ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 62–68

УДК 517, 519.6

Γ-ВЕРХНЯ ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

А. В. Довженко

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
49050, Дніпропетровськ. E-mail: anthony300787@gmail.com

Отримано зв'язок між верхньою Γ-границею векторнозначних відображень та нижньою границею їх надграфіків за Куратовським.

Ключові слова: Γ-збіжність, збіжність за Куратовським, надграфік, конадграфік, векторнозначна оптимізація.

1. Вступ

Значну роль у задачах скалярної оптимізації відіграє поняття Γ-збіжності функціоналів. Важливим для практичного застосування є зв'язок Γ-збіжності функціоналів зі збіжністю їх надграфіків за Куратовським. У праці [4] поняття Γ-збіжності функціоналів було розширене на випадок векторнозначних відображень та отримано зв'язок між нижньою Γ-границею векторнозначних відображень та верхньою границею їх конадграфіків за Куратовським. Метою даної роботи є отримання зв'язку між верхньою Γ-границею векторнозначних відображень та нижньою границею їх надграфіків за Куратовським.

2. Основні поняття та попередні результати

У статті розглянуто векторнозначні відображення, які діють у парі просторів (X, Y), де X — метризований лінійний топологічний простір, наділений топологією σ, а Y є евклідовим простором $\mathbb{R}^m$, який напівупорядковано конусом додатних елементів $\Lambda = \mathbb{R}^m_+$.

Зауваження 2.1. Конус додатних елементів $\Lambda = \mathbb{R}^m_+$, який розглянуто протягом даної роботи, є замкнутим, загостреним, опуклим, мініедральним, правильним та тілесним.

Означення 2.1. ([4, с. 28]) Будемо казати, що послідовність $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times \mathbb{R}^m$ μ-збігається в $X \times \mathbb{R}^m$ до пари (x_0, y_0), якщо $x_n \xrightarrow{\sigma} x_0$ в X, $y_n \to y_0$ в $\mathbb{R}^m$.

Означення 2.2. ([4, с. 28]) Множину $A \subset X \times \mathbb{R}^m$ називають μ-замкнутою, якщо вона є замкнутою в добутку топологій просторів X та $\mathbb{R}^m$.

Нехай $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність елементів $\mathbb{R}^m$. Множину всіх її часткових границь будемо позначати через $L\{y_n\}$. Отже, якщо $y\in L\{y_n\}$, то існує підпослідовність $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\{y_n\}_n$ така, що $y_{n_i}{\to}y$ при $i\to\infty$.

Для довільного відображення $f: X\to\mathbb{R}^m$ та фіксованої точки $x_0\in X$ введемо до розгляду множину:

$$L^\mu(f,x_0)=\bigcup_{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}(x_0)} L\{f(x_k)\}, \tag{2.1}$$

де через $\mathfrak{M}(x_0)$ позначено сукупність усіх послідовностей $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, які σ-збігаються до x_0.

Означення 2.3. ([4, с. 38]) Відображення $f: X\to\mathbb{R}^m$ називають локально компактним, якщо для довільного $x_0\in f$ існують такі компактна множина $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^m$ та окіл $\mathcal{U}_\sigma(x_0)$, що

$$f(x)\in\mathcal{M},\quad \forall\, x\in\mathcal{U}_\sigma(x_0).$$

Множина $L^\mu(f,x_0)$ має велике геометричне значення:

Твердження 2.1. ([4], с. 68) Для довільного локально компактного відображення $f: X\to\mathbb{R}^m$ справедливою є тотожність

$$\overset{\Lambda}{\inf} L^\mu(f,x)=\overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}}\ \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} f(z), \tag{2.2}$$

де $\mathcal{N}_\sigma(x)$ є множиною всіх σ-відкритих околів точки x.

Означення 2.4. ([3]) Відображення $f: X\to\mathbb{R}^m$ називають напівнеперервним знизу в точці $x_0\in X$, якщо для будь-якого околу $\mathcal{V}$ нуля в $\mathbb{R}^m$ існує окіл $\mathcal{U}$ точки x_0 в X такий, що

$$f(\mathcal{U})\subset f(x_0)+\mathcal{V}+\Lambda.$$

Нехай $f: X\to\mathbb{R}^m$ — довільне відображення, пов'яжемо із цим відображенням поняття його надграфіка

$$\mathrm{epi} f=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}^m\,|f(x)\preceq_\Lambda y\}, \tag{2.3}$$

та конадграфіка

$$\mathrm{coepi}\, f=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}^m\ |\ y\not\prec_\Lambda f(x)\}. \tag{2.4}$$

Відомим фактом, який демонструє зв'язок напівнеперервності відображення та замкнутості його надграфіка є те, що:

Твердження 2.2. ([2]) Із напівнеперервності знизу відображення $f: X\to Y$ випливає μ-замкнутість його надграфіка.

