ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2014. Вип. 6, № 8. С. 159–171

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.977.56

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С. О. Горбонос*, П. І. Когут**

**Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: gorbonos.so@gmail.com*

***Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Встановлено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами із залученням концепції узагальненої правої похідної за напрямом та поняття квазіспряженого стану.

Ключові слова: задача оптимального керування, функціонал Лагранжа, узагальнена права похідна за напрямом, квазіспряжений оператор, необхідні умови оптимальності.

1. Вступ

Розглянуто задачу оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами. Характерна особливість даного класу задач полягає в тому, що матриця потоку є кососиметрична, а її коефіцієнти належать до простору L^2. За таких умов не можна отримати необхідні умови оптимальності, застосувавши класичні результати Йоффе і Тихомирова [1]. Тому метою даної роботи було встановити необхідні умови оптимальності для поставленої задачі керування, залучаючи концепцію узагальненої правої похідної за напрямом та поняття квазіспряженого стану [3].

2. Постановка задачі та попердні означення

Об'єктом дослідження виступає така задача оптимального керування:

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0,T] \tag{2.1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \quad \partial y/\partial \nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{2.2}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{2.3}$$

$$I(u,y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \to \inf, \tag{2.4}$$

де $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$; $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$; $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ — кососиметрична матриця, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$ і $a_{ii} = 0$.

Нехай $1 \leqslant p < \infty$, далі через $L^p([0,T],V)$ будемо позначати множину всіх вимірних функцій $u : [0,T] \to V$ таких, що

$$\|u\|_{L^p([0,T],V)} = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{1/p} < \infty,$$

тут інтеграл наведено в сенсі Бохнера [4]. У випадку, коли $p = \infty$, маємо

$$\|u\|_{L^\infty([0,T],V)} = \operatorname{ess} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_V < \infty.$$

Оскільки $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$, то матриця $I + A(x)$ породжена необмеженою білінійною формою на $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$, з огляду на це введемо до розгляду множину.

Означення 2.1. Будемо казати, що елемент $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ належить до множини D, якщо

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt \right| \leqslant c(y) \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} \tag{2.5}$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, де $c(y)$ — стала, яка залежить від y.

Далі введемо до розгляду форму

$$[y,\varphi] = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt \ \ \forall y \in D, \forall \varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega)) \tag{2.6}$$

і означимо білінійну форму $[y,\varphi]$ для всіх $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ за правилом

$$[y,\varphi] = \lim_{\varepsilon \to \infty} [y,\varphi_\varepsilon], \tag{2.7}$$

де $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ і $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ сильно в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Означення 2.2. [2] Допустимою парою задачі оптимального керування (2.1)-(2.4) будемо називати пару (u,y), якщо $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $y \in D$ і пара (u,y) задовольняє енергетичну рівність

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega y_t \varphi \, dx \, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y + A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f\varphi \, dx \, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Далі Ξ — це множина всіх допустимих пар задачі (2.1)-(2.4).

3. Поняття узагальненої правої похідної за напрямом та її властивості

Розглянемо функціонал Лагранжа і введемо поняття узагальненої правої похідної за напрямом для задачі (2.1)-(2.4).

Нехай $F(A,y) = y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y)$, тоді функціонал Лагранжа матиме вигляд

$$L(u,y,\lambda,\varphi) = \lambda I(u,y) + \langle F(A,y),\varphi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} - \langle f,\varphi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}, \quad (3.1)$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ і

$$\langle F(A,y),\varphi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} = \int_0^T\int_\Omega y_t\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi,\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Gamma_2} u\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt.$$

Беручи до уваги зауваження 3.1 [2], отримаємо, що функціонал (3.1) може бути продовжений для всіх $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ за правилом (2.7). У результаті для кожного $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ продовжений функціонал $\widehat{L}$: $L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ матиме такий вигляд:

$$\widehat{L}(u,y,\lambda,p) = \lambda I(u,y) + \int_0^T\int_\Omega y_t p\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla p,\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt + [y,p] - \langle f,p\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} - \int_0^T\int_{\Gamma_2} u\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt. \quad (3.2)$$

