ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 40–52

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 519.8

ПРО КВАДРАТИЧНУ СКАЛЯРИЗАЦІЮ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. М. Богомаз*, П. І. Когут**

* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: wbogomas@i.ua*

** *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Розглядається проблема скаляризації для одного класу задач векторної оптимізації в частково впорядкованих банахових просторах. Припускається, що цільове відображення має ослаблену властивість напівнеперервності знизу та упорядковувальний конус не є тілесним. Запропоновано метод скаляризації, який успадковує ідеї підходу Пасколетті – Серафіні. Показано, що в цьому випадку скалярні задачі оптимізації можна апроксимувати квадратичними задачами мінімізації.

Ключові слова: векторнозначне відображення, напівнеперервність знизу, частково впорядковані простори, ефективні розв'язки, узагальнені розв'язки.

1. Вступ

Розглядаються задачі векторної оптимізації в банахових просторах у постановці, яка залучає топологічні властивості простору образів цільового відображення. Вважається, що цільове відображення має ослаблену властивість напівнеперервності знизу та діє в банахів простір, який є частково впорядкованим загостреним нетілесним конусом Λ. Характерною особливістю означеного класу задач є той факт, що залучення класичного методу скаляризації (методу лінійних згорток) для знаходження (Λ, μ)-ефективних розв'язків не завжди можливе. Такий підход дозволяє знайти всі ефективні розв'язки відповідним вибором параметру лише для опуклих задач. Крім того, розв'язки задачі мінімізації лінійної згортки можуть не належати до класу (Λ, μ)-ефективних розв'язків вихідної задачі векторної оптимізації.

У зв'язку з цим метою даної роботи є залучення іншого типу скаляризації задач векторної оптимізації з epi-напівнеперервним знизу цільовим відображенням та нетілесним упорядковувальним конусом. А саме, для цього розглядається підхід адаптивної скаляризації, який успадковує ідеї методу нелінійної скаляризації Пасколетті – Серафіні. Показано, що в цьому випадку задачі скалярної оптимізації можна апроксимувати квадратичними задачами мінімізації. Перевагою такого підходу є можливість залучення широкого класу ефективних чисельних алгоритмів для розв'язання задач векторної оптимізації.

2. Основні позначення та постановка задачі векторної оптимізації

Нехай U — банахів простір керувань, який є дуальним до деякого сепарабельного банахового простору. Нехай X є рефлексивним банаховим простором. Будемо вважати, що простір $U \times X$, як топологічний, наділений τ-топологією, за яку візьмемо добуток $*$-слабкої топології в U та слабкої топології в X. Нехай Z — простір образів цільового відображення, який є дуальним до деякого сепарабельного банахового простору (тобто $Z = V^*$). Простір Z наділений топологією μ, з якою будемо пов'язувати $*$-слабку топологію.

Означення 2.1. Алгебраїчною внутрішністю конуса Λ називається така множина:

$$\operatorname{cor}(\Lambda) = \left\{ y \in \Lambda : \forall z \in Z \ \exists \widehat{\lambda} > 0, y + \lambda z \in \Lambda, \forall \lambda \in [0, \widehat{\lambda}] \right\}.$$

Нехай простір V частково впорядковано за допомогою опуклого загостреного конуса K з непорожньою алгебраїчною внутрішністю $\operatorname{cor}(K)$. Припустимо, що конус Λ є спряженим до деякого конуса K, тобто

$$\Lambda = K^* = \{ z \in Z : \langle z, \lambda \rangle_{Z;V} \geq 0, \forall \lambda \in K \}.$$

Означення 2.2. Квазівнутрішністю конуса K називається множина

$$K^\sharp = \{ \lambda \in K : \langle z, \lambda \rangle_{Z;V} > 0, \forall z \in \Lambda \setminus \{0_Z\} \}.$$

Позначимо частковий порядок у просторі Z, породжений конусом Λ, через $\leq_\Lambda$, що означає:

$$z_1 \leq_\Lambda z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \{\theta_Z\}.$$

Нехай $I : U \times X \to Z$ є заданим цільовим відображенням на непорожній підмножині допустимих пар $\Xi \subset U \times X$.

Означення 2.3. [4] Підмножину простору $Z \cup \{\pm\infty\}$ будемо називати Λ_μ-інфімумом відображення $I : U \times X \to Z$ та позначати $\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$, якщо вона є ефективним Λ_μ-інфімумом образу $I(\Xi)$, тобто

$$\inf^{\Lambda,\mu} I(\Xi) := \begin{cases} \min^\Lambda(\operatorname{cl}_\mu I(\Xi)), & \min^\Lambda(\operatorname{cl}_\mu I(\Xi)) \neq \emptyset, \\ \{-\infty\}, & \min^\Lambda(\operatorname{cl}_\mu I(\Xi)) = \emptyset, \end{cases}$$

