ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 53–62

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.977.56

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НА КЛАСІ НЕОБМЕЖЕНИХ МІР РАДОНА

С. О. Горбонос

Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: gorbonos.so@gmail.com

Досліджено задачу оптимального керування еліптичною системою на класі необмежених мір Радона. Характерною особливістю наведеного класу задач є те, що керуваннями виступають функції з вагового простору Лебега $L^1(\Omega, \delta)$. Залучивши концепцію ослаблених розв'язків, отримали достатні умови розв'язності даної задачі оптимізації.

Ключові слова: задача оптимізації, простір Лоренца, ваговий простір Лебега, ослаблений розв'язок.

1. Вступ

Об'єктом досліджень даної роботи є задача оптимального керування для лінійного еліптичного рівняння з умовою Діріхле на межі області. Особливістю такого класу задач є та обставина, що керуваннями є функції з вагового простору Лебега $L^1(\Omega, \delta)$. За таких керувань для відповідної крайової задачі можуть не існувати слабкі розв'язки в класичних просторах Соболєва. Слід зауважити, що відповідна крайова задача не має і класичних розв'язків, оскільки коефіцієнти відповідного оператора не є диференційовними. Тому мета цієї роботи полягає в тому, щоб установити достатні умови розв'язності відповідної задачі оптимального керування, залучаючи концепцію ослаблених розв'язків, яку нещодавно було наведено у працях Ж. М. Ракотосона.

2. Попередні результати та позначення

Наведемо основні позначення, поняття та факти функціонального аналізу, необхідні для подальшого розгляду задачі.

Нехай Ω — відкрита, обмежена множина з гладкою межею простору $\mathbb{R}^N$, де $N \geq 2$. Через $|E|$ будемо позначати міру Лебега будь-якої вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^N$, а χ_E — характеристична функція множини $E \subset \Omega$. Надалі покладемо: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}$. Введемо до розгляду лінійний оператор L:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\partial_i u + c_0(x)u,$$

де $a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $c_0 \in L^\infty(\Omega)$. Для будь-яких $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ і для деяких $\alpha > 0$ мають місце такі оцінки:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2\,,\ \ c_0(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\partial_i b^i(x) \geq 0 \quad \text{м.с. на } \Omega.$$

Тоді спряженим оператором до L буде такий:

$$L^*\varphi = -\sum_{i,j=1}^{N}\partial_j(a_{ij}(x)\partial_i\varphi) - \sum_{i=1}^{N}\partial_i(b^i\varphi) + c_0(x)\varphi.$$

Нехай $u : \Omega \to \mathbb{R}$ довільна вимірна функція. Пов'яжемо з нею такі функції:

$$u_* : \Omega_* =]0, |\Omega|\,[\to \mathbb{R}, \qquad u_*(s) = \inf\{t \in \mathbb{R} : |u > t| \leq s\},$$

$$u_*(0) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega u, \qquad u_*(|\Omega|) = \operatorname{ess\,inf}_\Omega u,$$

$$u_{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u_*(s)\,ds, \quad \text{де } t \in \Omega_* = (0, |\Omega|).$$

Слід зазначити, що функція u_* є спадною.

Уведемо до розгляду ваговий простір Лебега:

$$L^1(\Omega, \delta) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{вимірна за Лебегом:} \quad \int_\Omega |f(x)|\,\delta(x)dx < +\infty \right\},$$

де $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$ для будь-якого $x \in \Omega$.

Означимо простори Лоренца. У випадку коли $1 < p < +\infty$ і $1 \leq q < +\infty$, покладемо:

$$L^{p,q}(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{— вимірна}, \quad |v|^q_{L^{p,q}} = \int_0^{|\Omega|} \left[t^{\frac{1}{p}}\,|v|_{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t} < +\infty \right\}.$$

Для $1 < p < +\infty$ і $q = +\infty$ має місце інше подання:

$$L^{p,q}(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{—вимірна}, \quad |v|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t \leq |\Omega|} t^{\frac{1}{p}}\,|v|_{**}(t) < +\infty \right\}.$$

Зауважимо, що $L^{p,q}(\Omega) \subset L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ для $\forall p \geq q \geq 1$. Крім того, для просторів Лоренца має місце така лема.