Звідси, оскільки білінійна форма $\int_0^T\int_\Omega (\nabla p, A(x)\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt$ необмежена, то продовження функціоналу Лагранжа $\widehat{L}(u,y,\lambda,p)$ не є диференційовним за Гато. Крім того, не можна навіть стверджувати, що відображення $y \to \widehat{L}(u,y,\lambda,p)$ має праву похідну за напрямом h

$$D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h) = \lim_{\theta\to+0}\frac{\widehat{L}(u,y+\theta h,\lambda,p) - \widehat{L}(u,y,\lambda,p)}{\theta}.$$

Дійсно, для заданого $h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $\theta \in [0,1]$ не можна стверджувати, що $y+\theta h \in D$, оскільки структура D невідома, навіть якщо величина θ достатньо мала.

Враховуючи, що множина допустимих розв'язків поставленої задачі Ξ складається з пар $(u,y) \in \Xi$ таких, що $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$, то відображення $y \mapsto F(A,y)$ не є неперервно диференційовне в околі y. Це говорить про те, що не можна застосувати добре відомі результати Йоффе і Тихомирова, щоб отримати необхідні умови оптимальності [1]. Отже, враховуючи вищесказане, наведемо таку концепцію.

Означення 3.1. [3] Будемо казати, що відображення $y \mapsto \widehat{L}(u,y,\lambda,p)$ має узагальнену праву похідну за напрямом $h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ у точці $(u,y,\lambda,p) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, якщо праву похідну за гладким напрямом $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ можна неперервно продовжити для $\varphi = h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, тобто

$$D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h) = \lim_{\varepsilon\to 0} D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,\varphi_\varepsilon)$$

для будь-яких $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ таких, що:

$$\varphi_\varepsilon \to h \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$(\varphi_\varepsilon)_t' \to (h)_t' \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Тепер застосуємо цю концепцію до функціоналу Лагранжа $\widehat{L}(u,y,\lambda,p)$.

Лема 3.1. *Нехай задано четвірку* $(u,y,\lambda,p) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *таку, що* $p \in D$, *тоді для кожного напряму* h *простору* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *узагальнена права похідна за напрямом* $D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)$ *існує і має вигляд*

$$D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h) = 2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y-y_d)h\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega h_t' p\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla p,\nabla h)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - [p,h]. \quad (3.3)$$

Доведення. Нехай для заданої четвірки (u,y,λ,p) і для $\varepsilon>0$ послідовність функцій $\{\varphi_\varepsilon\} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ є така, що

$$\varphi_\varepsilon \to h \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$(\varphi_\varepsilon)_t' \to (h)_t' \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
D_y^+ \widehat{L}(u,y,\lambda,p,\varphi_\varepsilon) &= \lim_{\theta\to+0} \frac{\widehat{L}(u,y+\theta\varphi_\varepsilon,\lambda,p) - \widehat{L}(u,y,\lambda,p)}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to+0} \frac{1}{\theta} \Big\{ \lambda\|y+\theta\varphi_\varepsilon - y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \lambda\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \\
&+ \int_0^T \int_\Omega (y+\theta\varphi_\varepsilon)'_t p\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla(y+\theta\varphi_\varepsilon))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \\
&+[y+\theta\varphi_\varepsilon,\psi_\delta] - \langle f,p\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \int_0^T \int_{\Gamma_2} up\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \\
&-\lambda\|y-y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \lambda\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} - \int_0^T \int_\Omega y_t p\,dx\,dt \\
&-[y,p] + \langle f,p\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \int_0^T \int_{\Gamma_2} up\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \Big\} \\
&= 2\lambda \int_0^T \int_\Omega (y-y_d)\varphi_\varepsilon\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega (\varphi_\varepsilon)'_t p\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla\varphi_\varepsilon)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt + J,
\end{aligned}
$$

де

$$
J = \lim_{\theta\to+0} \frac{\lim_{\delta\to0}[y+\theta\varphi_\varepsilon,\psi_\delta] - [y,p]}{\theta}, \tag{3.4}
$$

$$
[y+\theta\varphi_\varepsilon,\psi_\delta] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla\psi_\delta, A(x)\nabla(y+\theta\varphi_\varepsilon))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt, \tag{3.5}
$$

$$
[y,p] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, A(x)\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \tag{3.6}
$$

