $w = g(g(g(w)))$ трудно разрешимы. Поэтому для их исследования мы воспользуемся сопряженностью g и h . (На рис. 1 – 4 показаны две итерации отображений g и h .)

Пусть $v = h(v) \equiv v \exp(r - v)$. Тогда при $r > 1$ в системе (2.1) существует 1-цикл. Пусть $v = h(h(v)) \equiv v \exp(2r - v - v \exp(r - v))$. В этом случае при $r > 2.008$ в системе (2.1) существуют 1-циклы и 2-циклы. Пусть теперь $v = h(h(h(v))) \equiv v \exp(2r - v - v \exp(r - v)) \cdot \exp(r - v \exp(r - v) \exp(r - v \exp(r - v)))$. В этом случае при $r > 3.103$ в системе (2.1) существуют 1-циклы, 2-циклы и 3-циклы. (Указанные значения r могут быть найдены с помощью любого математического пакета, который имеет в своем составе программу численного решения трансцендентных уравнений.)

Согласно теореме Шарковского [4] цикл периода 3 порождает циклы всех периодов. Таким образом, в системе $w_{i+1} = g(w_i)$ существуют все циклы с периодами $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$. Согласно теореме Зингера [4] в системе $w_{i+1} = g(w_i), i = 0, 1, 2, \dots$, при любом n и некотором значении параметра $r = r_n$ присутствуют все неустойчивые циклы периодов $2^i, i = 0, \dots, n - 1$, и один устойчивый цикл периода 2^n . Если $r = r_\infty = 3.103$, то отображение $g(w)$ имеет полуустойчивую траекторию \mathbb{S} в любой окрестности любой точки которой лежат точки счетного множества неустойчивых циклов всех периодов $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому множество всех периодических точек плотно в \mathbb{W} . (Любая точка множества \mathbb{S} с любой наперед заданной точностью может быть аппроксимирована некоторой периодической точкой.)

(а4) В этом пункте определения 2.1 – 2.3 будут перенесены на пространство \mathbb{W} и отображение $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$.

Пусть $w^* \neq 0$ – неподвижная точка отображения g . Предположим, что $r > 3.103$. Тогда для любой итерированной функции $g^{(m)}(w)$ на интервале $[0, 1]$ присутствует 2^m неподвижных точек $w_0^* = 0, w_1^*, \dots, w_{l-1}^*$, где $l = 2^m$. Среди этих точек присутствует и неподвижная точка w^* .

Предположим, что $w_{l-2}^* = w^*$. Очевидно, что уравнение $g^{(m)}(w) = w^*$ также имеет 2^m действительных корней ξ_0, \dots, ξ_{l-1} на интервале $[0, 1]$. Так как множество \mathbb{W} ограничено, то расстояние между двумя фиксированными точками стремится к 0: $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, w_{l-1}^*) = 0$. Это означает, что имеет место предельное равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, \xi_{l-1}) = 0$.

Ясно, что $g(\xi_{l-2}) = g(w^*)$. Отсюда вытекает, что существует точка w_0 такая, что $\xi_{l-2} = g^{(m-1)}(w_0)$ и $g(g^{(m-1)}(w_0)) = g(g^{(m-1)}(w^*)) = w^*$. Кроме того, мы имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, w_0) = 0$.

(а5) Напомним, что в силу сопряженности отображений g и h , все утверждения, которые справедливы для g , имеют место также и для h [4].

С помощью оператора \mathbf{T}^{-1} мы перейдем от пространства \mathbb{W} к пространству \mathbb{V} . Тогда существует точка $v_0 = \mathbf{T}^{-1}(w_0)$, для которой условия определения 2.2 будут выполнены.

В самом деле, пусть $v^* = h^{(m)}(v_0)$ и

$$\overline{B_{\delta_2}}(v_0) \subset \overline{B_{\delta_1}}(v^*) \subset \overline{B_\delta}(v^*), \delta_2 < \delta_1 < \delta,$$

– последовательность вложенных шаров. Мы имеем:

$$\forall x, y \in \overline{B_{\delta_1}}(v^*) d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \lambda d(h^{(m-1)}(x), h^{(m-1)}(y)) \geq \dots \geq \lambda^m d(x, y).$$

Ясно, что $\mu = \lambda^m$ и $\delta_2^m < \delta_1^m < \delta$. Рассмотрим последовательность $\{v_j = h^{(j)}(v_0), j = 0, \dots, m\}$, где $v_j \in \overline{B_{\delta_1}}(v^*)$. Пусть $\delta_2 = \max(d(v_0, v_1), \dots, d(v_0, v_m))$. В соответствии с пунктом (а4) для достаточно большого m расстояние $d(v^*, v_0)$ может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому,

$$d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \mu d(x, y), \forall x, y \in \overline{B_{\delta_2}}(v_0)$$

и все условия определения 2.2 выполнены. Точка v^* является невырожденным грубым обратным репеллером отображения h .

Наконец, мы проверим реализацию условий определения 2.3. Предположим противное: точка v^* не есть внутренняя точка множества $h^{(m)}(B_\gamma(v_0))$ для любого положительного $\gamma < \delta_2$. В этом случае точка v^* принадлежит границам множеств $\overline{h^{(m)}(B_\gamma(v_0))}$, $\overline{B_{\delta_1}(v^*)}$ и $\overline{B_\delta(v^*)}$. Поэтому мы получим $\delta = \ln[r - 1 + \sqrt{r(r - 2)}]$, $\lambda = 1$, и $r = 2$, что противоречит предположению $r > 2$. Таким образом, мы имеем $\gamma_0 = \delta_2$ и точка v^* является регулярным грубым обратным репеллером отображения h . Это означает, что все условия теоремы 2.1 удовлетворены. Поэтому отображение $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ является хаотическим.