де позначено: $\mathrm{cl}_\mu I(\Xi)$ — μ-замикання образу цільового відображення $I(\Xi)$, $\min^\Lambda \mathrm{cl}_\mu I(\Xi)$ — множина Λ-мінімальних елементів для $\mathrm{cl}_\mu I(\Xi)$, тобто таких елементів $z^* \in \mathrm{cl}_\mu I(\Xi)$, які задовольняють умові

$$(z^* - \Lambda) \cap \mathrm{cl}_\mu I(\Xi) = \{z^*\}.$$

Нехай $\{I(u_k, x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — довільна послідовність в Z. Позначимо множину всіх часткових μ-границь цієї послідовності через $\mathrm{L}^\mu\{I(u_k, x_k)\}$. Зафіксуємо деякий елемент $(u_0, x_0) \in U \times X$ та визначимо наступну множину:

$$\mathrm{L}^{\tau\times\mu}(I, (u_0, x_0)) := \bigcup_{\{(u_k,x_k)\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{M}_\tau(u_0,x_0)} \mathrm{L}^\mu\{I(u_k, x_k)\},$$

де $\mathfrak{M}_\tau(u_0, x_0)$ — сукупність всіх послідовностей $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^\infty \subset U \times X$ таких, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_0, x_0)$ в $U \times X$.

Означення 2.4. [9] Цільове відображення $I : U \times X \to Z$ називається epi-напівнеперервним знизу в точці $(u_0, x_0) \in U \times X$ відносно τ-топології в $U \times X$ та μ-топології в Z, якщо виконується умова

$$I(u_0, x_0) = \inf{}^\Lambda \mathrm{L}^{\tau\times\mu}(I, (u_0, x_0)), \tag{2.1}$$

де операція $\inf^\Lambda A$ визначається як: для кожного $y \in Z$ умова $y \leq_\Lambda \inf^\Lambda A$ виконується тоді і тільки тоді, коли $y \leq_\Lambda z$ при всіх $z \in A$.

Якщо ця властивість виконується в будь-якій точці $(u, x) \in \Xi$, то таке відображення називають epi-напівнеперервним знизу на Ξ.

Слід зауважити, що в скалярному випадку властивість epi-напівнеперервності знизу відображення еквівалентна класичному означенню секвенційної напівнеперервності знизу $I : U \times X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Означення 2.5. [10] Відображення $I : U \times X \to Z$ називається локально обмеженим знизу відносно конуса Λ, якщо для кожної пари $(u_0, x_0) \in \mathrm{Dom}\, I$ існує елемент $b \in Z$ та окіл $\mathcal{U}(u_0, x_0)$ пари $(u_0, x_0) \in U \times X$ такі, що

$$b \leq_\Lambda I(u_0, x_0), \forall (u, x) \in \mathcal{U}(u_0, x_0).$$

Всюди далі припустимо, що відображення $I : U \times X \to Z$ є локально обмеженим знизу відносно конуса Λ.

Теорема 2.1. *Нехай $I : U \times X \to Z$ — відображення, надграфік якого є $(\tau \times \mu)$-замкненою підмножиною простору $U \times X \times Z$. Тоді $I : U \times X \to Z$ є epi-напівнеперервним знизу на $U \times X$.*

Але далеко не кожне epi-напівнеперервне знизу відображення має $(\tau \times \mu)$-замкнений надграфік.

Теорема 2.2. *[10] Нехай Λ μ-замкнений опуклий загострений упорядковувальний конус в Z такий, що норма $\|\cdot\|$ в Z є Λ-монотонною. Нехай $I : U \times X \to Z$ є локально обмеженим знизу відносно конуса Λ та epi-напівнеперервним знизу відображенням на $U \times X$. Тоді надграфік $I(u,x)$ є $(\tau \times \mu)$-замкненою множиною.*

Розглянемо таку задачу векторної оптимізації :

$$I(u,x) \to \inf{}^{\Lambda,\mu}, \tag{2.2}$$

$$(u,x) \in \Xi. \tag{2.3}$$

Скорочено задачу (2.2)–(2.3) будемо позначати $(\Xi;\, I;\, \Lambda)$.

Означення 2.6. [4] Пара $(u^*, x^*) \in \Xi$ називається (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (2.2)–(2.3), якщо виконується умова

$$(I(u^*,x^*) - \Lambda) \cap cl_\mu I(\Xi) = \{I(u^*,x^*)\}.$$

Множину всіх (Λ,μ)-ефективних розв'язків задачі (2.2)–(2.3) будемо позначати через $\mathrm{Eff}_\mu(\Xi;\, I;\, \Lambda)$, тобто

$$\mathrm{Eff}_\mu(\Xi;\, I;\, \Lambda) = \left\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \in \inf{}^{\Lambda,\mu} I(\Xi)\right\}.$$

3. Про скаляризацію задач векторної оптимізації

Нехай $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є Λ-незростаючою послідовністю в Z, тобто такою, що умова $\eta_{k+1} \leq_\Lambda \eta_k$ виконується для всіх $k \in \mathbb{N}$. Пов'яжемо вихідну задачу векторної оптимізації (2.2)—(2.3) з наступним сімейством множин:

$$\Theta_{\eta_k} = \{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \eta_k\}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Очевидно, що послідовність $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ є монотонною в такому сенсі:

$$\Theta_{\eta_{k+1}} \subseteq \Theta_{\eta_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Так як надграфік відображення $I : U \times X \to Z$ є $(\tau \times \mu)$-замкненим, то множини Θ_{η_k} є τ-замкненими для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Перейдемо до границі в послідовності $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \to \infty$. Для цього залучимо означення збіжності послідовності множин за Куратовським.