Лема 2.1. *[1] Нехай L^* — вищезгаданий лінійний оператор, L^* — спряжений до L. Тоді існує константа $c(\Omega, L^*) > 0$ така, що для будь-якого $g \in L^{N,1}(\Omega)$ існує функція $\varphi \in W^2(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \cap H_0^1(\Omega)$, яка задовольняє наступну рівність*

$$L^*\varphi = g$$

і має місце наступна оцінка

$$|\varphi|_{H_1} + \max_{i,j} |\partial_{ij}\varphi|_{L^{N,1}} \leq c(\Omega, L^*)\, |g|_{L^{N,1}}.$$

Зауваження 2.1. Посилаючись на роботу [1] Ракотосона, зазначимо, що простір $L^{N,1}(\Omega)$ є дуальним до простору $L^{N',\infty}(\Omega)$.

Слід зазначити, що для просторів Лоренца має місце таке подання норми:

$$\|x\| = \int_0^\infty x^*(t)\, d\varphi(t),$$

де $x^*(t)$ — невід'ємна спадна неперервна зліва функція на $(0, \infty)$; $\varphi(t)$ — зростаюча увігнута функція на $[0, \infty)$ і $\varphi(0) = 0$.

Зауважимо, що простори Лоренца не є рефлексивними. Разом з тим, має місце такий результат.

Лема 2.2. *[3] Простір Лоренца сепарабельний тоді і тільки тоді, коли*

$$\varphi(+0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

Наведемо далі низку результатів, які пов'язані з поняттям *-слабкої збіжності в нормованих просторах.

Означення 2.1. Нехай Y — банахів простір, а X— дуальний до нього простір. Тоді послідовність $\{u_n\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ називають *-слабко збіжною до елемента $u \in X$ ($u_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} u$) в X, якщо

$$\langle u_n, u^* \rangle_{X,Y} \to \langle u, u^* \rangle_{X,Y} \quad \forall u^* \in Y.$$

Теорема 2.1. *(Теорема про напівнеперервність знизу норми відносно *-слабкої збіжності). Нехай Y — нормований простір, $X = (Y)^*$ і нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в X і $x_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} x$ в X:*

$$\langle x_n, y \rangle_{Y^*,Y} \to \langle x, y \rangle_{Y^*,Y} \quad \forall y \in Y, \quad \textit{то}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_X \geq \|x\|_X.$$

Теорема 2.2. *(Теорема Банаха – Алаоглу). Нехай X — нормований простір, який є дуальним до нормованого сепарабельного простору Y. Нехай K — обмежена, замкнена, не порожня підмножина простору X, тоді вона є компактною відносно *-слабкої збіжності:*

$$\forall \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \; \exists \{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K \; i \; \exists u^* \in K : \quad u_{k_i} \stackrel{*}{\rightharpoonup} u^*.$$

3. Поняття ослабленого розв'язку та достатні умови розв'язності задачі Діріхле

У цьому параграфі наведемо умови, за яких є розв'язною наступна крайова задача:

$$Lv = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

$$v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Тут $f \in L^1(\Omega, \delta)$, де $\delta = dist(x, \partial\Omega)$ для будь-якого $x \in \Omega$.

Зауважимо, що внаслідок приналежності правої частини рівняння (3.1) до вагового простору Лебега $L^1(\Omega, \delta)$, вихідна задача (3.1)–(3.2) вже не може бути зведеною до класичної варіаційної постановки, оскільки в цьому випадку f не є елементом простору $H^{-1}(\Omega)$, що означає: далеко не кожна функція вагового простору $L^1(\Omega, \delta)$ породжує лінійний неперервний функціонал на просторі Соболєва. Таким чином, залучення класичної концепції слабких розв'язків є неможливим. Зрозуміло, що задача (3.1)–(3.2) в силу зроблених припущень не має також і класичних розв'язків (недиференційовність коефіцієнтів a_{ij}). Отже, виникає нагальна потреба в ослабленні тлумачення поняття розв'язку задачі (3.1)–(3.2). У зв'язку з цим візьмемо за основу концепцію ослаблених розв'язків, яку запропоновано в праці [1].

