ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 98–106

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 532.5 + 523.9

ПРО СТІЙКІСТЬ І РЕЗОНАНСИ РУХІВ У ТОРОВИХ КІЛЬЦЯХ ПЛАНЕТАРНОГО ВИХОРУ

*В. І. Перехрест, **М. М. Осипчук, ***Л. В. Ключинська

* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 49050, Дніпропетровськ, E-mail: prokhrest@i.ua*

** *Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, 49050, Дніпропетровськ, E-mail: Nykolay1111@bigmir.net*

*** *Севастопольський інститут банківської справи*

Установлено стійкість колового руху на центральних колах вихрових кілець за першим наближенням та теорією систем Ляпунова; така стійкість є необхідною умовою можливості формування на цих колах твердих планет із пилу й газів планетарної туманності. Існування резонансних співвідношень між коловим та меридіональним рухами на торах може бути ключем для пояснення причин формування у вихрових кільцях супутників планет.

Ключові слова. планетарні системи, стійкість вихору, формування планет.

1. Вступ. Теорія планетарного вихору

Планетарним вихором було названо новий точний розв'язок сферично-осесиметричних гідродинамічних рівнянь Ейлера [1], що описує складну вихрову течію з низкою тороїдних вихрових кілець, які обертаються в один бік. Застосування цього розв'язку до проблеми утворення та еволюції зіркових планетарних систем, зокрема Сонячної, показало його ефективність у визначенні основних параметрів їх будови і руху, таких як: кутові швидкості та кутові моменти, закон планетних відстаней та ін. [2,3]. Ці дослідження привели до висновку, що у вихрових кільцях повинні формуватися тверді планети шляхом збирання часток пилу й газів на центральних колах цих кілець із подальшою акумуляцією та акрецією. Тому й постала задача про стійкість руху на колових траєкторіях вихрових кілець, яка є необхідною умовою такої подальшої їх еволюції.

Отже, у праці [1] отримано розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для функції течії $\Psi(\mathrm{r},\theta)$, неперервна частина якого у сферичних координатах (r,θ,φ) має форму

$$\Psi = C_2\left[\alpha y^2 + \left(\cos y - \frac{\sin y}{y}\right)\right]\sin^2\theta, \qquad (1.1)$$

де $y = C_0 r$ – безрозмірний сферичний радіус, C_0 – константа у формулі (1.2), C_2 – довільна стала. Тоді поле швидкостей вихрової течії у просторі має зображення [1]:

$$V_r = -\left(r^2 \sin\theta^{-1}\right) \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad V_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad V_\varphi = \frac{C_o\Psi}{r\sin\theta}, \tag{1.2}$$

а поле ліній течії цього вихору дається першим інтегралом вигляду $\Psi(r,\theta) =$ const або

$$\Phi(y) sin^2\theta = C, \tag{1.3}$$

де

$$\Phi = \left[\alpha y^2 + \left(\cos y - \frac{\sin y}{y}\right)\right] \tag{1.4}$$

– допоміжна функція радіальної координати.

Інтеграл (1.3) описує складну систему кільцевих вихорів, кілька з яких (n) лежать у замкнутих сферах, а низка зовнішніх кілець (m) вільно висять у просторі й обтікаються незамкнутими лініями течії; структури (n,m) вихорів визначаються параметром α у формулі (1.4) і були детально досліджені у [2].