Означення 3.1. Секвенційною K-нижньою та K-верхньою границею послідовності $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ називаються множини

$$K_s - \liminf_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k} = \Big\{(u,x) \in U \times X : \exists (u_k,x_k) \xrightarrow{\tau} (u,x), \exists k_0 \in \mathbb{N},$$
$$\forall k \geq k_0 : (u_k,x_k) \in \Theta_{\eta_k}\}$$

та

$$K_s - \limsup_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k} = \Big\{(u,x) \in U \times X : \exists n_k \to \infty, \exists (u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u,x),$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : (u_k, x_k) \in \Theta_{\eta_{n_k}}\Big\},$$

відповідно. Послідовність $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається за Куратовським (K_s-збігається) до множини Θ, якщо виконується умова:

$$K_s - \liminf_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k} = K_s - \limsup_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k} = \Theta.$$

Твердження 3.1. Нехай $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z$ є Λ-незростаючою послідовністю такою, що $\eta_k \xrightarrow{\mu} \eta^*$ в Z. Припустимо, що K є відтворювальним конусом в V,

$$\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \eta^*\} \neq \emptyset, \tag{3.2}$$

та Ξ — непорожня секвенційно τ-замкнена підмножина $U \times X$. Тоді Θ_{η^*} є секвенційною K_s-границею послідовності $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \to \infty$.

Доведення. За виконання умови (3.2) та внаслідок монотонності послідовності $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z$, маємо:

$$\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \eta^*\} \subseteq \{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \eta_k\} \subseteq \Theta_{\eta_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отже, $\Theta_{\eta_k} \neq \emptyset$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Нехай $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — довільні послідовності такі, що $(u_k, x_k) \in \Theta_{\eta_{n_k}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$ та послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ τ-збігається до елемента $(u^*, x^*) \in U \times X$.

За вихідними припущеннями, конус K є відтворювальним з непорожньою квазівнутрішністю $K^\sharp$. Тоді, як відомо з праць [2, 11], у дуальному просторі $Z = V^*$ упорядковувальний конус $\Lambda = K^*$ є нормальним відносно топології, яка породжена нормою в просторі Z, що означає:

$$0 \leq_\Lambda y \leq_\Lambda z \Rightarrow \|y\|_Z \leq \|z\|_Z. \tag{3.3}$$

Оскільки $I(u_k, x_k) \leq_\Lambda \eta_{n_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, та послідовність $\{\eta_{n_k}\}$ монотонно μ-збігається до η^* при $k \to \infty$ (а, отже, $\{\eta_{n_k}\}$ є обмеженою послідовністю в Z), то згідно з (3.3) виконується нерівність

$$I(u_k, x_k) \leq_\Lambda \eta_{n_1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тому, якщо послідовність $\{I(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена знизу, то властивість нормальності (3.3) гарантує її обмеженість у просторі Z. Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу, послідовність $\{I(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є μ-збіжною. Інакше виконується умова $\inf^\Lambda\{I(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty} = -\infty_\Lambda$, внаслідок чого нерівність $I(u^*, x^*) \leq_\Lambda \eta^*$ є очевидною.

Отже, розглянемо лише перший випадок. Нехай $\xi \in Z$ є μ-границею послідовності $\{I(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. З нерівності $I(u_k, x_k) \leq_\Lambda \eta_{n_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, умов

$\eta_{n_k} \searrow \eta^*$ та $I(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$, випливає співвідношення $\xi \leq_\Lambda \eta^*$. Крім того, маємо такий факт: $\xi \in L^{\tau\times\mu}(I, (u^*, x^*))$ та виконується нерівність

$$I(u^*, x^*) \overset{\text{згідно}(2.1)}{\leq_\Lambda} z, \forall z \in L^{\tau\times\mu}(I, (u^*, x^*)).$$

Звідкіля отримуємо:

$$I(u^*, x^*) \leq_\Lambda \eta^*. \tag{3.4}$$

З τ-замкненості множини Ξ випливає включення $(u^*, x^*) \in \Xi$. Поєднуючи цей факт з нерівністю (3.4), маємо: $(u^*, x^*) \in \Theta_{\eta^*}$. Отже, за означенням 3.1 виконується умова $K_s - \limsup\limits_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k} \subseteq \Theta_{\eta^*}$.