Означення 3.1. Нехай $f \in L^1(\Omega, \delta)$. Тоді ослабленим розв'язком задачі (3.1)–(3.2) будемо називати функцію v, яка задовольняє інтегральну тотожність:

$$\int\limits_\Omega v L^* \varphi \, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W^2(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \cap H_0^1(\Omega),$$

де $W^2(\Omega, |\cdot|_{p,q}) = \left\{ v \in W^{2,1}(\Omega) : \partial_{ij} v \in L^{p,q}(\Omega) \text{ для } (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2 \right\}.$

Зауважимо, що коректність такого означення розв'язку задачі (3.1)–(3.2) має сенс у силу леми 2.1, зауваження 2.1 та наступного результату.

Теорема 3.1. *Нехай $f \in L^1(\Omega, \delta)$ і $N' = \frac{N}{N-1}$. Тоді існує єдина функція $v \in L^{N',\infty}(\Omega)$, яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_\Omega v L^* \varphi \, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W^2(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \cap H_0^1(\Omega).$$

Крім того існує константа $c(\Omega, L) > 0$ така, що має місце апріорна оцінка для ослабленого розв'язку v

$$|v|_{L^{N',\infty}} \leq c(\Omega, L) \, |f|_{L^1(\Omega, \delta)} \, .$$

4. Про оптимізацію еліптичних систем на класі необмежених мір Радона

Нехай об'єктом керування виступає така крайова задача:

$$Ly = f + u \quad \text{на} \quad \Omega \tag{4.1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{4.2}$$

де $f \in L^1(\Omega, \delta)$, $\delta = dist(x, \partial\Omega)$. Будемо казати, що u є допустимим керуванням, якщо

$$u \in \mathbb{U}, \tag{4.3}$$

де $\mathbb{U}$ — деяка наперед задана множина простору $L^1(\Omega, \delta)$.

Уведемо до розгляду поняття множини допустимих розв'язків:

$$\Xi = \Big\{(u, y) \in L^1(\Omega, \delta) \times L^{N',\infty}(\Omega) :$$

$$\forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \quad \text{має місце} \int\limits_\Omega yL^*\varphi\, dx = \int\limits_\Omega (f + u)\varphi\, dx \Bigg\}.$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таку пару $(u^0, y^0) \in \Xi$, на якій функціонал вартості

$$I(u, y) = \|y - y^*\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega,\delta)} \to \inf \tag{4.4}$$

досягає свого найменшого можливого значення.

Як приклад множини допустимих керувань у задачі (4.1)–(4.4) можна взяти таку множину:

$$\mathbb{U}_\delta = \Big\{u(\cdot) \in L^1(\Omega, \delta) \quad \text{така, що} \quad \|u\|_{BV(\Omega)} \le C\Big\}.$$

Справді, нехай $u \in \mathbb{U}_\delta$, де $\mathbb{U}_\delta \subset L^1(\Omega, \delta)$, тоді для $\forall u \in \mathbb{U}_\delta$ має місце

$$u(x) = \delta^{-1}(x)g(x), \quad \text{де } g \in L^1(\Omega).$$

Тоді, якщо $\mathbb{U} \subset L^1(\Omega)$, то $\mathbb{U}_\delta = \delta^{-1}\mathbb{U}$. Відомо, якщо множина обмежена по BV-нормі, то вона компактна в $L^1(\Omega)$. Отже, нехай $\mathbb{U}$ обмежена по BV-нормі, тоді з будь-якої послідовності $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{U}$ можна вилучити підпослідовність $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що

$$g_{n_k} \to g_0 \in \mathbb{U}.$$

Звідки $\delta_k^{-1}g_{n_k} \to \delta^{-1}g_0$. Далі нехай $u_{n_k} = \delta_k^{-1}g_{n_k}$ і $u_0 = \delta^{-1}g_0$, тоді отримаємо:

$$u_{n_k} \to u_0 \in \mathbb{U}_\delta.$$

Звідки випливає, що множина $\mathbb{U}_\delta$ компактна.

Наведемо основний результат даної роботи.

Теорема 4.1. *Нехай для задачі* (4.1)–(4.2) *мають місце такі припущення:*

(i) y^* *є заданим елементом простору* $L^{N',\infty}(\Omega)$*;*

(ii) *множина* $\mathbb{U}$ *компактна відносно норми в* $L^1(\Omega, \delta)$.