(В) В дальнейшем в этом пункте мы будем считать, что переменные $x \geq 0, y \geq 0$ и параметры $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема может быть найдена в любом учебнике по математическому анализу.

Теорема 2.2. (Теорема о неявной функции.) Предположим, что функция $H(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема для каждой точки (x, y) открытого множества $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть (x_0, y_0) – точка в \mathbb{D} , для которой $H(x_0, y_0) = 0$ и $H'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существуют окрестности $U \subset \mathbb{R}$ точки x_0 и $V \subset \mathbb{R}$ точки y_0 такие, что для каждого $x \in U$ уравнение $H(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y \in V$. Кроме того, это решение может быть представлено как $y = h(x)$, где функция $h(x)$ непрерывно дифференцируема при $x = x_0$.

Определим критические точки функции $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$. Эти точки являются корнями системы уравнений $F'_x(x, y) = 0, F'_y(x, y) = 0$. Здесь мы получим единственную критическую точку $(x_s, y_s) = (-1/\beta, -1/\alpha)$. Так как $x \geq 0, y \geq 0$, то при $\beta > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha < 0$ и при $\beta < 0, \alpha > 0$ первый квадрант не содержит критических точек.

Пусть $\beta < 0, \alpha < 0$. Вычислим дискриминант $Disc$ функции $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$ при $(x, y) = (x_s, y_s)$:

$$Disc = F''_{xx} \cdot F''_{yy} - (F''_{xy})^2 = -\lambda \alpha \beta \cdot \exp(\alpha x + \beta y) < 0.$$

Таким образом, если $\beta < 0, \alpha < 0$, то функция $F(x, y) = 0$ может иметь точку самопересечения. Эта точка существует при выполнении следующего условия: $F(-1/\beta, -1/\alpha) = \lambda/(\beta \cdot e) - 1/(\alpha \cdot e) = 0$. Последнее условие может быть переписано в форме $\beta - \alpha\lambda = 0$.

Рассмотрим следующие случаи: (а) $\beta - \alpha\lambda < 0, \alpha < 0, \beta < 0$; (б) $\beta - \alpha\lambda > 0, \alpha < 0, \beta < 0$; (с) $\alpha > 0, \beta < 0$; (д) $\alpha < 0, \beta > 0$.

Мы имеем:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \lambda \frac{1 + \beta \cdot x}{1 + \alpha \cdot y} \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y).$$

(а) Пусть $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c \geq 0$. Тогда уравнение $\lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c$ имеет два корня. Поэтому функция $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$ имеет две ветви.

Пусть $1 + \beta \cdot x = 1 + \alpha \cdot y = 0$. Это означает, что $x = x_s = -1/\beta$, $y = y_s = -1/\alpha$ и $F(x_s, y_s) = (e\alpha)^{-1} - \lambda(e\beta)^{-1} = 0$. Последнее уравнение противоречит условию $\beta - \alpha\lambda < 0$. Поэтому, если $1 + \beta \cdot x = 0$, то $1 + \alpha \cdot y \neq 0$.

Если $\beta - \alpha\lambda = 0$, то $y_{max} = y_{min} = -1/\alpha$. Поэтому, если $\beta - \alpha\lambda < 0$, то $\forall x \in [0, \infty)$ $y_{max} < -1/\alpha$ для нижней ветви кривой $F(x, y) = 0$, и $y_{min} > -1/\alpha$ для верхней ветви кривой $F(x, y) = 0$.

Мы имеем $y'_x = 0$ при $x = x_s = -1/\beta$. Так как для $y \approx 0$ мы получаем $1 + \alpha \cdot y > 0$, то в силу теоремы о неявной функции точка $x = x_s = -1/\beta$ является максимумом неявной функции $y_l = f_l(x)$ (нижняя ветвь) и минимумом неявной функции $y_u = f_u(x)$ (верхняя ветвь). Случай (а) показан на рисунке 5.

(b) Этот случай повторяет случай (а), если заменить x на y . Точка $y = y_s = -1/\alpha$ является точкой максимума для левой ветви и точкой минимума для правой ветви кривой $F(x, y) = 0$. Случай (b) показан на рисунке 6.

(c) Пусть снова $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c \geq 0$. В этом случае уравнение $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = c$ имеет только один корень. Поэтому функция $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$ имеет одну ветвь (см. рисунке 7).

(d) Этот случай повторяет случай (c), если заменить x на y (см. рисунке 8).

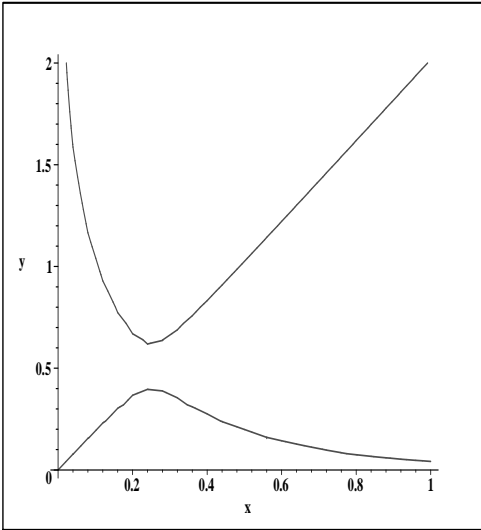


Рис. 5. Кривая $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 1.95 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$