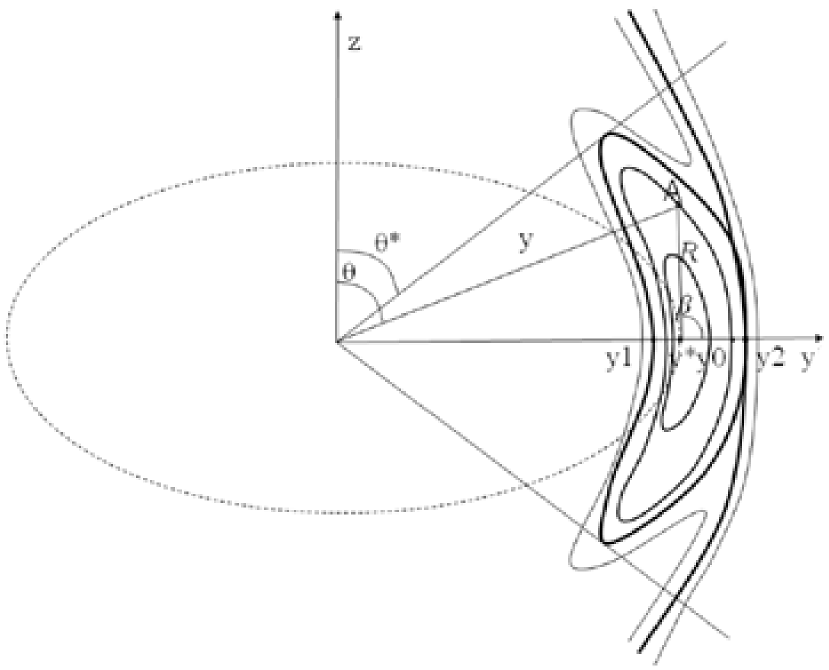

Рис. 1: Геометрія зовнішнього вихрового кільця

Центри тороїдних кілець та точки самоперетину сепаратрис є особливими точками векторного поля швидкостей (1.2), лежать на горизонтальній осі $\theta = \pi/2$ і мають радіальні координати, що є коренями рівняння

$$\Phi'(y) = 0, y = y_i, i = 1, 2, ...2m + n. \tag{1.5}$$

Кожному із зовнішніх вихрових кілець відповідають два послідовні корені з множини (1.5), вони чергуються і у межах одного кільця позначені як y^*– (центр) та y_2 – (точка самоперетину) (рис. 1). Там же через y_1 позначено найменший радіус зони кільця, а π-$2\theta^*$ – кутовий розмір цього кільця.

У таблиці 1, перший стовпчик, подано радіальні координати усіх 24 особливих точок вихору структури (2,11), якою ми моделювали первинний стан Сонячної системи [2, 3].

2. Рух на торах: стійкість та резонанси

Поле швидкостей (1.2) з урахуванням (1.1) і (1.4) запишемо у формі системи рівнянь руху:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dy}{dt} = -2B\tfrac{\Phi(y)}{y^2}\cos\theta \equiv X\,(y,\theta);\\ &\tfrac{d\theta}{dt} = B\,\tfrac{\Phi'(y)}{y^2}\sin\theta \equiv Y\,(y,\theta);\\ &\omega_\varphi \equiv \tfrac{d\varphi}{dt} = B\,\tfrac{\Phi(y)}{y^2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $B = C_2C_0^3$ – числовий параметр.

Система (2.1) є нелінійною динамічною системою 3-го порядку, автономною за часом і коловою координатою, та має аналітичний перший інтеграл (1.3). Підсистема перших двох рівнянь (2.1) є замкнутою й інтегрується окремо, але її другий інтеграл не обчислюється аналітично. Тому для встановлення стійкості руху в околі особливих точок y^* , y_2 побудуємо рівняння першого та другого наближень шляхом розвинення правих частин рівнянь (2.1) у ряди Тейлора в околі точок (y^*, $\theta = \pi/2$). Отже, покладемо

$$y = y^* + \xi, \quad \theta = \pi/2 + \eta \tag{2.2}$$

і після обчислення частинних похідних функцій $X(y,\theta)$, $Y(y,\theta)$ приходимо до лінійної системи рівнянь першого наближення у векторній формі

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\,\bar{x}, \qquad \bar{x} = \left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\|, \tag{2.3}$$

де

$$A = \left\| \begin{matrix} X'_y\,(y*,\theta*) & X'_\theta\,(y*,\theta*) \\ Y'_y\,(y*,\theta*) & Y'_\theta\,(y*,\theta*) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 2B\frac{\Phi(y*)}{y*^2} \\ B\frac{\Phi''(y*)}{y*^2} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{2.4}$$