Тоді множина оптимальних розв'язків задачі (4.1)–(4.4) *не є порожньою.*

Доведення. Виходячи з результатів роботи Ракотосона [1] та залучаючи теорему 3.1, можна зробити висновок, що для довільного $u \in \mathbb{U}$ при фіксованому f існує єдина функція $y = y(u) \in L^{N',\infty}(\Omega)$ така, що $(u, y(u)) \in \Xi$. Отже, множина Ξ не є порожньою.

Таким чином, задачу (4.1)–(4.4) можна тлумачити як задачу пошуку такого керування u, при якому ослабленим розв'язком задачі (4.1)–(4.2) був би елемент, найближчий до елемента y^* за нормою простору $L^{N',\infty}(\Omega)$. Інакше кажучи, пару $(u^0, y^0) \in \Xi$ називатимемо оптимальною парою задачі (4.1)–(4.4), якщо виконується умова $I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u, y)$.

Перше питання, яке виникає, пов'язане з існуванням оптимальної пари (u^0, y^0). За побудовою маємо:

$$I(u, y) \geq 0, \qquad \forall (u, y) \in \Xi,$$

звідки випливає, що $I(u, y)$ обмежений знизу. Це означає, що існує послідовність $\{(u_k, y_k)\} \in \Xi$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k, y_k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u, y). \tag{4.5}$$

Надалі називатимемо її мінімізаційною послідовністю. Далі покажемо, що з елементів цієї послідовності можна вилучити підпослідовність, яка буде збігатися до оптимальної пари задачі (4.1)–(4.4). З (4.5) маємо: $\lim_{k\to\infty} I(u_k, y_k) < +\infty$. Звідки випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^1(\Omega,\partial)} < +\infty.$$

Це говорить про обмеженість послідовності $\{u_k\}$ в просторі $L^1(\Omega, \partial)$, проте це не є достатньою умовою для висновку, що послідовність $\{u_k\}$ містить у собі збіжну підпослідовність. Справді, простір $L^1(\Omega, \delta)$ не є рефлексивним, отже, не можна застосувати теорему Банаха про слабку компактність обмежених множин. Але з компактності $\mathbb{U}$ випливає, що

$$\exists \{u_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{і} \quad u^0 \in L^1(\Omega, \delta) :$$

$$u_{k_l} \to u^0 \quad \text{в} \quad L^1(\Omega, \delta),$$

що означає

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_\Omega \left|u_{k_l} - u^0\right| \delta(x)\, dx = 0.$$

Згідно з теоремою 3.1, для ослаблених розв'язків має місце така апріорна оцінка:

$$\|y_k\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} \le C\,\|u_k+f\|_{L^1(\Omega,\delta)} \le C\left(\|u_k\|_{L^1(\Omega,\delta)}+\|f\|_{L^1(\Omega,\delta)}\right). \qquad (4.6)$$

Оскільки $u_{k_l}\to u^0$, то u_{k_l} обмежена в просторі $L^1(\Omega,\delta)$. Отже, з (4.6) випливає, що

$$\sup_{l\in\mathbb{N}}\|y_{k_l}\|_{L^{N',\infty}} < +\infty.$$

Зауважимо, що простір $L^{N,1}(\Omega)$ є дуальним до простору $L^{N',\infty}(\Omega)$. При цьому нормою в ньому буде

$$\|\cdot\|_{L^{N,1}(\Omega)} = \int\limits_0^{|\Omega|} t^{\frac{1}{N}}\,|\cdot|_{**}(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Нехай

$$\varphi'(t)=t^{\frac{1-p}{p}} \quad \text{або} \quad \varphi(t)=pt^{\frac{1}{p}}$$

$$x^*(t)=|\cdot|_{**}(t).$$

Тоді, врахувавши властивості функції $|\cdot|_{**}(t)$ і залучивши лему 2.2, отримаємо, що простір $L^{N,1}(\Omega)$ сепарабельний.