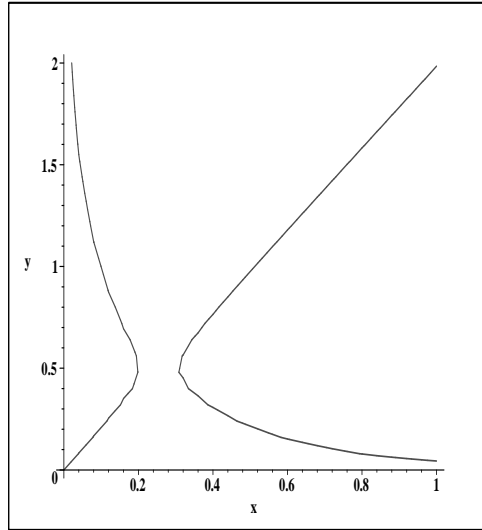


Рис. 6. Кривая $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 2.05 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$

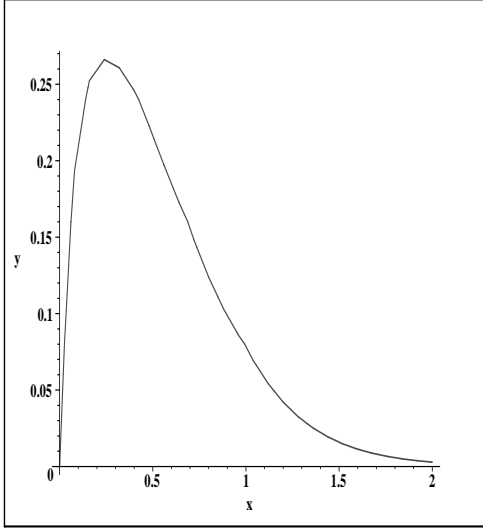


Рис. 7. Кривая $y \cdot \exp(2 \cdot y) - 5 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$

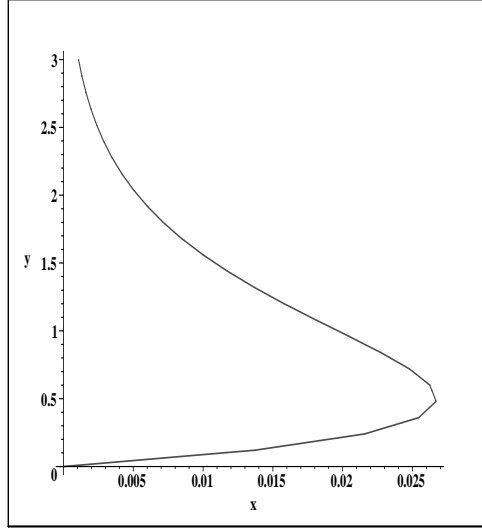


Рис. 8. Кривая $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 5 \cdot x \cdot \exp(4 \cdot x) = 0$

Заметим, что если имеет место или условие (а) или условие (с), то величина y ограничена ($y < -1/\alpha$). Так как при $x \rightarrow \infty$ мы будем иметь $y = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y) < \lambda_1 \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x)$, где $\lambda_1 = \lambda \cdot e$, то функция $y = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y)$ ведет себя так же, как функция $\lambda_1 \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x)$ (здесь $\beta < 0$).

Далее мы будем изучать только случаи (а) и (с). Пусть $\beta = -p$, $\alpha = -m$, где $p > 0$. Тогда случай (а) имеет место при $-p + \lambda \cdot m < 0$ и $0 \leq y < 1/m$; случай (с) имеет место при $-p + \lambda \cdot m < 0$ и $m < 0$.

Перепишем уравнение $F(x, y) = 0$ в форме: $y = \lambda x \cdot \exp(-px + my)$.

Рассмотрим неявное дискретное отображение

$$x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-px_n + mx_{n+1}), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Теорема 2.3. *Предположим, что $p > 0$, $\lambda > 0$, $x_0 > 0$. Пусть или*

1) $m > 0$, $-p + \lambda m < 0$, и $x_0 < 1/m$ (например, $p = 1$, $m = 0.1$, и $\lambda_{cr} = 9.025$)

или

2) $m \leq 0$ (например, $p = 1$, $m = 0$, и $\lambda_{cr} = 24.533$; $p = 1$, $m = -0.1$, и $\lambda_{cr} = 66.686$).

Тогда отображение (2.3) будет хаотическим.

Доказательство. Из условий теоремы 2.1 и теоремы о неявной функции следует, что явная функция $y = f(x)$, полученная из неявной функции $F(x, y) = 0$, удовлетворяет условию: $f([0, \infty)) \subset [0, \infty)$.

Пусть в (2.3) $m \neq 0$. С помощью замен $v_i = px_i$ переменных x_i процесс (2.3) может быть представлен в форме:

$$v_{i+1} = v_i \exp(r - v_i + sv_{i+1}); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

где $s = m/p$, $r = \ln \lambda > 0$, $v_i > 0$; $i = 0, 1, 2, \dots$

Зафиксируем значение $v_0 = v_0^*$. Воспользуемся теоремой о неявной функции для получения решений v_1^*, v_2^*, \dots уравнений (2.4) относительно v_{i+1} ; $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда процесс (2.4) может быть переписан в явной форме:

$$v_{i+1} = v_i \exp(r + sv_{i+1}^* - v_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Пусть $m > 0$ ($s > 0$). Тогда будем иметь $v_i^* < 1/s$ и $r + sv_{i+1}^* < r + 1$. Поэтому процесс (2.5) может быть аппроксимирован процессом

$$t_{i+1} = t_i \exp(r + 1 - t_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Так как хаос возникает в системе (2.6) при $r + 1 = 3.103$, в системе (2.5) он возникнет при $r - 1 = 2.103$ (см. пункты (а1) – (а5)). Если $m < 0$ ($s < 0$), то процесс (2.1) может быть аппроксимирован процессом (2.5). В этом случае $r - 1 = 3.103 < r - sv_{i+1}^*$ и хаос возникает в системе (2.5) при $r + 1 = 4.103$. Принимая во внимание, что $\lambda = \ln r$, мы получим утверждение теоремы 2.3. (На рис. 9–11 представлены бифуркационные диаграммы отображения $x_{n+1} = \lambda \cdot \exp(-x_n + s \cdot x_{n+1})$.) \square