для будь-яких $\{\psi_\delta\}_{\delta>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ таких, що

$$
\psi_\delta \to p \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).
$$

Оскільки $y \in D$ і

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \int_\Omega (\nabla\psi_\delta, A(x)\nabla\varphi_\varepsilon)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \right| \\
&\le \|\varphi_\varepsilon\|_{C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))} \|A(x)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{S}^N)} \|\psi_\delta\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to0}[y+\theta\varphi_\varepsilon,\psi_\delta] &= [y,p] + \theta \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, A(x)\nabla\varphi_\varepsilon)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \\
&= [y,p] - \theta \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

З вищенаведеного випливає, що

$$D_y^+ \widehat{L}(u,y,\lambda,p,\varphi_\varepsilon) = 2\lambda \int_0^T \int_\Omega (y-y_d)\varphi_\varepsilon \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega (\varphi_\varepsilon)_t' p \, dx\, dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla \varphi_\varepsilon)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega (\nabla \varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt \quad (3.7)$$

для будь-яких $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ таких, що

$$\varphi_\varepsilon \to h \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$(\varphi_\varepsilon)_t' \to (h)_t' \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Оскільки $p \in D$, то

$$|[p,\varphi_\varepsilon]| := \left| \int_0^T \int_\Omega (\nabla \varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt \right| \le c(p) \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (3.8)$$

Отже, права похідна за напрямом $D_y^+ \widehat{L}(u,y,\lambda,p,\varphi_\varepsilon)$ має неперервне продовження для $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Крім того, якщо перейти в (3.7) до границі коли $\varepsilon \to 0$, то отримаємо (3.3). □

Наслідок 3.1. *Подання* (3.3) *для узагальненої правої похідної за напрямом* $D_y^+ \widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)$ *має місце для елементів* $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *таких, що* $y \notin D$.

Доведення. Дійсно, у цьому випадку маємо

$$\widehat{L}(u,y,\lambda,p) = \lambda I(u,y) + \int_0^T \int_\Omega y_t p \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt$$
$$- \lim_{\delta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (\nabla \psi_\delta, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt - \langle f, p\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$
$$- \int_0^T \int_{\Gamma_2} up \, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt = \lambda I(u,y) + \int_0^T \int_\Omega y_t p \, dx\, dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt - [p,y] - \langle f, p\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$
$$- \int_0^T \int_{\Gamma_2} up \, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt$$

для будь-якої послідовності $\{\psi_\delta\}_{\delta>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ такої, що

$$\psi_\delta \to y \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$(\psi_\delta)_t' \to (y)_t' \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Очевидно, що (3.4)-(3.6) матимуть такий вигляд:

$$J = \lim_{\theta\to+0} \frac{\lim_{\delta\to 0}[\psi_\delta + \theta\varphi_\varepsilon, p] + [p,y]}{\theta}, \quad (3.9)$$

$$[\psi_\delta+\theta\varphi_\varepsilon,p]=\int_0^T\int_\Omega(\nabla p, A(x)\nabla(\psi_\delta+\theta\varphi_\varepsilon))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt$$
$$=-\int_0^T\int_\Omega(\nabla(\psi_\delta+\theta\varphi_\varepsilon), A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt, \quad (3.10)$$

$$[p,y]=\lim_{\delta\to 0}\int_0^T\int_\Omega(\nabla\psi_\delta, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \quad (3.11)$$

для будь-яких $\{\psi_\delta\}_{\delta>0}\subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ таких, що $\psi_\delta\to p$ сильно в просторі $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Оскільки $p\in D$, то отримаємо

$$\lim_{\delta\to 0}[\psi_\delta+\theta\varphi_\varepsilon,p]=-[p,y]-\theta\int_0^T\int_\Omega(\nabla\varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt$$

Далі повторюємо доведення, як і в лемі 3.1. □

Наслідок 3.2. *Нехай задано четвірку* $(u,y,\lambda,p)\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times D\times\mathbb{R}_+\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. *Припустимо, що* $\nabla p\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$, *а отже,* $p\in D$. *Тоді узагальнена права похідна за напрямом* $D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)$ *існує для кожного напряму* $h\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *і має такий вигляд:*

$$D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)=2\lambda\int_0^T\int_\Omega(y-y_d)h\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega h_t'p\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega(\nabla p,\nabla h)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt-\int_0^T\int_\Omega(\nabla h, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt. \quad (3.12)$$