Розглянемо також поняття збіжності множин за Куратовським (K-збіжності). В контексті роботи буде зручним навести його в такій інтерпретації:

Означення 2.5. ([1, с. 92]) Нижньою K-границею послідовності множин $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ простору $(X\times\mathbb{R}^m,\mu)$ називають множину

$$K-\liminf_{n\to\infty} A_n = \mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{cl}_\mu A_k. \tag{2.5}$$

Означення 2.6. ([1, с. 92]) Верхньою K-границею послідовності множин $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ простору $(X\times\mathbb{R}^m,\mu)$ називають множину

$$K-\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_\mu \left(\bigcup_{k>n} A_k\right). \tag{2.6}$$

Означення 2.7. ([1], с. 92) Послідовність множин $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(X\times\mathbb{R}^m,\mu)$ K-збігається, якщо її нижня та верхня K-границі існують та збігаються між собою.

3. $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-збіжність векторнозначних відображень

У праці [4] було введено поняття $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-збіжності векторнозначних відображень та показано, що вона є природним розширенням Γ-збіжності функціоналів.

Означення 3.1. ([4, с. 90]) $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-нижня та $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-верхня границі послідовності відображень $\{f_n : X\to\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ відносно топології μ є відображеннями із X в $\mathbb{R}^m$, які визначаються за такими правилами:

$$\left(\Gamma^{\Lambda,\mu}-\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\inf_{m\geq n}} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \{f_m(z)\}, \tag{3.1}$$

$$\left(\Gamma^{\Lambda,\mu}-\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\sup_{m\geq n}} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \{f_m(z)\}. \tag{3.2}$$

Якщо існує відображення $f : X\to\mathbb{R}^m$, для якого верхня та нижня границі збігаються:

$$\Gamma^{\Lambda,\mu}-\liminf_{n\to\infty} f_n = f = \Gamma^{\Lambda,\mu}-\limsup_{n\to\infty} f_n,$$

то будемо позначати його як $f=\Gamma^{\Lambda,\mu}-\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, і казати, що відображення f є $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-границею послідовності $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в топології μ.

Для Γ-збіжності функціоналів відомим та важливим фактом є її зв'язок із K-збіжністю надграфіків цих функціоналів:

Теорема 3.1. *([6, с. 44]) Нехай задана послідовність функціоналів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Позначимо їх нижню та верхню Γ-границі як:*

$$f' = \Gamma\!-\liminf_{n\to\infty} f_n \quad f'' = \Gamma\!-\limsup_{n\to\infty} f_n$$

Тоді мають місце співвідношення

$$\mathrm{epi}\,(f') = K\!-\limsup_{n\to\infty}\ \mathrm{epi}\, f_n \tag{3.3}$$

$$\mathrm{epi}\,(f'') = K\!-\liminf_{n\to\infty}\ \mathrm{epi}\, f_n, \tag{3.4}$$

де K-границі взяті в топології $X\times\mathbb{R}$.

На жаль, пряме перенесення цього результату на випадок векторнозначних відображень є хибним, проте в публікації [4] було показано, що за певних обмежень існує інша тотожність, яка є еквівалентною до (3.3).

Означення 3.2. ([4, с. 106]) Послідовність відображень $\{f_n : X\to\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ є суттєво Λ-обмеженою зверху (знизу), якщо для довільного $x\in X$ існує елемент $y\in\mathbb{R}^m$, який $y\succeq_\Lambda f_n(x)$ $(y\preceq_\Lambda f_n(x))$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Якщо послідовність відображень $\{f_n : X\to\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ є суттєво обмеженою одночасно і зверху, і знизу, то кажуть, що вона є суттєво обмеженою.

Теорема 3.2. *([4, с. 107]) Нехай X є хаусдорфовим лінійним топологічним простором, який задовольняє першій аксіомі зліченності. Тоді для довільної суттєво Λ-обмеженої зверху послідовності локально компактних відображень $\{f_n : X\to\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ справедливою є тотожність*

$$K\!-\limsup_{n\to\infty}\Big(\mathrm{coepi}\, f_n\Big) = \mathrm{coepi}\,\Big(\Gamma^{\Lambda,\mu}\!-\liminf_{n\to\infty} f_n\Big). \tag{3.5}$$

4. Зв'язок між верхньою $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-границею відображень та нижньою K-границею їх надграфіків

Розглянемо низку допоміжних понять та результатів щодо властивостей надграфіків векторнозначних відображень.