– матриця системи. Характеристичне рівняння системи (2.3)

$$\det|A - \lambda E| = 0 \tag{2.5}$$

має два дійсні чи два уявні корені залежно від умов:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \Phi\,(y*)\,\Phi''\,(y*) > 0 \qquad \lambda = \pm\,\omega,\\ &(b) \qquad \Phi\,(y*)\,\Phi''\,(y*) < 0 \qquad \lambda = \pm i\omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де

$$\omega = \omega^* \sqrt{\frac{2\Phi''(y^*)}{\Phi(y^*)}}, \; a \quad \omega^* = B\frac{\Phi(y*)}{y*^2} \tag{2.7}$$

– частота обертання точок центрального кола $y = y^*$ (2.1).

Умови (2.6) було перевірено для вихору структури (2,11) і результати подано у таблиці 1. З неї видно, що у центрах вихрових кілець (виділених жирним шрифтом) виконується умова (2.6)b, а у точках самоперетину сепаратрис – умова (2.6)a. Можна довести, що така закономірність завжди матиме місце у центральних та сідлових точках будь-яких вихрових структур.

Таблиця 1: Параметри вихору структури (2,11), $\alpha = $-0,00655

№ кіл.	y_i	Φ(y)	Φ"(y)	Φ(y)·Φ"(y)	k
n = 1	2,79026114	-1,11325	0,776276	0,86418	1,180937
n = 2	6,03419312	0,77150	-0,96762	- 0,7465	1,583794
m =1	**9,44279805**	-1,58197	0,962446	-1,5226	1,103073
1c	12,32219138	-0,00457	-0,99002	0,0045	20,80949
m =2	**15,8543586**	-2,62652	0,959204	-2,5194	0,854635
2c	18,54971972	-1,28250	-0,97876	1,2553	1,235451
m =3	**22,2420960**	-4,19787	0,940542	-3,9483	**0,669406**
3c	24,76167868	-3,06949	-0,95663	2,9363	0,789491
m =4	**28,6239854**	-6,29415	0,91216	-5,7413	0,538371
4c	30,96568847	-5,36623	-0,92559	4,9669	0,587346
m =5	**35,0055354**	-8,91522	0,874383	-7,7953	0,442894
5c	37,16351818	-8,17268	-0,88553	7,2372	0,465516
m =6	**41,3897833**	-12,06129	0,826315	-9,9664	0,370161
6c	43,35502601	-11,48859	-0,83539	9,5975	0,381353
m =7	**47,7794284**	-15,73278	0,766178	-12,0541	0,312088
7c	49,53890086	-15,31351	-0,77334	11,8425	0,317806
m =8	**54,1779004**	-19,93033	0,690896	-13,7698	0,263308
8c	55,71246457	-19,64680	-0,69627	13,6794	0,266234
m =9	**60,5908648**	-24,65491	0,594771	-14,6640	0,219653
9c	61,87049552	-24,48747	-0,59845	14,6546	0,221085
m =10	**67,0306079**	-29,90817	0,465039	-13,9085	0,176346
10c	68,00098738	-29,83385	-0,46713	13,9363	0,176962
m =11	**73,5428141**	-35,69371	0,254537	-9,0854	0,119425
11c	74,05844132	-35,68237	-0,25512	9,1033	0,119581

Отже, за теоремами Ляпунова про стійкість точок спокою за першим наближенням висновуємо, що точки самоперетину сепаратрис y_2 є нестійкими сідловими точками незалежно від членів вищих порядків у рівняннях (2.1).

Навпаки, центри кілець y^* за першим наближенням є умовно стійкими точками типу «центр», але це є так званий «критичний випадок» теорії першого наближення [5], у якому члени вищих порядків у рівняннях (2.1) можуть суттєво впливати на характер стійкості руху в околі цих точок.

