

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТОВ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Т. С. Зеленская*, А. В. Сясев**

* *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Днепропетровск, E-mail: tanuzese@yandex.ru*

** *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Днепропетровск, E-mail: syasev@i.ua*

Построена и обоснована уточненная математическая модель многоканатной подъемной установки. Исследованы динамические процессы, возникающие в главном канате, в целях повышения прочности и долговечности подъемных и уравнивающих канатов. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: напряжение, волновое уравнение, уравнивающий канат.

1. Введение

В работе рассмотрено математическое моделирование динамики подъемной установки и исследование процессов в многоканатных ветвях. Канаты различных грузоподъемных машин работают в режимах нестационарных нагрузок, которые вызывают продольные колебания. Механизмы, осуществляющие вертикальные перемещения грузов с помощью канатов, достаточно часто используются в инженерии. В качестве примеров можно привести подъемники лифтов или устройства для подъема клетей или копий в шахтах. При конструировании такого рода механизмов большое внимание уделяется обеспечению безопасности и безаварийной работы, особенно в устройствах для перевозки людей. Поэтому проблемам продольных упругих колебаний канатов и методам расчета их динамической прочности посвящено большое количество работ. Однако общей характерной особенностью этих исследований является тот факт, что в них рассматривались только канаты постоянной длины, а фактическое изменение длины каната учитывалось только косвенно [2]. Подобная неточность в исходной постановке задачи приводила к необходимости вводить повышенные значения коэффициентов запаса прочности. Следствием такого подхода была значительная загруженность конструкции и повышение расхода энергии на единицу перемещаемого груза. Применение этих методов показывает, что характер движения волн в средах переменной длины имеет специфические особенности и существенно отличается от

характера движения волн в средах с неподвижными границами. Особенно это различие проявляется при отражении волн от подвижной границы. Основываясь на этом, можно утверждать, что постановка и решение краевых задач, учитывающих математически точно изменение границ области интегрирования уравнения динамического состояния канатов, позволит получить более близкие к реальной картине результаты распространения волн, а также динамического распределения поля напряжений в канатах, а следовательно, сделать более точный расчет параметров прочности каната [1].

Для решения начально-краевых задач при исследовании волновых процессов в стальных тросах (канатах) в исследовательских институтах применяют алгоритм, основанный на использовании явной схемы метода конечных разностей. Производные по пространственной и временной координатах заменяют центрально-разностными аппроксимациями. Однако с усовершенствованием стационарных подъемных установок и появлением мобильных подъемных установок возникла необходимость в дополнительном исследовании режимов напряжения в области наматывания каната на барабан [3] и получении зависимостей между скоростными показателями и волновыми перемещениями, отраженными от подвижного конца. Поэтому и параметры динамических отклонений в зависимости от характера отраженных и остаточных волн могут принимать предельные значения, которые приводят к быстрому износу подъемной установки. Следовательно, для предупреждения возможных нарушений в работе стационарной системы будем использовать математические модели, основой которых является комбинация волнового и телеграфного уравнений. Такого рода модели позволяют учесть реально существующее сопротивление среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этим сопротивлением.

2. Физическая интерпретация

Рассмотрим варианты постановки краевых задач для канатных механизмов, осуществляющих вертикальное перемещение грузов. Для исследования колебательных процессов в канатах шахтной установки принимаем следующие допущения: главные и уравнивающие канаты будем рассматривать как упругие стальные нити переменной длины; канаты каждой ветви представим одним эквивалентным канатом с сечением и жесткостью, равной сумме сечений и жесткостей отдельных канатов ветви; продольные колебания уравновешенных канатов не передаются из одной ветки в другую через петлю канатов; считаем, что в результате деформации каната все его точки в поперечном сечении получают одни и те же продольные колебания; пренебрегаем влиянием дуги скольжения в точке наматывания каната на шкив на процессы в канатах.

3. Построение математической модели

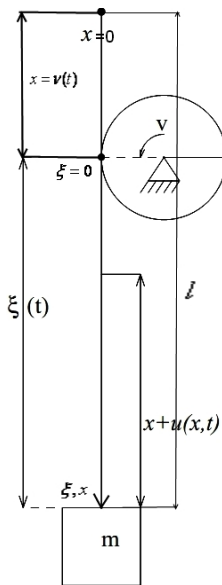


Рис. 1. Схема подъема головного каната

Для аналитического и числового вычисления показателей воздействия отраженных и остаточных волн рассмотрим начально-краевую задачу для волнового и телеграфного уравнений. Исследования продольных колебаний главного стального каната переменной длины приводят к решению одномерного волнового уравнения на интервале с переменной границей. Изменение во времени длины каната вызвано силой, действующей в верхнем сечении каната, в точке соприкосновения с барабаном (рис. 1). Представление уравнения движения каната в форме волнового уравнения с начально-краевыми условиями первого рода и смешанного типа приводит к использованию модифицированного метода продолжения и отражения, поскольку позволяет учесть характер отраженных и остаточных волн от подвижного конца. Из этого следует, что можно изучать показатели напряжений в различных сечениях каната в определенный момент времени и наблюдать поведение кривой напряжений за весь период работы системы.