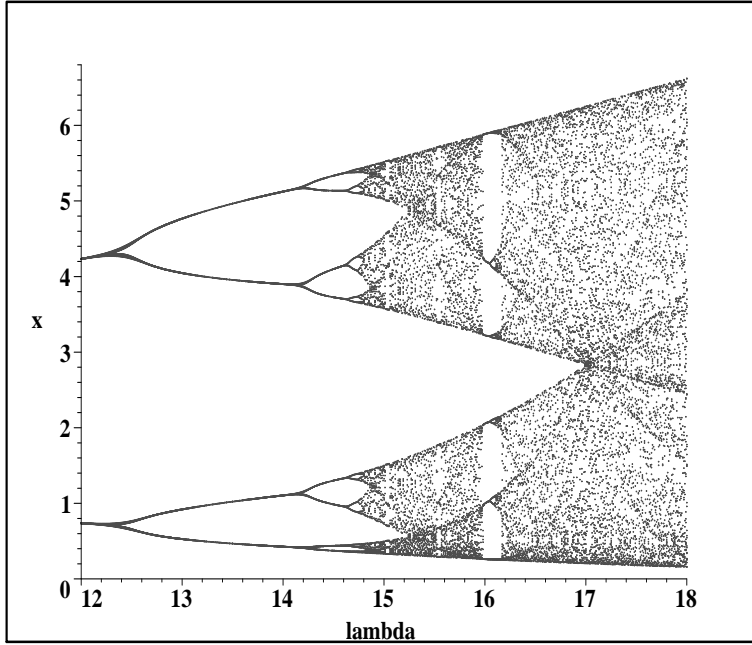


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма отображения $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n)$;
 $\lambda_{cr} = 24.533$

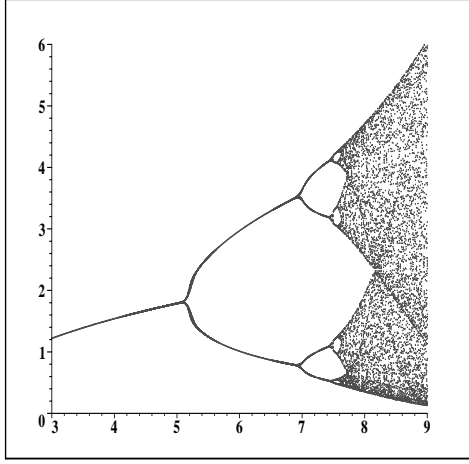


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма отображения $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n + 0.1 \cdot x_{n+1})$; $\lambda_{cr} = 9.025$

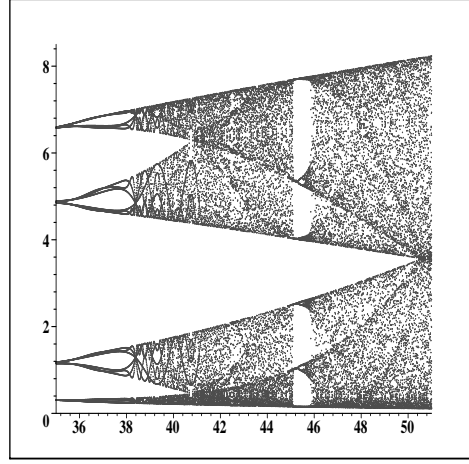


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма отображения $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n - 0.1 \cdot x_{n+1})$; $\lambda_{cr} = 66.686$

3. Хаотические аттракторы квадратичных систем

Теорема 3.1. Пусть для системы (1.1) $a_1 > 0$, $b_1 < 0$ и $a_1 + 2b_1 < 0$. Предположим также, что $b + c = 0$, $a_{12} = 0$. Тогда любое решение системы (1.1) является диссипативным. Кроме того, существует множество $W := \{x_0, y_0, z_0\}$ начальных данных такое, что $\forall (x_0, y_0, z_0) \in W$ решение системы (1.1) с начальными данными (x_0, y_0, z_0) будет ограниченным.

Доказательство. (а) Перепишем систему (1.1) в форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Тогда дивергенция поля $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ может быть вычислена по формуле: $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = a_1 + 2b_1 < 0$. Это означает, что система (1.1) является диссипативной.