Тому були пораховані другі диференціали у розвиненні правих частин системи (2.1):

$$\begin{aligned} d^2X &= \left(\tfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)_* \xi^2 + 2\left(\tfrac{\partial^2 X}{\partial y \partial \theta}\right)_* \xi\eta + \left(\tfrac{\partial^2 X}{\partial \theta^2}\right)_* \eta^2; \\ d^2Y &= \left(\tfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)_* \xi^2 + 2\left(\tfrac{\partial^2 Y}{\partial y \partial \theta}\right)_* \xi\eta + \left(\tfrac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}\right)_* \eta^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

При обчисленні у (2.8) похідних за радіусом y враховувалась умова (1.5) та використовувалося диференціальне рівняння для функції $\Phi(y)$

$$\Phi'' = \left(\frac{2}{y^2} - 1\right)\Phi + \alpha\, y^2, \tag{2.9}$$

завдяки чому всі похідні вищих порядків вдалося виразити через $\Phi(y^*)$ та Ф"(y*).

Для зручності порівняння частот орбітального та меридіонального рухів уведена нова незалежна змінна:

$$\tau = \omega^* t \tag{2.10}$$

– кут повороту радіуса центрального кола.

Отримані таким чином рівняння другого наближення мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_1\eta + a_1\xi\eta; \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = b_2\xi + a_2\xi^2, \end{cases} \tag{2.11}$$

де

$$b_1 = 2, \qquad b_2 = \frac{\Phi''(y^*)}{\Phi(y^*)}\ , \qquad a_1 = -\frac{2}{y^*}, \qquad a_2 = -\frac{\alpha\, y^*}{\Phi(y^*)} - \frac{6}{y^{*3}} + \frac{2}{y^*}. \tag{2.12}$$

Далі будемо розглядати систему (2.9) за умови (2.6)b, тобто у околі центрів y^* вихрових кілець, для яких стійкість за першим наближенням не було встановлено. Очевидно, що з умови (2.6)b випливає $b_2 < 0$; при цьому $b_1 > 0$. За цих умов та за (2.6)b система рівнянь руху (2.9) є системою Ляпунова [4], і за теоремами Ляпунова для таких систем [5] тривіальний розв'язок є стійким, а рухи в околі точки (0,0) є періодичними з періодами, що залежать від початкового відхилення.

Періоди малих коливань частинок у меридіональній площині вихору відповідають частотам ω з (2.7). Частотний коефіцієнт

$$k = \frac{\omega}{\omega_*} = \sqrt{2\frac{\Phi''(y*)}{\Phi(y*)}} \tag{2.13}$$

виражає відношення частот коливань частинок у меридіональній площині до частоти орбітального руху по центральному колу кільця, – його значення наведено у таблиці 1 для усіх вихрових кілець структури (2,11).

Рівняння другого наближення (2.11) допускають інтегрування, і було отримано їх перший інтеграл в аналітичній формі. Він має вигляд:

$$-2\eta^2 + b_2\xi^2 = K_2, \tag{2.14}$$

де K_2 – довільна стала. Очевидно, що за умови (2.6)a $b_2 > 0$ і сімейство (2.14) є сімейством гіпербол, що оточують сідлові точки y_2 (рис. 2b). Такі точки завжди є нестійкими.

При виконанні умови (2.6)b $b_2 < 0$, і сімейство (2.14) є сімейством замкнутих еліптичних траєкторій (рис. 2a), рухи на яких є періодичними. Частоти малих коливань частинок вихору в околі центрів y^* даються формулою (2.7), а у змінній-кут τ – формулою (2.13).