Для завершення доведення покажемо справедливість включення

$$\Theta_{\eta^*} \subseteq K_s - \liminf_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k}.$$

Для цього зафіксуємо довільний елемент $(u^*, x^*) \in \Theta_{\eta^*}$. Завдяки припущенню (3.2), маємо $I(u^*, x^*) \leq_\Lambda \eta^*$. З того, що послідовність $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ є Λ-незростаючою, отримуємо:

$$I(u^*, x^*) \leq_\Lambda \eta^* \leq_\Lambda \eta_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, $(u^*, x^*) \in \Theta_{\eta_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Для завершення перевірки включення $\Theta_{\eta^*} \subseteq K_s - \liminf\limits_{k\to\infty} \Theta_{\eta_k}$ залишається лише скористатися означенням 3.1. $\square$

Оскільки, в загальному випадку, множина (Λ, μ)-ефективних розв'язків для задачі (2.2)—(2.3) може бути порожньою, то є доцільним розглянути наступне поняття:

Означення 3.2. Елемент $(u^*, x^*) \in \Xi$ називається (τ, μ)- узагальненим розв'язком задачі векторної оптимізації (2.2)—(2.3), якщо існують послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^\infty \subset \Xi$ та елемент $\xi \in \inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u, x)$ такі, що виконуються умови: $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*)$ в $U \times X$ та $I(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$ в Z при $k \to \infty$.

Позначимо через $\mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda)$ множину всіх (τ, μ)-узагальнених розв'язків задачі (Ξ, I, Λ). Ясно, що

$$\mathrm{Eff}_\mu(\Xi; I; \Lambda) \subseteq \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{3.5}$$

Позначимо через $\mathrm{sc}_\tau I_\lambda : \Xi \to \mathbb{R}$ τ-напівнеперервну знизу регуляризацію функціонала $I_\lambda(u, x) = \langle I(u, x), \lambda\rangle_{Z;V}$, де $\lambda \in K$. Ясно, що $\mathrm{sc}_\tau I_\lambda$ є τ-напівнеперервним знизу функціоналом, який задовольняє умову $\mathrm{sc}_\tau I_\lambda \leq_\Lambda I_\lambda$ на Ξ.

Наведемо відомий результат:

Теорема 3.1. *[5] Нехай простори U, X, Z відповідають зробленим вище припущенням. Нехай при цьому простір $Z = V^*$ частково впорядкований за допомогою загостреного конуса $\Lambda = K^*$, де K — опуклий загострений конус у V з непорожньою алгебраїчною внутрішністю* $\mathrm{cor(K)}$*. Нехай Ξ є непорожньою секвенційно τ-компактною підмножиною $U \times X$ та нехай $I : U \times X \to Z$ задане відображення (не обов'язково epi-напівнеперервне знизу на Ξ). Тоді має місце включення:*

$$\bigcup_{\lambda \in K^\sharp} \mathrm{Argmin}_{(u,x)\in\Xi} \mathrm{sc}_\tau I_\lambda(u,x) \subseteq \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{3.6}$$

Наступний результат є ключовим у даній статті.

Теорема 3.2. *Нехай Ξ є непорожньою секвенційно τ-компактною підмножиною $U \times X$ та $I : \Xi \to Z$ задане epi-напівнеперервне знизу відображення. Нехай $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ є Λ-монотонною незростаючою послідовністю в Z такою, що $\eta_k \xrightarrow{\mu} \xi \in \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$ та K — відтворювальний конус у V. Тоді послідовність $\{\Theta_{\eta_k}\}$ збігається за Куратовським до Θ_ξ при $k \to \infty$, де:*

$$\Theta_\xi \subseteq \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{3.7}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що множина

$$\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \xi\}$$

непорожня. Справді, враховуючи припущення $\eta_k \xrightarrow{\mu} \xi \in \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$, маємо:

$$\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \eta_k\} \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отже, існує послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$ така, що $(u_k, x_k) \in \Theta_{\eta_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Оскільки множина Ξ секвенційно τ-компактна, то існує пара $(u^*, x^*) \in \Xi$ така, що, переходячи при необхідності до підпослідовності, маємо:

$$\Theta_{\eta_k} \ni (u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*) \text{ при } k \to \infty.$$

З іншого боку, маємо очевидні нерівності:

$$\xi \leq_\Lambda I(u_k, x_k) \leq_\Lambda \eta_k \leq_\Lambda \eta_1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Залучаючи аргументи, як при доведенні твердження 3.1, можна показати, що $I(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$. Враховуючи, що $\xi \in \inf^\Lambda L^{\tau\times\mu}(I, (u^*, x^*))$ та беручи до уваги властивість epi-напівнеперервності знизу відображення $I : \Xi \to Z$, доходимо висновку:

$$\begin{gathered}(u^*, x^*) \in \{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \xi\} \text{ та} \\ (u^*, x^*) \in \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda) \,\text{згідно з означенням 3.2,}\end{gathered} \tag{3.8}$$

тобто множина $\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \leq_\Lambda \xi\}$ непорожня. Отже, всі передумови твердження 3.1 виконані. Таким чином, послідовність $\{\Theta_{\eta_k}\}_{k=1}^\infty$ збігається за Куратовським до Θ_ξ при $k \to \infty$.