(б) Положим $b_1 = c_1 = 0$. Без потери общности можно считать, что $a_{11} < 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} > 0$. В этом случае должно быть $b > 0$ и $c < 0$. Воспользовавшись заменой переменной $x \rightarrow x/(2b)$, мы можем считать, что $b = 1$, $c = -1$. При этих условиях из (1.1) следует, что

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_{11} y_0^2 \exp \left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \right) + a_{22} z_0^2 \exp \left(- \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \right).$$

Положим $V(t) = \dot{x}(t) - a_1 x(t)$, где функция $V(t)$ определена на интервале $[t_0, t] \in [0, \infty)$. Тогда мы получим:

$$V(t) = a_{11} y_0^2 \exp \left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \right) + a_{22} z_0^2 \exp \left(- \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \right). \quad (3.1)$$

Вычислим производную по времени t от функции $V(t)$. С помощью уравнения (3.1) мы исключим выражение $\exp(\pm \int_0^t x(\tau) d\tau)$ из формулы

$$\dot{V}(t) = a_{11}y_0^2 x(t) \exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) - a_{22}z_0^2 x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right).$$

Тогда будем иметь $(\dot{V}(t))^2 = x^2(t)(V^2(t) - 4a_{11}a_{22}y_0^2z_0^2)$. Отсюда следует:

$$\dot{V}(t) = \pm x(t)\sqrt{V^2(t) + g}, \quad g = \frac{-4a_{11}a_{22}y_0^2z_0^2}{a_1^2} > 0.$$

Последнее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\pm \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{dV}{\sqrt{V^2 + g}} = \ln \frac{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) $\forall t \in [t_0, \infty)$, мы получим:

$$V(t) = a_{11}y_0^2 \frac{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}} + a_{22}z_0^2 \frac{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}}{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}. \quad (3.3)$$

Ясно, что $\forall V(t)$ величина $V(t) + \sqrt{V^2(t) + g} > 0$. Поэтому можно определить величины

$$-p = \frac{a_{11}y_0^2}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}} < 0, \quad s = a_{22}z_0^2 \cdot (V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}) > 0.$$

Тогда уравнение (3.3) принимает форму $V = -p \cdot (V + \sqrt{V^2 + g}) + s \cdot (V + \sqrt{V^2 + g})^{-1}$. Отсюда следует:

$$V = \pm \frac{s - pg}{\sqrt{(1 + 2p)(1 + 2p + 2s - 2pg)}}.$$

Таким образом, условия разрешимости уравнения (3.3) определены следующим неравенством:

$$1 + 2p + 2s - 2pg > 0. \quad (3.4)$$

Пусть условие (3.4) выполнено. Тогда из (3.1) следует:

$$\exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) = \frac{-V + \sqrt{V^2 + g}}{-2a_{11}y_0^2} > 0.$$

Так как функция $V(t)$ ограничена, то функция $\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$ при $t \rightarrow \infty$ также ограничена. Следовательно, должно быть $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ (условие сходимости несобственного интеграла) и $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{x}(t_i) = 0$.

Введем в систему (1.1) новые переменные ρ и ϕ по формулам: $y = \rho \cos \phi$, $z = \rho \sin \phi$, где $\rho > 0$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1 \cdot x(t) + \rho^2(t) \cdot (a_{11} \cos^2 \phi(t) + a_{12} \cos \phi(t) \sin \phi(t) + a_{22} \sin^2 \phi(t)), \\ \dot{\rho}(t) = (b_1 + (b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t)) \cdot \rho(t), \\ \dot{\phi}(t) = -c_1 - (b - c) \cos \phi(t) \cdot \sin \phi(t) \cdot x(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Из первого уравнения системы (3.5) следует, что уравнение $V(t) \equiv \dot{x}(t) - a_1 x(t) = 0$ имеет счетное число корней t_1, \dots, t_i, \dots , где $\phi(t_i) = k_i \pi$; k_i целое число. Это означает, что функция $V(t)$ меняет знак с периодом π . Следовательно, функции $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ также меняют знаки с периодом π .

Ясно, что существует $t^* \in [0, \infty)$ такое, что при $t > t^*$ функция $|x(t)|$ является убывающей. Рисунок 12 демонстрирует это утверждение.

Наконец, если $x(t) \rightarrow 0$, то при $b_1 = c_1 = 0$ и в силу сходимости интеграла $\int_{t_0}^{\infty} x(\tau) d\tau$ из второго и третьего уравнений системы (1.1) следует, что решения $y(t)$ и $z(t)$ ограничены.

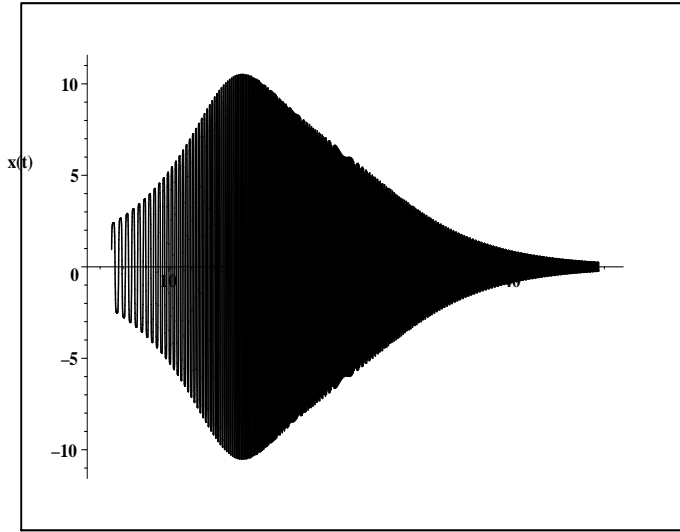


Рис. 12. Эволюция функции $x(t)$

(с) Перепишем систему (1.1) в форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & -c_1 & b_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$; $\mathbf{G}, \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Представим последнее уравнение в следующем интегральном виде:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp A(t - \tau) \mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{x}_0 \in W$.

Из (3.6) следует:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau, \quad (3.7)$$

где $k = \|\exp(At)\| < \infty$.