С учетом того, что канат подвешен вертикально, его начальная длина ($t = 0$) равна l . Средний радиус намотки каната на шкив равен R . Ось x направлена вниз вдоль каната. За начало координат $x = 0$ примем точку соприкосновения каната со шкивом. На нижнем конце головного каната подвешен груз массой m . Площадь произвольного поперечного сечения равна s ; $\omega(t)$ — угловая скорость намотки; $\beta(t)$ — угловое ускорение. Учитывая параметры намотки каната на барабан, функцию перемещения каната в точке его контакта со шкивом намотки представим в виде

$$\nu(t) = R \int_0^t \int_0^s \beta(\tau) d\tau ds + R\omega(0)t + \nu(0). \quad (3.1)$$

Под абсолютным движением системы как твердого тела будем понимать движение всех точек системы, кроме $\xi = 0$. Под относительным движением будем понимать движение всех точек системы, включая поперечное сечение каната, в котором расположена точка $\xi = 0$. С системой в относительном движении свяжем ось x , направленную вертикально вниз, начало которой при $t = 0$ совпадает с точкой $\xi = 0$. Таким образом, относительное движение состоит из перемещения начала координат оси ξ , которое изменяет длину каната. Функцию перемещения точки $\xi = 0$ описываем уравнением (3.1). В итоге только часть каната на интервале $\nu(t) < x < t$ находится под действием статического и динамического напряжений. Учитывая сказанное выше и результаты, полученные в работах [4, 5], рассмотрим следующую начально-

краевую задачу в относительной системе координат для однородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

причем, $u(x, t)$ — решение начально-краевой задачи об упругих перемещениях точек каната в относительном движении.

Согласно модифицированному методу продолжения решение уравнения (3.2) будем искать в виде суперпозиции следующих трех функций:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Функции $u_i(x, t)$ на интервале $\nu(t) < x < l$, $t > 0$ должны удовлетворять волновому уравнению (3.2).

Функция $u_1(x, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \quad (3.3)$$

и однородным краевым условиям

$$u(\nu(t), t) = 0; \quad u_x(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Тогда функцию $u_1(x, t)$, с учетом (3.4) и (3.3), представим следующим выражением:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy + M(T_0(x - at)) + \\ & + M(T_0(2l - (x + at))) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(x - at)))))) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(2l - (x - at))))))), \end{aligned}$$

где Φ та Ψ — продолжения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно на всю ось x .

Функция $u_2(x, t)$ будет удовлетворять однородным начальным условиям

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l$$

и краевым условиям

$$u(\nu(t), t) = 0; \quad u_x(l, t) = \gamma \left(-R\beta(t) + \frac{\partial^2 u_1(l, t)}{\partial t^2} \right) H(t), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

где $\gamma = \frac{m}{ES}$, H — функция Хэвисайда. В данном случае функцию Хэвисайда учитываем в момент появления ускорения $\beta(t)$ катушки каната на шкив.

Тогда функцию $u_2(x, t)$ представим в виде

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) = & \int_l^{x+at} \Lambda \left(\frac{\xi - l}{a} \right) d\xi - \int_l^{\nu(T_0(x-at)) + aT_0(x-at)} \Lambda \left(\frac{\xi - l}{a} \right) d\xi - \\
 & - \int_l^{\nu(T_0(2l-(x+at))) + aT_0(2l-(x+at))} \Lambda \left(\frac{\xi - l}{a} \right) d\xi + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_l^{\nu(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(x-at)))))) + aT_0(\omega(\omega(\dots(\omega(x-at))))))} \Lambda \left(\frac{\xi - l}{a} \right) d\xi + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_l^{\nu(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(2l-(x+at)))))) + aT_0(\omega(\omega(\dots(\omega(2l-(x+at))))))} \Lambda \left(\frac{\xi - l}{a} \right) d\xi.
 \end{aligned}$$

Продолжение модифицированным методом представим через выражение

$$\beta = \gamma \left(-R\beta(t) + \frac{\partial^2 u_1(l, t)}{\partial t^2} \right) H(t). \quad (3.6)$$

Функция Λ является продолжением выражения (3.6) на всю ось t :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \beta(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция $u_3(x, t)$ должна удовлетворять следующим начальным и краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (3.7)$$

$$u(\nu(t), t) = \mu(t); \quad u_x(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.8)$$

Продолжение краевого условия $\mu(t) = u(\nu(t), t)$ на всю ось t принимаем в виде

$$\begin{aligned}
 M(t) = & \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \\
 u_3(x, t) = & M(T_0(x-at)) + M(T_0(2l-(at))) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(x-at)))))) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M(T_0(\omega(\omega(\dots(\omega(2l-(x+at))))))),
 \end{aligned}$$

где, $\omega(y) = 2l - 2aT_0(y) - y$.