Доведемо справедливість включення (3.7). Для цього зафіксуємо довільний елемент $(v,y) \in \Theta_\xi$. Якщо множина Θ_ξ містить один елемент, тоді умова (3.7) випливає з виразу (3.8). Тому припустимо, що $(v,y) \neq (u^*, x^*)$. Згідно з означенням 3.1, існує послідовність $\{(v_k, y_k)\}_{k=1}^\infty$ така, що $(v_k, y_k) \xrightarrow{\tau} (v,y)$ в $U \times X$ та $(v_k, y_k) \in \Theta_{\eta_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. З того, що $\eta_k \searrow \xi$ та $\xi \in \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$, маємо:

$$\eta_k - \Lambda \xrightarrow{K_s} \xi - \Lambda \text{ та } (\xi - \Lambda) \cap \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x) = \xi \text{ згідно з означенням 2.3.}$$

Отже, послідовність $\{I(v_k, y_k)\}_{k=1}^\infty$ задовольняє умові

$$\xi \leq_\Lambda I(v_k, y_k) \leq_\Lambda \eta_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тому, внаслідок нормальності конуса Λ та теореми Банаха – Алаоглу, маємо $I(v_k, y_k) \xrightarrow{\mu} \xi$. Таким чином, $(v,y) \in \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda)$ згідно з означенням 3.2. □

Для побудови Λ-монотонної послідовності $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ застосуємо такий підхід. Нехай η_1 є довільним елементом Z таким, що $\eta_1 >_\Lambda \xi$, де ξ – заданий елемент множини $\mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$. Тоді вектор $\zeta = \eta_1 - \xi$ можна ототожнити з певним напрямком в Z. Розглянемо наступну послідовність:

$$\eta_k = \xi + k^{-1}\zeta, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що такий підхід до вибору елементів послідовності $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ бере своїм початком ідеї підходу Пасколетті – Серафіні [8].

Нехай η та ζ — задані елементи простору Z. Розглянемо наступну скалярну задачу:

$$\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}} \Phi(u,x,\gamma), \tag{3.9}$$

де

$$\Phi(u,x,\gamma) = \gamma, \tag{3.10}$$

та множина допустимих розв'язків $\Omega_{\eta,\zeta} \subset U \times X \times \mathbb{R}$ визначена як

$$\Omega_{\eta,\zeta} = \{(u,x,\gamma) \in \Xi \times \mathbb{R} | I(u,x) \leq_\Lambda \eta + \gamma\zeta\}. \tag{3.11}$$

Припустимо, що елементи $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$ задовольняють такій умові:

(A1) існує, принаймні, один елемент $(u,x) \in \Xi$ такий, що

$$I(u,x) \leq_\Lambda \eta + \zeta.$$

Покажемо, що підхід Пасколетті – Серафіні може бути залучений до задачі векторної оптимізації в банахових просторах з epi-напівнеперервним знизу цільовим відображенням та з нетілесним упорядковувальним конусом.

Теорема 3.3. *Нехай Ξ — непорожня секвенційно τ-компактна підмножина $U \times X$, $I : \Xi \to Z$ — локально обмежене знизу та epi-напівнеперервне знизу цільове відображення та нехай K — відтворювальний конус в V. Тоді:*

(i) якщо $(u^0, x^0) \in \mathrm{Eff}_\mu(\Xi; I; \Lambda)$, тоді існують елементи $\eta^0 \in Z$ та $\zeta^0 \in Z$ такі, що трійка $(u^0, x^0, 0)$ є оптимальною для скалярної задачі (3.9)—(3.11), крім того,

$$(u^0, x^0, 0) \in \Omega_{\eta^0,\zeta^0} \text{ та } \inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta^0,\zeta^0}} \varPhi(u, x, \gamma) = 0. \tag{3.12}$$

(ii) якщо $(u^0, x^0, \gamma^0) \in U \times X \times \mathbb{R}$ є мінімізантом у скалярній задачі (3.9)—(3.11) з $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$ такими, що $\eta + \gamma^0\zeta \in \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u, x)$, то

$$(u^0, x^0) \in \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{3.13}$$

(iii) якщо $(u^0, x^0, \gamma^0) \in U \times X \times \mathbb{R}$ є единим мінімізантом у скалярній задачі (3.9)—(3.11) з такими $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$, то

$$(u^0, x^0) \in \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{3.14}$$

(iv) якщо елементи $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$ є такі, що $\Omega_{\eta,\zeta} \neq \emptyset$, то скалярна задача (3.9)—(3.11) має непорожню множину мінімізантів.

Доведення. Частина (i). Нехай $(u^0, x^0) \in \Xi$ є (Λ, μ)-ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (2.2)—(2.3). Тоді $I(u^0, x^0) \in \mathrm{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u, x)$. Покладемо:

$$\eta^0 = I(u^0, x^0) \text{ та } \zeta^0 \text{ є довільним ненульовим елементом } \Lambda. \tag{3.15}$$

З того, що $I(u^0, x^0) = \eta^0 + 0\zeta^0$ випливає, що трійка $(u^0, x^0, 0)$ допустима в скалярній задачі (3.9)—(3.11). Для доведення справедливості виразу (3.12), припустимо, що

$$(u^0, x^0, 0) \notin \mathrm{Argmin}_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta^0,\zeta^0}} \varPhi(u, x, \gamma).$$