При $\mathbf{x}_0 \in W$ решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ ограничено. Следовательно, мы должны иметь $\int_0^\infty \|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau < \infty$. Поэтому, воспользовавшись неравенством Гроноуола – Беллмана из (3.7), мы получаем:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}_0\| \exp \left[\int_0^\infty k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau \right] < \infty.$$

Теорема доказана. \square

Пусть $x(t_i) = x_i$, $\rho(t_i) = \rho_i$, $\phi(t_i) = \phi_i$, где t_i — корни первого уравнения $\dot{x}(t_i) = 0$ системы (3.5), $i = 1, 2, \dots$. Мы можем считать, что $\dots < \phi_{i-1} < \phi_i < \phi_{i+1} < \phi_{i+2} < \dots$

Будем предполагать, что только одно из следующих двух условий имеет место:

или t_i, t_{i+1} и t_{i+2} являются последовательными минимумом, максимумом и минимумом $\rho(t)$; $i = 1, 2, \dots$;

или t_i, t_{i+1} и t_{i+2} являются последовательными максимумом, минимумом и максимумом функции $x(t)$; $i = 1, 2, \dots$.

Предположим, что имеет место второй вариант.

Теорема 3.2. *Предположим, что существует момент t^* такой, что из условия $t > t^*$ следует $x(t) \geq 0$. Пусть $\forall i \in \{1, 3, 5, \dots\}$ выполняется условие*

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[b + c + (b - c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b - c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau < 0. \quad (3.8)$$

Тогда в условиях теоремы 3.1 в системе (1.1) присутствуют или предельные циклы, или хаотические аттракторы.

Доказательство. Из системы (3.5) мы получаем:

$$x(t_i) = -\frac{\rho^2(t_i) \cdot (a_{11} \cos^2 \phi(t_i) + a_{12} \cos \phi(t_i) \sin \phi(t_i) + a_{22} \sin^2 \phi(t_i))}{a_1}, \quad (3.9)$$

$i = 1, 2, \dots$

Рассмотрим следующую дробь:

$$\frac{x_{i+2}}{x_i} = \frac{\rho_{i+2}^2 \cdot (a_{11} \cos^2 \phi_{i+2} + a_{12} \cos \phi_{i+2} \sin \phi_{i+2} + a_{22} \sin^2 \phi_{i+2})}{\rho_i^2 \cdot (a_{11} \cos^2 \phi_i + a_{12} \cos \phi_i \sin \phi_i + a_{22} \sin^2 \phi_i)}.$$

Из (3.9) следует, что $\forall i$ величина $\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = \phi(T)$, где $\phi(T)$ – период функции $a_{11} \cos^2 \phi(t) + a_{12} \cos \phi(t) \sin \phi(t) + a_{22} \sin^2 \phi(t)$. Тогда

$$\frac{a_{11} \cos^2 \phi_{i+2} + a_{12} \cos \phi_{i+2} \sin \phi_{i+2} + a_{22} \sin^2 \phi_{i+2}}{a_{11} \cos^2 \phi_i + a_{12} \cos \phi_i \sin \phi_i + a_{22} \sin^2 \phi_i} = 1.$$

Любая функция вида $d_{11} \cos^2 \phi + d_{12} \cos \phi \sin \phi + d_{22} \sin^2 \phi$ всегда может быть преобразована к форме $g_1 + g_2 \cos 2\phi + g_{12} \sqrt{1 - \cos^2 2\phi}$. Следовательно, период этих функций равен π . Тогда из третьего уравнения системы (3.5) вытекает

$$\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = \pi = c_1(t_{i+2} - t_i) + \frac{b-c}{2} \int_{t_i}^{t_{i+2}} \sin 2\phi(t)x(t) dt; \quad c_1 < 0.$$

(Если $c_1 > 0$, то $\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = -\pi$.)

Поэтому дробь x_{i+2}/x_i может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+2}}{x_i} &= \exp \left[\frac{2b_1\pi}{c_1} + \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[b + c + (b-c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau \right] = \\ &= \lambda \exp \left[\int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[b + c + (b-c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau \right], \end{aligned}$$

где $\lambda = \exp(2b_1\pi/c_1)$.

Введем функцию

$$h(\phi) = b + c + (b-c) \cos 2\phi - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi.$$

Ограниченная функция $x(t)$ является монотонно убывающей на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ и монотонно возрастающей на интервале $[t_{i+1}, t_{i+2}]$. Тогда мы имеем (из известной теоремы о среднем значении определенного интеграла):

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= x(t_i + 0) \int_{t_i}^{\xi} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+1} - 0) \int_{\xi}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) d\tau + \\
&+ x(t_{i+1} + 0) \int_{t_{i+1}}^{\zeta} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+2} - 0) \int_{\zeta}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) d\tau, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

где $t_i \leq \xi \leq t_{i+1}$, $t_{i+1} \leq \zeta \leq t_{i+2}$. Мы можем считать, что $t^* < t_i$. Тогда функция $x(t)$ является положительной на интервале $[t_i, t_{i+2}]$. Поэтому существуют величины ξ и ζ такие, что

$$x(t_{i+1} - 0) \int_{\xi}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+1} + 0) \int_{t_{i+1}}^{\zeta} h(\phi(\tau)) d\tau = 0.$$

Следовательно, из (3.10) следует:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau = p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2},$$

где величины $p_i = \int_{t_i}^{\xi} h(\phi(\tau)) d\tau$, $p_{i+2} = \int_{\zeta}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) d\tau$ могут иметь любые знаки.