Твердження 4.1. ([8, с. 49]) Нехай конус Λ є мініедральним та правильним, тоді довільна обмежена зверху за конусом послідовність $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^m$ має точну верхню грань.

Твердження 4.2. Для довільної суттєво обмеженої зверху за конусом Λ послідовності відображень $\{f_n : X\to\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ справедливою є тотожність

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\mathrm{epi}\, f_n = \mathrm{epi}\,\overline{f}, \quad \text{де}\ \ \overline{f}(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{n\in\mathbb{N}}} f_n(x). \tag{4.1}$$

Доведення. Нехай $(x,y) \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{epi} f_n$. Із цього випливає, що $y \succeq_\Lambda f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. В силу мініедральності і правильності конуса Λ (див. Твердження 4.1) та суттєвої обмеженості зверху послідовності $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для довільного $x \in X$ існує точна верхня грань послідовності $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тому, внаслідок означення точної верхньої грані, $y \succeq_\Lambda \overset{\Lambda}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}} f_n(x)$. Із цього випливає, що $(x,y) \in \operatorname{epi} \overline{f}$.

З іншого боку, нехай $(x,y) \in \operatorname{epi} \overline{f}$. Із цього випливає, що $y \succeq_\Lambda \overset{\Lambda}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}} f_n(x)$. Тобто $y \succeq_\Lambda f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. В силу цього, $(x,y) \in \operatorname{epi} f_n$, $\forall n \in N$. Тому $(x,y) \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{epi} f_n$, що завершує доведення. □

Твердження 4.3. ([4]) Нехай задана незростаюча послідовність суттєво обмежених напівнеперервних знизу відображень $\{f_n : X \to \mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$, тобто $f_n(x) \succeq_\Lambda f_{n+1}(x), \forall x \in X$. Тоді справедливим є співвідношення

$$\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{epi} f_n = \operatorname{epi} \widehat{f}, \quad \text{де} \quad \widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{4.2}$$

Також наведемо важливий результат, який пов'язує операції замикання надграфіка векторнозначного відображення та взяття конічної оболонки над ним.

Для цього розглянемо поняття конічної оболонки множини. В класичному випадку, коли множина належить до простору, який напівупорядковано конусом, конічна оболонка має наступне визначення:

Означення 4.1. ([7]) Будемо казати, що $\mathrm{cone}_\Lambda(A)$ є Λ-конічною оболонкою множини $A \subset \mathbb{R}^m$, якщо $\mathrm{cone}_\Lambda(A)$ є перетином всіх множин виду $y + \Lambda$ в $\mathbb{R}^m$, які включають A, тобто

$$\mathrm{cone}_\Lambda(A) = \bigcap_{y\in\mathbb{R}^m \,:\, A\subseteq(y+\Lambda)} (y + \Lambda)\,.$$

Добре відомо, що у випадку, коли конус Λ є мініедральним, конічну оболонку можна подати, як (див. [7, 8]) $\mathrm{cone}_\Lambda(A) = \overset{\Lambda}{\inf} A + \Lambda$. Проте, беручи до уваги той факт, що у статті розглянуто множини, які належать до добутку топологічних просторів $X \times \mathbb{R}^m$, лише один із яких напівупорядковано мініедральним конусом Λ, введемо наступне подання для Λ-конічної оболонки множин виду $A \subset X \times \mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{cone}_\Lambda(A) = \left\{ (x,y) \in X \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; y \succeq_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf} A|_x \right\}, \tag{4.3}$$

де A_x є перерізом множини A в точці x, а саме, $A|_x = \{(z,y) \in A | z = x\}$.

Твердження 4.4. ([5, с. 14]) Для довільного відображення $f : X \to \mathbb{R}^m$ має місце тотожність

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \, \mathrm{epi}\, f\right) = \mathrm{epi}\, g, \tag{4.4}$$

де $g(x) = \overset{\Lambda}{\inf} L^\mu(f, x) = \overset{\Lambda}{\sup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \overset{\Lambda}{\inf\limits_{z\in\mathcal{U}}} f(z)$.

За допомогою наведених раніше тверджень установимо головний результат роботи.