Тоді існує трійка $(\hat{u}, \hat{x}, \hat{\gamma}) \in \Omega_{\eta^0,\zeta^0}$ з властивістю:

$$\hat{\gamma} = \varPhi(\hat{u}, \hat{x}, \hat{\gamma}) < \varPhi(u^0, x^0, 0) = 0. \tag{3.16}$$

Залучаючи вираз (3.16) та той факт, що $(\hat{u}, \hat{x}, \hat{\gamma}) \in \Omega_{\eta^0,\zeta^0}$, маємо:

$$I(\hat{u}, \hat{x}) \leq_\Lambda \eta^0 + \hat{\gamma}\zeta^0 \overset{\text{за (3.16)}}{<_\Lambda} \eta^0 \overset{\text{за (3.15)}}{=} I(u^0, x^0).$$

У результаті приходимо до протиріччя з умовою $(u^0, x^0) \in \mathrm{Eff}_\mu(\Xi; \mathrm{sc}_\tau I; \Lambda)$. Це доводить частину (i).

Частина (ii). Нехай $(u^0, x^0, \gamma^0) \in U \times X \times \mathbb{R}$ є мінімізантом в скалярній задачі (3.9)—(3.11). Нехай $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — монотонна незростаюча послідовність чисел така, що $\gamma_k \to \gamma^0$ при $k \to \infty$. Покладемо $\eta_k = \eta + \gamma_k \zeta$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Ясно, що $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є Λ-незростаючою послідовністю в Z, для якої елемент $\eta^* = \eta + \gamma^0 \zeta$ є μ-границею. З того, що $(u^0, x^0, \gamma^0) \in \Omega_{\eta,\zeta}$, випливає наступне:

$$(u^0, x^0) \overset{\text{за (3.11)}}{\in} \Theta_{\eta^*} \text{ та } (u^0, x^0) \overset{\text{за монотонністю } \eta_k}{\in} \Theta_{\eta_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

В результаті, умова $\eta + \gamma^0 \zeta \in \operatorname{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$ та теорема 3.2 гарантують, що $\Theta_{\eta_k} \xrightarrow{K_s} \Theta_{\eta^*}$ та $(u^0, x^0) \in \operatorname{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda)$.

Частина (iii). Нехай $(u^0, x^0, \gamma^0) \in U \times X \times \mathbb{R}$ є єдиним мінімізантом у скалярній задачі (3.9)—(3.11). В цьому випадку не можна залучити теорему 3.2 тому, що в загальному випадку має місце умова $\eta + \gamma^0 \zeta \notin \operatorname{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$. Разом з тим, маємо: $I(u^0, x^0) = \eta + \gamma^0 \zeta$.

Нехай $\{(u_k, x_k, \gamma_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — мінімізаційна послідовність для задачі (3.9)—(3.11), тобто $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^0, x^0)$ та $\gamma_k \to \gamma^0$. Як завжди, можна підібрати послідовність $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ як монотонно незростаючу. Тому, залучаючи гіпотезу (A1), зауважимо, що послідовність образів $\{I(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена в просторі Z (див. аргументи в теоремі 3.2). Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу, існує елемент $\xi \in L^{\tau\times\mu}(I, (u^0, x^0))$ такий, що $I(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$ при $k \to \infty$. Припустимо, що $\xi \notin \operatorname{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$. Тоді існує такий елемент $(\hat{u}, \hat{x}) \in \Xi$, який задовольняє нерівності $I(\hat{u}, \hat{x}) <_\Lambda \xi$. Поєднуючи цей факт із властивістю $I(u^0, x^0) \leq_\Lambda z$ для всіх $z \in L^{\tau\times\mu}(I, (u^0, x^0))$, приходимо до співвідношення

$$I(\hat{u}, \hat{x}) \leq_\Lambda I(u^0, x^0). \tag{3.17}$$

Разом з тим, маємо $I(u^0, x^0) = \eta + \gamma^0 \zeta$ та $\eta + \gamma^0 \zeta \notin \operatorname{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$. Отже, виконується умова $(I(u^0, x^0) - \Lambda) \cap I(\Xi) = \emptyset$. Порівнюючи цю умову з (3.17), отримуємо $I(\hat{u}, \hat{x}) = I(u^0, x^0)$. Проте цей факт суперечить існуванню єдиного розв'язку (u^0, x^0, γ^0) в задачі (3.9)—(3.11). Таким чином, $\xi \in \operatorname{Inf}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$ та $(u^0, x^0) \in \operatorname{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda)$.

Для доведення частини (iv) необхідно зауважити, що множина $\Omega_{\eta,\zeta}$ є непорожньою та секвенційно компактною підмножиною $U \times X \times \mathbb{R}$ відносно добутку τ-топології та топології поточкової збіжності в $\mathbb{R}$ (див. гіпотезу (A1)). Отже, враховуючи лінійну структуру цільової функції $\Phi : \Omega_{\eta,\zeta} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, прямий метод варіаційного числення приводить до бажаного результату.