Окончательно мы получаем:

$$x_{i+2} = \lambda x_i \exp(p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2}); i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots \quad (3.11)$$

Очевидно, что если $p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2} < 0$, то условие (3.8) будет выполнено. Предположим, что $p_i = -p < 0$, $p_{i+2} = m \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 3.1 все решения системы (1.1) ограничены. Поэтому условия (а) и (с) раздела 2 могут быть объединены в одно условие: $-p + \lambda m < 0$ (см. раздел 2). Далее можно воспользоваться теоремой 2.3.

Например, положим $\lambda = 20$, $p_i = -4$, $p_{i+2} = -1$. Тогда после первой итерации мы получаем уравнение $x = \lambda x \exp((p_i + p_{i+2})x)$; это уравнение имеет два корня: 0, 0.6. После второго шага итерации мы получаем уравнение $x = \lambda^2 x \exp((p_i + 2p_{i+2})x + p_i \lambda \exp((p_i + p_{i+2})x))$; это уравнение имеет четыре корня: 0, 0.11, 0.6, 0.82 и так далее. Окончательно мы приходим к сценарию Фейгенбаума удвоения периода. Это означает существование в системе (1.1) предельных циклов или хаотических аттракторов. \square

Пусть $x_i = z_i > 0$, $p_i = -1$, $p_{i+2} = 0$, $x_{i+2} = z_{i+1}$. Тогда процесс (3.11) может быть переписан в виде:

$$z_{i+1} = z_i \exp(r - z_i), \quad r = \frac{2\pi b_1}{c_1} > 0, i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Процесс (3.12) называется дискретной популяционной моделью Риккера [5]. Известно [2], что модель Риккера имеет 2-циклы, 4-циклы и хаотический аттрактор когда, соответственно, $r = 2.1$, $r = 2.6$ и $r = 3$.

Теорема 3.3. *Предположим, что $a_1 > 0$, $a_1 + 2b_1 < 0$, $a_{11}/b < 0$ и $a_{22}/c < 0$. Пусть также*

$$b + c \neq 0, \quad \frac{a_{12}^2}{(b + c)^2} - \frac{a_{11}a_{22}}{bc} < 0$$

и существует момент t^ такой, что из условия $t > t^*$ следует, что решение $x(t)$ системы (1.1) положительно. Предположим также, что справедливы условия $b_1 < 0$ и (3.8). Тогда в системе (1.1) существуют или предельные циклы, или хаотические аттракторы.*

Доказательство. Ограниченность решений системы (1.1), в условиях теоремы 3.3, следует из результатов работы [2]. С помощью замен переменных $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$ всегда можно добиться того, что $c_1 > 0$. Поэтому мы можем считать, что в (3.5) $c_1 > 0$. Тогда из (3.5) будем иметь:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 + \int_0^t \left[\left(b_1 + (b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t) \right) \cdot \rho(t) \right] d\tau < \\ &\rho_0 + \int_0^t \left[(b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t) \cdot \rho(t) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Решение $x(t)$ ограничено. Из (3.13) следует, что в условиях теоремы 3.2 решение $\rho(t)$ также будет ограничено (мы напомним, что $b_1 < 0$). Это означает, что и решения $y(t)$ и $z(t)$ системы (1.1) также будут ограничены.

Если мы постулируем ограниченность решения $x(t)$, то доказательство теоремы 3.3 полностью повторяет доказательство теоремы 3.2 при условии $b + c \neq 0$. \square

Теорема 3.3 может быть обобщена следующим образом.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1x(t) + a_{11}y^2(t) + a_{12}y(t)z(t) + a_{22}z^2(t), \\ \dot{y}(t) = d_1x(t) + d_2y(t) + d_3z(t) + bx(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = e_1x(t) + e_2y(t) + e_3z(t) + cx(t)z(t). \end{cases} \quad (3.14)$$

Предположим, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

имеет спектр: $0, \gamma \pm i\delta$, где $\gamma < 0, \delta \neq 0$; $\gamma, \delta, d_i, e_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 3$.

Заменяем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & -c_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

матрицей (3.15). Тогда для системы (3.14) мы можем получить результат, подобный теореме 3.3, в котором условие $a_1 + 2b_1 < 0$ должно быть заменено условием $a_1 + 2\gamma < 0$.

Предположим, что система (1.1) при $d_1 = e_1 = 0$ имеет хаотический аттрактор. Если значения $d_1 = 0$, $e_1 = 0$ не являются бифуркационными, то для достаточно малых величин $|d_1|$ и $|e_1|$ система (3.14) также имеет хаотический аттрактор.

4. Примеры

Ниже, на рисунках 13 — 17, для системы (3.14) при различных значениях параметров, представлены новые типы хаотических аттракторов.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 20z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 20y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