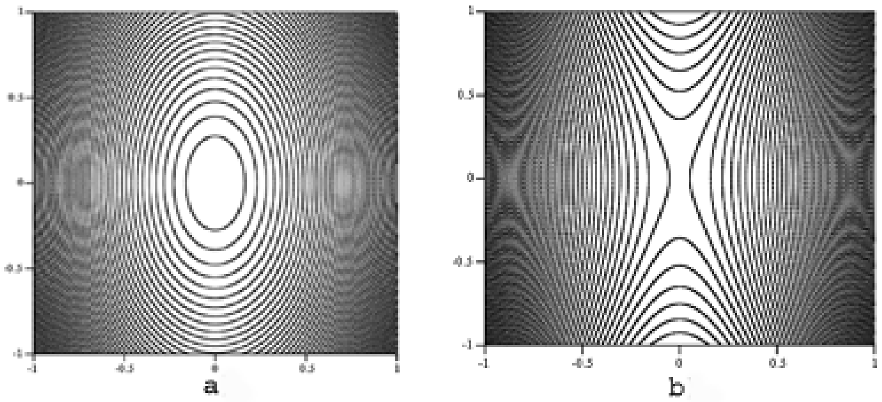

Рис. 2: а – траєкторії руху в околі стійких центрів кілець; б – траєкторії руху в околі нестійких сідлових точок

Для того, щоб точніше дослідити співвідношення між глобальними орбітальним та меридіональним рухами у кільцях, система (2.1) інтегрувалась чисельно методом Рунге – Кутта – Фельберга для 3-го кільця структури (2,11) на проміжку $0 \le \tau \le 6\pi$ (3 оберти по центральному колу). При цьому проміжок $y^* \le y \le y_2$ розбивався на 20 рівних частин, і точки розбиття (y_0, $\pi/2$) вибиралися як початкові точки задач Коші для системи (2.1) (рис. 3).

Результати чисельного інтегрування у глобальній області вихрового кільця добре корелюють із даними аналізу рухів в околі центрів кілець. У цілому, коливання точок у меридіональній площині «відстають» від орбітального обертання: так, при трьох обертах центрального кола $n_\tau = 3$ найбільше число обертів n_β у малому околі центрів відповідає відношенню $k_0 = n_\beta / n_\tau = 0,669406$, звідки $n_{\beta 0} = 2{,}0082$ (рис. 3). Зауважимо, що відношення частот дорівнює відношенню числа обертів, тобто $k = \omega/\omega^* = n_\beta/n_\tau$.

Далі, з числового аналізу бачимо, що число обертів навколо центра на торах при їх віддаленні від центра зменшується від указаного вище значення 2,0082 до значення, трохи меншого за 1, тобто $n_{\beta 2} \sim 1 - \epsilon$, відповідно $k_2 =$

$= 1/3-\epsilon$. Оскільки відношення k з (2.13) є неперервною функцією, а розв'язки рівнянь (2.1) також є неперервними функціями як змінної τ, так і початкових значень y_0 в області $y > 0$, то функція-відношення k є неперервною функцією y_0 і набуває усіх значень у межах

$$(1-\epsilon)/3 \leq k \leq 0,669406. \tag{2.15}$$

При цьому всі раціональні числа з проміжку (2.15) визначають умови резонансів меридіонального обертання по торах з орбітальним обертанням центрів кіл. Як найпростіші з таких відношень вкажемо на множину раціональних чисел, укладену в інтервал (2.15):

$$k^* = \left\{\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{12},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{3}\right\}. \tag{2.16}$$

Справді, у праці [7] було виділено резонанс порядку 2/3, для якого знайдено і «резонансний» радіус y_{res}= 22,54925 , що лежить в околі центра y^*= 22,2421 третього вихрового кільця вихору (2,11), (рис. 3).