Оскільки послідовність y_{k_l} обмежена в $L^{N',\infty}(\Omega)$ і простір $L^{N,1}(\Omega)$ є сепарабельним і дуальним до простору $L^{N',\infty}(\Omega)$, то за теоремою Банаха – Алаоглу знайдеться підпослідовність $\left\{y_{k_{l_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ послідовності $\{y_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ та елемент $y^0\in L^{N',\infty}(\Omega)$ такі, що

$$y_{k_{l_j}} \overset{*}{\rightharpoonup} y^0 \quad \text{в} \quad L^{N',\infty}(\Omega) \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Залучаючи попередні позначення, можемо вважати, що мінімізаційна послідовність $\{(u_n,y_n)\in\Xi\}$ є такою, що

$$y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y^0 \quad \text{в} \quad L^{N',\infty}(\Omega) \qquad (4.7)$$

$$u_n \to u^0 \quad \text{в} \quad L^1(\Omega,\delta). \qquad (4.8)$$

Таким чином, для мінімізаційної послідовності встановлено існування граничної пари (u^0,y^0).

Тепер покажемо, що $(u^0,y^0)\in\Xi$. Очевидно, що $u^0\in\mathbb{U}$. Таким чином, залишається встановити, що $y^0=y^0(u)$ — ослаблений розв'язок задачі (4.1)–(4.2). Оскільки $(u_n,y_n)\in\Xi$, то має місце тотожність

$$\int\limits_\Omega y_n L^*\varphi\,dx = \int\limits_\Omega (f+u_n)\varphi\,dx. \qquad (4.9)$$

Урахувавши отримані результати в роботі Ракотосона [1] щодо граничного переходу і перейшовши до границі в (4.9), отримаємо:

$$\int_\Omega y^0 L^* \varphi \, dx = \int_\Omega (f + u^0)\varphi \, dx.$$

Звідси випливає, що $y^0 = y^0(u)$ — ослаблений розв'язок задачі (4.1)–(4.2), а отже $(u^0, y^0) \in \Xi$.

Залишилось показати, що (u^0, y^0) — оптимальна пара. Для цього розглянемо співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} I(u_k, y_k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y^*\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} + \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^1(\Omega,\delta)}$$

Урахувавши (4.7)–(4.8) і скориставшись теоремою 2.1, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y^*\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} \geq \left\|y^0 - y^*\right\|_{L^{N',\infty}(\Omega)}, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^1(\Omega,\delta)} = \left\|u^0\right\|_{L^1(\Omega,\delta)}. \tag{4.11}$$

Використавши (4.10)–(4.11), маємо:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} I(u_k, y_k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \geq \left\|y^0 - y^*\right\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} + \left\|u^0\right\|_{L^1(\Omega,\delta)}.$$

З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u_k, y_k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u_0, y_0).$$

Звідки випливає, що

$$I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y).$$

Таким чином, теорему доведено. □

Далі наведемо результат, який торкається єдиності розв'язку задачі (4.1)–(4.4).

Теорема 4.2. *Нехай для задачі* (4.1)–(4.4) *виконуються умови теореми 4.1. Якщо множина* $\mathbb{U}$ *опукла, то оптимальна пара для задачі* (4.1)–(4.4) *єдина.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай існує дві оптимальні пари задачі (4.1)–(4.4)

$$\left(u_i^0, y_i^0\right) \in \Xi, \quad i = 1, 2$$

такі, що

$$I\left(u_1^0, y_1^0\right) = I\left(u_2^0, y_2^0\right) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y). \tag{4.12}$$

У свою чергу,

$$\int_\Omega y_1^0 L^* \varphi \, dx = \int_\Omega (f + u_1^0)\varphi \, dx, \tag{4.13}$$

$$\int_\Omega y_2^0 L^*\varphi\,dx = \int_\Omega (f+u_2^0)\varphi\,dx. \tag{4.14}$$

.

Покладемо $u^* = \frac{u_1^0+u_2^0}{2}$, $\quad y^* = \frac{y_1^0+y_2^0}{2}$. Звідки випливає, що

$$(u^*,y^*) = \frac{1}{2}\left(\left(u_1^0,y_1^0\right)+\left(u_2^0,y_2^0\right)\right)$$

Тоді за нерівністю Ієнсена маємо, що $I\left(u^*,y^*\right) < \frac{1}{2}\left(I\left(u_1^0,y_1^0\right)+I\left(u_2^0,y_2^0\right)\right)$. Урахувавши (4.12), отримаємо: $I\left(u^*,y^*\right) < \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y)$, але це не можливо.