При этом функция $u_3(x, t)$ должна удовлетворять такому равенству:

$$u_3(x, t) = M(T_0(x - at)).$$

Рассмотрим случай двухканатной подъемной установки (один головной канат) со сконцентрированной нагрузкой на головном канате, когда конечный груз в виде нагруженного подъемного сосуда полностью влияет на головной канат и таким образом определяет основную долю формирующего тягового усилия.

На участке намотанного на барабан каната имеем свойства телеграфного уравнения. Поэтому целесообразным будет применение такой краевой задачи. В области $0 < x - x_n < l; \quad t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0, \quad (3.9)$$

которое удовлетворяет начальным и краевым условиям:

$$u(x, t_n) = 0; \quad u_t(x, t_n) = 0; \quad 0 < x - x_n < l, \quad (3.10)$$

$$u(x_n, t) = q(t - t_n); \quad u(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (3.11)$$

В уравнении (3.9) C, B, D — константы. Итак, продолжение функции $q(t)$ на всю ось t строим аналогичным образом:

$$Q(t - t_n) = \begin{cases} q(t - t_n), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases}$$

Тогда решение поставленной краевой задачи можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(\psi_{mn}) \times \right. \\ & \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) - \\ & - ae^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(\psi) - c \frac{x-x_n}{\psi} J_1(\psi) \right] \times \\ & \left. \times e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^n (-1)^i Q_i(\eta) d\eta \right\} - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} Q_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right), \quad (3.12) \end{aligned}$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно;

$$\psi = \sqrt{c[l^2 - a^2((t - t_n - \eta))^2]};$$

константу c находим из следующего соотношения:

$$c = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}.$$

Решение (3.12) удовлетворяет телеграфному уравнению (3.9), начальным условиям (3.10) и краевым условиям (3.11).

4. Числовая апробация результатов

Основное влияние на динамические усилия в упругих элементах подъемной установки в режиме пуска оказывают изменения во внешней силовой работе, в частности в механических характеристиках двигателя. Так, характер динамических рывков в режиме стабильных показателей скорости и торможения такой же, как и для подъемной установки в холостом режиме. В этих режимах не наблюдается значительных колебательных процессов. В режиме торможения динамические усилия в канате достигают максимальных значений в первый период предохранительного торможения, то есть до остановки ведущего шкива. В результате численного исследования получены данные о величине максимальных деформаций и напряжений, возникающих в канате.

Полученные значения первых частот продольных колебаний головного каната и продольных колебаний хвостового каната (с учетом переменной длины канатов) позволяют сделать следующие выводы: на первую частоту определяющее влияние оказывают продольные колебания; вторая частота продольных колебаний каната переменной длины обусловлена в основном рывками шкива под действием груза. На рис. 2 изображена производственная скорость намотки головного каната на барабан как сглаженная функция.

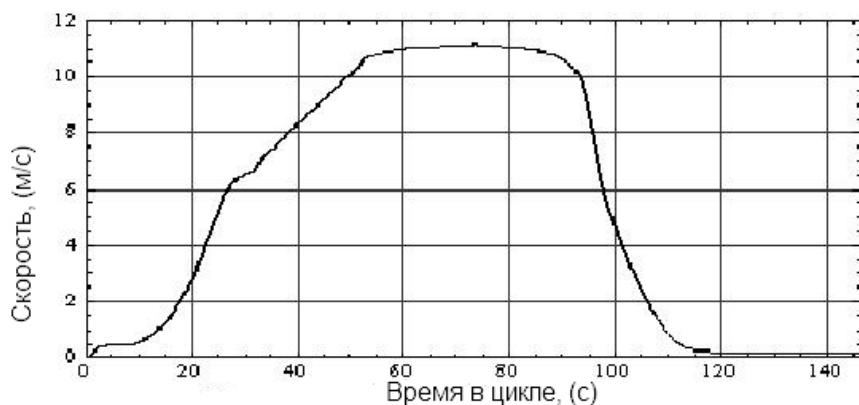


Рис. 2. Скорость намотки каната на барабан

Теоретические расчеты, представляющие функцию скорости шестигранной трапецией, не дают возможности отразить реальную картину изменения скорости в цикле.