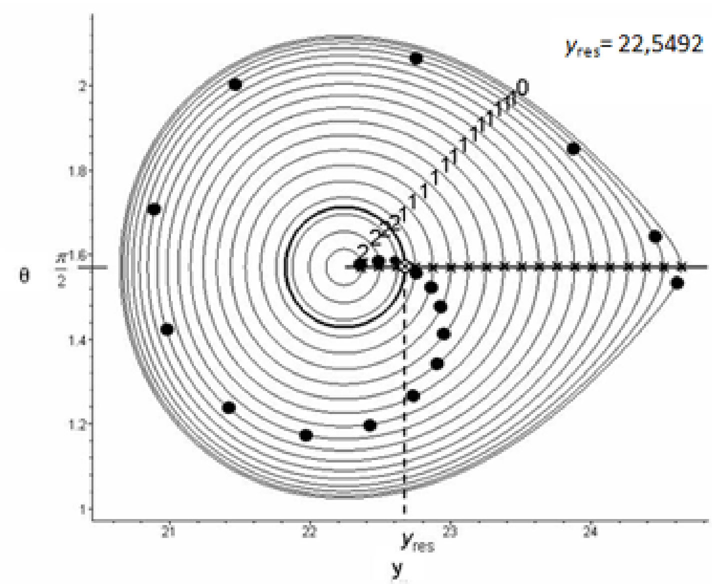

Рис. 3: Число повних обертів на торах 3-го кільця за час $\tau = 6\pi$ (3 оберти центра)

Для повної резонансності руху на торах планетарного вихору необхідно, щоб і коловий рух частинок вихору на резонансному торі з (2.16) після цілого числа обертів $n\tau$ (знаменники у (2.16)) здійснив ціле число обертів n_φ і привів точку в початкове положення. Звернемось до третього рівняння руху (2.1), перетвореного до змінної τ:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega_\varphi}{\omega*} = \frac{\Phi\,(y)}{\Phi\,(y*)} \left(\frac{y*}{y}\right)^2. \tag{2.17}$$

Оскільки функція (2.17) є неперервною на проміжку $y_1 \leq y \leq y_2$, а з рівняння (1.3) для обмежного тора кільця випливає, що $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$, то величина $k_\varphi(y) = \omega_\varphi(y)/\omega^* = n_\varphi/n_\tau$ на проміжних торах змінюється у межах

$$\left(\frac{y^*}{y_2}\right)^2 \leq \; k_\varphi\,(y) \leq \left(\frac{y^*}{y_1}\right)^2, \tag{2.18}$$

що для третього кільця дає:

$$0,8055453 \leq k_\varphi(y) \leq 1,599936, \tag{2.19}$$

причому $k_\varphi(y^*) = 1$. Відповідно, на внутрішніх торах кільця, що проходять через точки y_0 та y_{01}, для яких $\Phi(y_0) = \Phi(y_{01})$, проміжок значень величини $k_\varphi(y)$ звужується до інтервалу $(y^*/y_0)^2 \leq k_\varphi(y) \leq (y^*/y_{01})^2$, який знову буде околом значення $k_\varphi(y*) = 1$. Тому можна припустити, що при інтегруванні рівняння (2.17) за теоремою Лагранжа про середнє значення матимемо

$$(k_\varphi)_{сер} = \frac{1}{2\pi} B^* \int_0^{2\pi} \frac{\Phi\,(y)}{y^2} d\tau \approx 1, \qquad B^* = \frac{y^{*2}}{\Phi\,(y^*)}. \tag{2.20}$$

За умови точної рівності в інтегралі (2.20) будь-який з резонансних режимів (2.16) буде повністю резонансним, тобто рухома точка, що виходить із початкового положення y_0 на горизонтальній осі (рис. 1), повернеться у це ж положення після цілого числа обертів як по тору, так і по колу.

Таблиця 2: Чисельне інтегрування системи (2.1)