Доведення завершено. $\square$

4. Про квадратичну регуляризацію задач векторної оптимізації

Покажемо, що ідеї підходу квадратичної регуляризації [7], можуть бути залучені до скалярної задачі (3.9)—(3.11). Нехай $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$ — задані елементи, які задовольняють умові (A1). Припустимо, що існує такий дійсний банахів простір Y та оператор $\mathsf{P} : Y \to U \times X \times \mathbb{R}^2$ з декомпозицією $\mathsf{P}(y) = (P_1(y), P_2(y), P_3(y))$, де $P_1 : Y \to U \times X,\ P_2 : Y \to \mathbb{R},\ P_3 : Y \to \mathbb{R}$ такі, що

(B1) відображення $P_1 : Y \to U \times X$ та $P_2 : Y \to \mathbb{R}$ сюр'єктивні в такому сенсі: для кожної трійки $(u, x, \gamma) \in U \times X \times \mathbb{R}$ та кожного $c > 0$ існує елемент $y \in Y$, який задовольняє умовам $P_1(y) = (u, x),\ P_2(y) = \gamma$, $\|y\|_Y \geq c$.

(B2) $P_3(y) = \|y\|_Y^2$ для всіх $y \in Y$.

Далі розглянемо наступне сімейство параметризованих квадратичних задач мінімізації:

$$F(y) = \|y\|_Y^2 \to \inf\nolimits_{y \in \varDelta_{\eta,\zeta}}, \tag{4.1}$$

$$\varDelta_{\eta,\zeta} = \{y \in Y | P_1(y) \in \Xi, I(P_1(y)) \leq_\Lambda \eta + P_2(y)\zeta, P_2(y) + s \leq \|y\|_Y^2\}, \tag{4.2}$$

де s — додатна константа.

Теорема 4.1. *Нехай Ξ — непорожня секвенційно τ-компактна підмножина $U \times X$ та цільове відображення $I : \Xi \to Z$ є локально обмеженим знизу та epi-напівнеперервним знизу на Ξ . Нехай K є відтворювальним конусом у V. Нехай Y — рефлексивний банахів простір, наділений слабкою топологією σ, і відображення P_1 та P_2 неперервні в такому сенсі*

$$P_1(y_k) \xrightarrow{\tau} P_1(y) \text{ в } U \times X \text{ та } P_2(y_k) \to P_2(y) \text{ в } \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

як тільки $y_k \xrightarrow{\sigma} y$ в Y. Припустимо, що елементи $\eta \in Z$ та $\zeta \in Z$ є такими, що виконуються умови (A1), (B1)–(B2). Тоді мають місце наступні твердження:

(a) *існує константа $s > 0$ така, що $y^0 \in \varDelta_{\eta,\zeta}$ — єдиний мінімізант у задачі $\inf_{y \in \varDelta_{\eta,\zeta}} F(y)$, і при цьому*

$$(u^0, x^0) = P_1(y^0) \in \mathrm{GenEff}_{\tau,\mu}(\Xi; I; \Lambda). \tag{4.4}$$

(b) *якщо $(u^0, x^0) \in \mathrm{Eff}_\mu(\Xi; I; \Lambda)$, тоді існують елементи $\eta^0 \in Z$, $\zeta^0 \in Z$, $y^0 \in Y$ та $s > 0$ такі, що $(u^0, x^0) = P_1(y^0)$, $y^0 \in \varDelta_{\eta^0,\zeta^0}$ та y^0 є мінімізантом в регуляризованій задачі (4.1)—(4.2) при $\eta = \eta^0$ та $\zeta = \zeta^0$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що виконання гіпотези (A1) гарантує виконання наступної нерівності:

$$\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}}\Phi(u,x,\gamma) > -\infty. \tag{4.5}$$

З τ-компактності множини Ξ випливає її обмеженість, вибір додатної змінної s може бути реалізований за таким правилом:

$$s > -\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}}\Phi(u,x,\gamma) + \sup_{y\in Y}\inf_{P_1(y)\in\Xi}\|y\|_Y^2.$$

Нехай $y^0 \in \Delta_{\eta,\zeta}$ є мінімізантом в регуляризованій задачі (4.1)—(4.2). Тоді (4.2) гарантує наступне:

$$\text{якщо } y \in \Delta_{\eta,\zeta} \text{ то } (u,x,\gamma) = (P_1(y), P_2(y)) \in \Omega_{\eta,\zeta}.$$

Отже, пара $(u^0,x^0,\gamma^0) = (P_1(y^0), P_2(y^0))$ є допустимою для скалярної задачі (3.9)—(3.11). Разом з тим, обернене твердження

$$\text{якщо } (u,x,\gamma) \in \Omega_{\eta,\zeta}, \text{ то } \exists y \in Y: \ (u,x) = P_1(y), \ \gamma = P_2(y), \ y \in \Delta_{\eta,\zeta}$$

є правильним завдяки гіпотезі (B1). Отже, образи функцій $\Phi : \Omega_{\eta,\zeta} \to \mathbb{R}$ та $P_2 : \Delta_{\eta,\zeta} \to \mathbb{R}$ збігаються. Тому виконується умова:

$$\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}}\Phi(u,x,\gamma) \le P_2(y), \forall y \in \Delta_{\eta,\zeta}. \tag{4.6}$$