Полученные результаты для значений частотных колебаний позволяют оценить динамическую прочность канатов и выяснить причину возникновения резонанса в режимах динамических нагрузок.

На рис. 3 приведена сравнительная характеристика результатов теоретических расчетов -1, и числово-практических исследований -2 с учетом продольных остаточных волн от подвижного конца главного каната.

Расчет напряжений по всей длине каната показал, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в подъемных канатах нагруженной ветви в верхнем крайнем положении струны в стволе, а наименьшие — в нагруженной ветви каната при крайнем нижнем положении груза.

Общая картина распределения напряжений показывает, что рассеянность напряжений по длине каната увеличивается по мере уменьшения длины каната.

С использованием исходных данных подъемной машины типа МК 5х4-16К были определены усилия в головном канате в точке подвеса груза и в точке наматывания каната на барабан для равномерного вращения барабана.

Получена также числовая оценка результирующего запаса прочности головного каната, который оказался на 8% меньше, чем статический запас прочности.

Применив модифицированный метод продолжения для определения динамических напряжений в сечениях каната в каждый момент времени работы системы по трапецеидальной тахограмме, удалось получить формулу в аналитическом виде для определения волнового перемещения фиксированных точек головного каната в соответствии с производственными показателями.

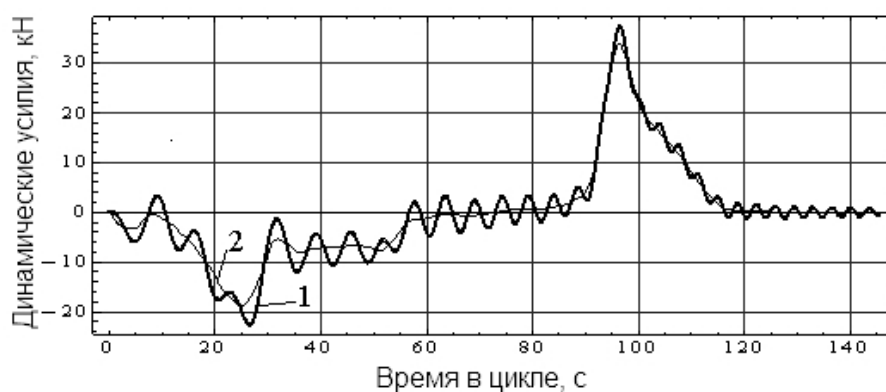


Рис. 3. Напряжения в головном канате

Проверочный расчет запаса прочности подъемных головных канатов многоканатной подъемной машины представлен в табл. 1.

№ головного каната	Разрывное усилие (теор. показатели), кН	Разрывное усилие (практ. показатели), кН	Относительная погрешность, %
44243-05	50,12	49,15	1,97
44244-05	52,98	50,03	5,89
44242-05	49,78	46,11	7,95
44245-05	48,82	47,54	2,69

5. Выводы

Полученные в работе результаты могут быть использованы в дальнейшем для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчета динамических характеристик канатов шахтных установок как на стадии их проектирования, так и в условиях реальной эксплуатации. Применение модифицированного метода продолжения показало, что характер движения волн в средах переменной длины имеет специфические особенности и существенно отличается от характера движения волн в средах с неподвижными границами. Форма решения в точности соответствует природе распространения волн в канате при нагрузке на нижнем конце головного каната. Проведенный практический анализ для исследуемого метода показал, что при данных статически-динамических напряжениях в головных и уравнивающих канатах результирующий запас слабо зависит от глубины подъема, довольно медленно увеличиваясь с глубиной. Телеграфное уравнение позволило учесть реально существующее сопротивление и выяснить характер затухания волн, вызванного динамическими сопротивлениями.

Библиографические ссылки

1. *Воеводин В. В.* Численные методы в прикладном пакете sage / В. В. Воеводин.— Спб. : БХВ-Петербург, 2011. —257 с.
2. *Ильин С. Р.* Влияние параметров скорости подъема и эксцентриситета груза на динамику системы "сосуд-армировка" шахтных стволов / С. Р. Ильин // Сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины. —2012. —Вып. 98. — С. 322–348.
3. *Коряшкіна Л. С.* Чисельні методи/ Л. С. Коряшкіна, М. М. Одновоп— Дніпропетровськ : ДГУ, 2010. —219 с.
4. *Razdolsky A. G.* Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length / A. G. Razdolsky // International journal of solids and structures.— 2011. — P.316–323.
5. *Fritzkowski P. T.* Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members / P. T. Fritzkowski // Computational Mechanics.—2011. —№ 12. — P.473–480.

Надійшла до редколегії 19.01.2014