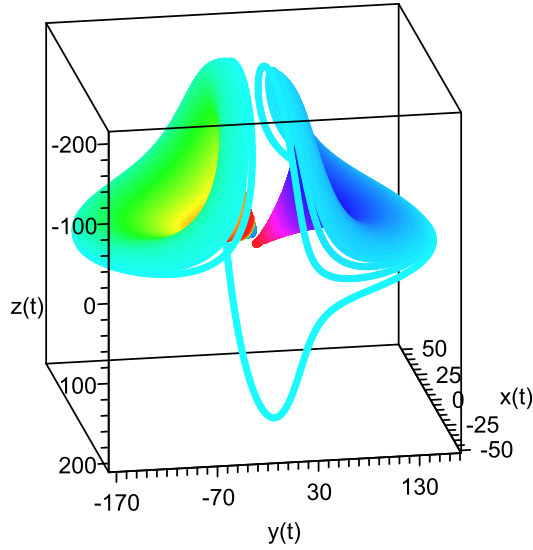
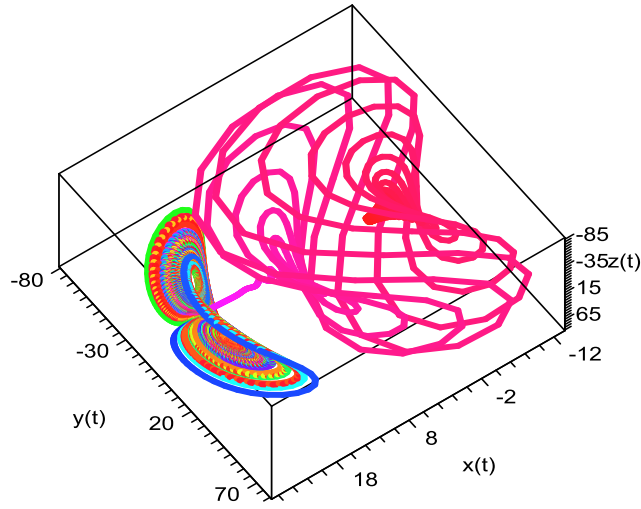
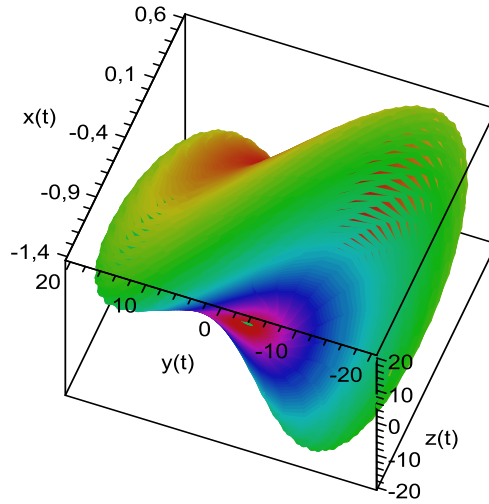


Рис. 13. Фазовый портрет системы (4.1) для $t = 10$

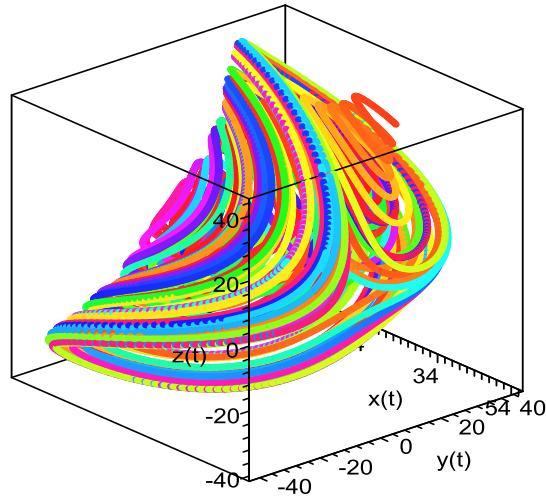
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 250y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.2)$$


 Рис. 14. Фазовый портрет системы (4.2) для $t = 10$

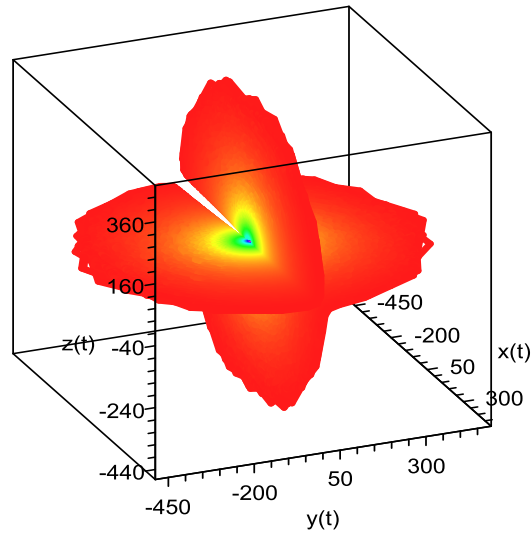
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 250y(t) + z(t) - 15x(t)z(t), \end{cases} \quad (4.3)$$


 Рис. 15. Эволюции аттрактора системы (4.3) для $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -5x(t) + (1.6y(t) + z(t))(y(t) - z(t)), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 28z(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - 28y(t) + 2z(t) + x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

Рис. 16. Эволюции аттрактора системы (4.4) для $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - 10z(t) + 20(y^2(t) - z^2(t)), \\ \dot{y}(t) = 10z(t) - 20x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 10x(t) - 10y(t) + 20x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

Рис. 17. Фазовый портрет системы (4.5) для $t = 10$

В заключение заметим, что для систем (4.1), (4.2) и (4.5) условия теоремы 3.3 (и ее обобщений при $d_1 = 0, e_1 = 1$) выполнены. Для систем (4.3), (4.4) эти условия не удовлетворены.

Библиографические ссылки

1. *Belozyorov V.Ye.* On existence of homoclinic orbits for some types of autonomous quadratic systems differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 217. – P. 4582 – 4595.
2. *Belozyorov V.Ye.* New types of 3-D systems of quadratic differential equations with chaotic dynamics based on Ricker discrete population model // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 218. – P. 4546 – 4566.
3. *Zhang X., Shi Y., Chen G.* Constructing chaotic polynomial maps // International Journal Bifurcation and Chaos, 2009. – Vol.19. – No. 2. – P. 531 – 543.
4. *Crownover R.M.* Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers, Boston, London, 1995.
5. *Ricker W.E.* Stock and recruitment // Journal of Fisheries Research Board of Canada, 1954. – Vol. II. – P. 559 – 623.

Надійшла до редакції 26.12.2011