τ	y_0	θ_0	φ_0	$y(\tau)$	$\theta(\tau) - \theta_0$	$\varphi(\tau)$	$k_{сер}$
2π	**22,515638**	$\pi/2$	0	y_0–0,40095	0,07924	$2\pi+4{\cdot}10^{-12}$	1
	22,871991	$\pi/2$	0	y_0–0,96037	0,16806	2π–0,09345	0,9851
	23,501887	$\pi/2$	0	y_0–2,20778	0,18798	2π–0,49647	0,9209
	24,131783	$\pi/2$	0	y_0–3,23024	–0,19532	2π–1,09763	0,8253
	24,761678	$\pi/2$	0	$y_0+2{\cdot}10^{-8}$	10^{-8}	2π–2,57631	0,5899
4π	**22,515638**	$\pi/2$	0	y_0–0,38915	–0,08128	$4\pi-4{\cdot}10^{-11}$	1
	22,871991	$\pi/2$	0	y_0–0,68941	–0,20082	4π–0,37620	0,9700
	23,501887	$\pi/2$	0	y_0–0,26935	–0,22057	4π–1,25052	0,9004
	24,131783	$\pi/2$	0	y_0–0,10527	0,13066	4π–1,90999	0,8480
	24,761678	$\pi/2$	0	$y_0-3{,}8{\cdot}10^{-7}$	$-1{,}5{\cdot}10^{-7}$	4π–5,15262	0,5899
6π	**22,515638**	$\pi/2$	0	$y_0-2{,}7{\cdot}10^{-4}$	0,00012	$6\pi-3{\cdot}10^{-10}$	1
	22,871991	$\pi/2$	0	y_0–0,05173	0,07856	6π–0,39688	0,9789
	23,501887	$\pi/2$	0	y_0–1,27794	0,37472	6π–1,42729	0,9242
	24,131783	$\pi/2$	0	y_0–2,40125	–0,46883	6π–3,38603	0,8203
	24,761678	$\pi/2$	0	$y_0-6{,}8{\cdot}10^{-6}$	$-2{,}7{\cdot}10^{-6}$	6π–7,72893	0,5899

Інтеграл (2.20) було обчислено при чисельному інтегруванні системи (2.1) на проміжку $\tau \in [0,\ 2\pi];[0,\ 4\pi];[0,\ 6\pi]$, для кількох положень початкової точки y_0, у тому числі й для резонансного радіуса порядку 2 : 3 (табл. 2). Із таблиці видно, що припущення (2.20) для усіх внутрішніх тороїдів не справджується, але існують окремі резонансні тори або близькі до резонансних. Зокрема, тор із меридіональним резонансом порядку 2 : 3 є і повністю резонансним, причому коловий резонанс має порядок 1 : 1 і виконується на кожному оберті центра кільця.

Але якщо резонансне співвідношення між орбітальним рухом центра і меридіональним рухом на торі є точним для певного «резонансного» радіуса, то умова повного резонансу цього тороїда виконується наближено, але з високою точністю.

3. Висновки

Таким чином, доведено, що рух по центральному колу кожного вихрового кільця планетарного вихору є стійким, а сідлові точки самоперетину сепаратрис є нестійкими.

Це дозволило дослідити існування резонансних траєкторій як в околах центральних кіл, так і у всьому об'ємі вихрового кільця; існування таких траєкторій у всій області вихрових кілець досліджувалося у попередній доповіді [6] та статті [7] авторів.

Бібліографічні посилання

1. *Перехрест В. І.* Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій/ В. І. Перехрест, Р. В. Іванов// Вісник ДНУ. – 2002. – Механіка. Вип. 6, т. 1. – С. 60 – 64.
2. *Перехрест В. І.* Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання/ В. І. Перехрест, М. М. Осипчук// Вісник ДНУ. – 2010. – Механіка. Вип. 14, т. 18, № 5. – С. 110 – 118.
3. *Перехрест В. І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем// Вісник ДНУ. – 2011. – Механіка. Вип 15, т. 1. – С. 21 – 33.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М. : Наука, 1969. – 380 с.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М. : Наука, 1966. – 530 с.
6. *Перехрест В. І.* Резонансні режими руху на торах планетарного вихору/ В. І. Перехрест, М. М. Осипчук// Тез. докл. 10-й Крымской Междунар. мат. школы MFL-2010, Алушта – Симферополь, 2010. – 112 с.
7. *Осипчук М. М.* Резонанси в динамічній системі на торах планетарного вихору/ М. М. Осипчук, В. І. Перехрест// Вісник ДНУ. – 2010. – Моделювання. Вип. 2, № 8. – С. 97 – 105.

Надійшла до редколегії 20.01.2013