З іншого боку $(u^*,y^*)\in\Xi$. Справді, оскільки $\mathbb{U}$ опукла, то $u^*\in\mathbb{U}$. Далі помножимо (4.13) і (4.14) на 1/2, а потім додамо. В результаті отримаємо:

$$\int_\Omega y^* L^*\varphi\,dx = \int_\Omega (f+u^*)\varphi\,dx,$$

звідки випливає, що y^* — ослаблений розв'язок задачі (4.1)–(4.2). Отже, доходимо висновку: $(u^*,y^*)\in\Xi$, що і доводить хибність зроблених припущень. Теорему доведено. $\square$

5. Про існування оптимальних керувань на класі ослаблених розв'язків для некоректно поставлених задач

Тепер покажемо, що задачі оптимального керування мають суттєві відмінності від задач математичної фізики. А саме, вони можуть бути коректно поставленими (з точки зору їх розв'язності) для погано обумовлених систем. Справді, розглянемо наступну задачу:

$$I(u,y) = \|y-y^*\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega,\delta)} \to \inf, \tag{5.1}$$

$$Ly = u \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{5.2}$$

$$u\in\mathbb{U}, \tag{5.3}$$

де y^* — заданий елемент простору $L^{N',\infty}(\Omega)$, $\mathbb{U}$ — не порожня компактна опукла підмножина простору $L^1(\Omega,\delta)$, а функціонал $I(u,y)$ строго опуклий.

Зауважимо, що задача (5.2) є некоректно поставленою крайовою задачею, оскільки тут відсутні будь-які крайові умови. Отже, така задача допускає існування безлічі розв'язків.

Надалі через Ξ позначимо множину допустимих розв'язків задачі (5.1)–(5.3):

$$\Xi = \Big\{(u,y)\in L^1(\Omega,\delta)\times L^{N',\infty}(\Omega) :$$

$$\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap W^2(\Omega,|\cdot|_{N,1}) \quad \text{має місце} \int_\Omega yL^*\varphi\,dx = \int_\Omega u\varphi\,dx\Big\}.$$

Таким чином, задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таку пару $(u^0, y^0) \in \Xi$, на якій функціонал (5.1) досягає свого найменшого можливого значення.

Наведемо результат, який торкається існування та єдиності розв'язку задачі оптимального керування (5.1)–(5.3).

Теорема 5.1. *Задача* (5.1)–(5.3) *має єдиний розв'язок* $(u^0, y^0) \in L^1(\Omega, \delta) \times L^{N',\infty}(\Omega)$.

Доведення. Схема доведення теореми аналогічна доведенням теорем (4.1) і (4.2), окрім перевірки того факту, що множина Ξ не є порожньою, оскільки відповідна крайова задача некоректно поставлена. Отже, потрібно лише показати, що множина Ξ не є порожньою. Нехай $u \in \mathbb{U}$, а $y(x) \in L^{N',\infty}(\Omega)$. Тоді за теоремою 3.1 існує єдиний ослаблений розв'язок задачі:

$$Ly = u \quad \text{на} \quad \Omega, \quad y|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.4}$$

тобто має місце така інтегральна тотожність:

$$\int\limits_{\Omega} yL^*\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega} u\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega, |\cdot|_{N,1}).$$

Звідси випливає, що $(u, y) \in \Xi$, а, отже, Ξ не є порожньою.

□

6. Висковки

Залучаючи поняття ослабленого розв'язку у формі означення 3.1, отримали достатні умови розв'язності задачі (4.1)–(4.4) на класі ослаблених розв'язків з простору Лоренца. Крім цього показано, що задача оптимального керування є розв'язною для некоректно поставленої крайової задачі (5.2).

Бібліографічні посилання

1. *Rakotoson J. M.* On the differentiability of very weak solutions with right-hand side data integrable wiht respect to the distance to the boundary/ J. M. Rakotoson, J. I. Diaz // Journal of Functional Analysis. — 2009. — no. 257. — P. 807-831.
2. *Rakotoson J. M.* Rearrangement Relatif: un instrument d'estimation dans les problemes aux limites / J. M. Rakotoson. — Berlin: Springer-Verlag, 2008.
3. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейних операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М.: Наука, 1978.
4. *Когут П. І.* Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах / П. І. Когут, О. А. Рядно, О. П. Когут. — Дніпропетровськ : ДДФА, 2010.
5. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999.

Надійшла до редколегії 11.01.2012