Теорема 4.1. *Для довільної суттєво обмеженої послідовності напівнеперервних знизу відображень $\{f_n : X \to \mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ справедливою є тотожність*

$$\mathrm{epi}\left(\Gamma^{\Lambda,\mu}\!-\limsup_{n\to\infty} f_n\right) = \mathrm{cone}_\Lambda\left(K - \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi}\, f_n\right). \tag{4.5}$$

Доведення. В силу означення нижньої границі послідовності множин

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(K - \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi}\, f_n\right) = \mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{cl}_\mu \, \mathrm{epi}\, f_k\right). \tag{4.6}$$

Відображення f_n є напівнеперервними знизу. Тому внаслідок того, що для таких відображень $\mathrm{epi}\, f_n = \mathrm{cl}_\mu\left(\mathrm{epi}\, f_n\right), \forall n \in \mathbb{N}$ (див. Твердження 2.2), правильною є тотожність

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{cl}_\mu \, \mathrm{epi}\, f_k\right) = \mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{epi}\, f_k\right). \tag{4.7}$$

В силу Твердження 4.2 тотожність (4.7) можна переписати як

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{epi}\, f_k\right) = \mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{epi}\, \overline{f}_n\right), \tag{4.8}$$

де $\overline{f}_n(x) = \overset{\Lambda}{\sup\limits_{k>n}} f_k(x)$. А в силу Твердження 4.3

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{epi}\, \overline{f}_n\right) = \mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{epi}\, g\right), \tag{4.9}$$

де $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Унаслідок Твердження 4.4

$$\mathrm{cone}_\Lambda\left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{cl}_\mu \, \mathrm{epi}\, f_k\right) = \mathrm{epi}\, g, \tag{4.10}$$

де $g(x) = \overset{\Lambda}{\sup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \overset{\Lambda}{\inf\limits_{z\in\mathcal{U}}} \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\sup\limits_{k>n}} f_k(z)$. Внаслідок того, що конус є мініедральним, для незростаючої послідовності $\{\overline{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(z) = \overset{\Lambda}{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}} \overline{f}_n(z)$. В силу цього

$$\overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\sup_{k>n}} f_k(z) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \overline{f}_n(z) = $$
$$= \overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \overset{\Lambda}{\sup_{k>n}} f_k(z). \tag{4.11}$$

Із (4.11) отримуємо, що

$$\mathrm{cone}_\Lambda \left(\mathrm{cl}_\mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k>n} \mathrm{cl}_\mu \,\mathrm{epi}\, f_k \right) = \mathrm{epi} \left(\overset{\Lambda}{\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_\sigma(x)}} \lim_{n\to\infty} \overset{\Lambda}{\inf_{z\in\mathcal{U}}} \overset{\Lambda}{\sup_{k>n}} f_k(z) \right) =$$
$$= \mathrm{epi} \left(\Gamma^{\Lambda,\mu} - \limsup_{n\to\infty} f_n \right),$$

що завершує доведення теореми. □

Отже, враховуючи результати теорем 3.2 та 4.1, у роботі отримали розширення результату теореми 3.1 щодо зв'язку між Γ-збіжністю скалярних відображень із K-збіжністю їх надграфіків, на випадок відображень, які діють у напівупорядкований конусом додатних елементів простір $\mathbb{R}^m$.

Бібліографічні посилання

1. *Attouch H.* Variational Convergence for Functions and Operators /H. Attouch// Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
2. *Borwein J. M.* Sandwichtheorems for semicontinuous operators /J. M. Borwein and M. Thera// Canad. Math. Bull, 1992, Vol. 35, N. 4/— P. 463-474.
3. *Combari C.* Sous-différentiel de fonctions convexes composées / C. Combari, M. Laghdir, L. et Thibault// *Ann. Sci. Math. Québec* Vol 18, N. 2, 1994.— P. 119–148.
4. *Dovzhenko A.* Gamma-convergence of vector-valued mappings and their lower semicontinuous regularization /A. Dovzhenko// DNU, 2012.
5. *Kogut P.* Epi and Coepi-Analysis of One Class of Vector-Valued Mappings /Anton V. Dovzhenko, Peter I. Kogut and Rosanna Manzo// Optimization.
6. *Maso Dal G.* An Introduction to Γ-Convergence / G. Dal Maso// Birkhäser, Boston, 1993.
7. *Балашов Е. С.* Элементы выпуклого и строго выпуклого анализа/ Е. С. Балашов, М. В. Половинкин// М. : Физматлит, 2004.
8. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский // М. : Физматгиз, 1962.— 396 с.

Надійшла до редколегії 01.04.2013