Крім того, зважаючи на властивість неперервності (4.3), маємо очевидний висновок: якщо $y^0 \in \Delta_{\eta,\zeta}$ є мінімізантом в регуляризованій задачі (4.1)—(4.2), то

$$P_2(y^0) + s \overset{\text{за (4.2)}}{=} \|y^0\|_Y^2 \overset{\text{за (4.6)}}{=} \inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}}\Phi(u,x,\gamma) + s.$$

Поєднуючи ці зауваження, доходимо висновку:

$$\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta,\zeta}}\Phi(u,x,\gamma) = \Phi(u^0,x^0,\gamma^0) = \|y^0\|_Y^2 - s,$$

тобто трійка $(u^0,x^0,\gamma^0) = (P_1(y^0), P_2(y^0))$ є оптимальною в скалярній задачі оптимізації (3.9)—(3.11). Залучаючи теорему 3.3, зокрема її частину (iv), маємо: умова (4.4) є правильною.

Для доведення твердження (b) припустимо, що (u^0,x^0) є (Λ,μ)-ефективним розв'язком вихідної задачі оптимізації (2.2)—(2.3). Тоді теорема 3.3 гарантує існування елементів $\eta^0 \in Z$, $\zeta^0 \in Z$ таких, що трійка $(u^0,x^0,0)$ є оптимальною для скалярної задачі (3.9)—(3.11) та $\inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta^0,\zeta^0}}\Phi(u,x,\gamma) = 0$. Отже, $s > \sup_{y\in Y}\inf_{P_1(y)\in\Xi}\|y\|_Y^2$. Оберемо елемент $y^0 \in Y$ як

$$P_1(y^0) = (u^0,x^0), P_2(y^0) = 0, s = \|y^0\|_Y^2.$$

Існування такого елемента гарантує гіпотеза (B1). Тоді пряме обчислення показує $y^0 \in \Delta_{\eta^0,\zeta^0}$. Крім того, в цьому випадку маємо:

$$0 = \inf_{(u,x,\gamma)\in\Omega_{\eta^0,\zeta^0}}\Phi(u,x,\gamma) = \Phi(u^0,x^0,0) = P_2(y^0) = \|y^0\|_Y^2 - s.$$

Отже, y^0 є мінімізантом в задачі $\inf_{(u,x,\gamma)\in\Delta_{\eta^0,\zeta^0}}F(y)$. Теорему доведено. □

5. Висновки

У статті розглянуто адаптивний підхід до проблеми скаляризації задач векторної оптимізації з локально обмеженим знизу та epi-напівнеперервними знизу цільовими відображеннями та нетілесними впорядковувальними конусами. Цей підхід грунтується на залученні ідей методу нелінійної скаляризації Пасколетті – Серафіні. При цьому показано, що від отриманих скалярних задач оптимізації можна перейти до більш простих, з точки зору чисельної реалізації, квадратичних задач мінімізації. Наведено умови, за яких запропонований підхід гарантує відтворення (Λ, μ)-ефективних розв'язків вихідної задачі векторної оптимізації.

Бібліографічні посилання

1. *Mansour M., Metrane A., Thera M.* Lower Semicontinuous Regularisation for Vector-Valued Mappings// J. Global Optimization 35(2) (2006), 283–309.
2. *Borwein J. M.* Continuity and differentiability properties of convex operators// Proc. London Math. Soc. 44(3) 1982, 420–444.
3. *Jahn J.* Vector Optimization. Theory, Applications and Extensions. Springer–Verlag, Berlin, 2004.
4. *Kogut P.I., Manzo R., Nechay I.V.* On existence of efficient solutions to vector optimizations problems in Banach spaces// Note di Matematica, 30(4)(2010). 45-64.
5. *Kogut P.I., Manzo R., Nechay I.V.* Topological Aspects of Scalarization in Vector Optimization Problems// Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(2)(2010), 25–49.
6. *Kogut P.I., Manzo R., Nechay I.V.* Generalized efficient solutions to one class of vector optimization problems in Banach spaces// Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(1)(2010), 1–27.
7. *Kosolap A. I.* Solution of general problem of quadratic optimization// Proceeding of the Toulouse Global Optimization Workshop, 2010, 71–74.
8. *Pascoletti A., Serafini P.* Scalarizing Vector Optimization Problems// Journal of Optimization Theory and Applications, 42(4)(1984), 499–524.
9. *Довженко А.В., Когут П.І. Epi-напівнеперервні знизу відображення та їх властивості // Математичні студії, 2011, Т. 16, № 1, с. 86–96.*
10. *A. V. Dovzhenko, P. I. Kogut, R. Manzo, On the concept of* Γ*-convergence for locally compact vector valued mappings // For East Journal of Applied Mathematics, 2011, Vol. 60, Issue 1, p. 1–39.*
11. *Peressini A.L.* Ordered Topological Vector Spaces. HarpetRow, New York, 1967.

Надійшла до редколегії 10.01.2012