Доведення. Оскільки $\nabla p\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$, то (3.8) можна подати у вигляді

$$|[p,\varphi_\varepsilon]|:=\left|\int_0^T\int_\Omega(\nabla\varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt\right|$$
$$\le\|\nabla p\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|A\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)}\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Звідси $p\in D$. Крім того, з леми 3.1 випливає існуванння узагальненої правої похідної за напрямом $D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)$. Слід відзначити, що для заданого p має місце $A\nabla p\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, а отже, перейшовши до границі в (3.7), отримаємо

$$[p,h]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega(\nabla\varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega(\nabla h, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt.$$

□

Наслідок 3.3. *Якщо в наслідкові 3.2 замість умови* $\nabla p\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$ *розглянути умови*

$$A(x)\in L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega;\mathbb{S}^N),\nabla p\in L^2(0,T;L^{2+\gamma}(\Omega)) \quad (3.13)$$

для деякого $\gamma \in (0;\infty]$, *тоді легко переконаємося, що виконуються припущення наслідка 3.2.*

Доведення. З попереднього наслідка випливає, що достатньо показати $p \in D$. Дійсно, оскільки

$$|[p,h]| := \left|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi_\varepsilon, A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt\right|$$
$$\leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\left(\int_0^T\int_\Omega \|\nabla p\|^2_{\mathbb{R}^N}\|A\|^2_{\mathbb{S}^N}\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

то, застосувавши нерівність Гельдера для $r = (\gamma+2)/2$ і $q = 1+2/q$, отримаємо

$$\int_0^T\int_\Omega \|\nabla p\|^2_{\mathbb{R}^N}\|A\|^2_{\mathbb{S}^N}\,dx\,dt \leq \int_0^T \left(\int_\Omega \|A\|^{2+\frac{4}{\gamma}}_{\mathbb{S}^N}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{2+\gamma}}$$
$$\left(\int_\Omega \|\nabla p\|^{2+\gamma}_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{\frac{2}{2+\gamma}}\,dt \leq \int_0^T \|A\|^2_{L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega;\mathbb{S}^N)}\|\nabla p\|^2_{L^{2+\gamma}(\Omega)}\,dt$$
$$= \|A\|^2_{L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega;\mathbb{S}^N)}\|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;L^{2+\gamma}(\Omega))} < +\infty.$$

Отже, $p \in D$. Таким чином, наслідок доведено. □

З вищенаведеного випливає такий результат:

Лема 3.2. *Нехай* $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *— задані розподілення. Якщо*

$$\nabla p \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega)) \tag{3.14}$$

$$\text{або } A(x) \in L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega;\mathbb{S}^N), \nabla p \in L^2(0,T;L^{2+\gamma}(\Omega))$$

для деякого $\gamma \in (0;\infty]$, *тоді відображення простору* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ $v \longmapsto \widehat{L}(u,y,\lambda,p,h) \in \mathbb{R}$ *є диференційовний за Гато і диференціал Гато має вигляд*

$$\langle D_y\widehat{L}(u,y,\lambda,p),h\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h)$$

для будь-якого $h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Доведення. Нехай задано $(u,y,\lambda,p) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. З наслідків 3.2-3.3 виходить, що $p \in D$, а з леми 3.1 — що величина $[y+\theta h, p]$ означена для всіх $h \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. У свою чергу, з (3.14) випливає (3.12), а отже,

$$D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,h) = -D_y^+\widehat{L}(u,y,\lambda,p,-h)$$

для всіх $h \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Таким чином, відображення диференційовне за Гато. □

Тепер наведемо необхідний у подальшому результат.

Лема 3.3. *Нехай* $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *— задані розподілення. Нехай виконується умова* (3.14). *Тоді існує додатна величина* $\varepsilon \in [0,1]$ *така, що*

$$
\begin{aligned}
&\widehat{L}(u,v,\lambda,p) - \widehat{L}(u,y,\lambda,p)\\
&\qquad = \langle D_y\widehat{L}(u,y+\varepsilon(v-y),\lambda,p), v-y\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\quad = 2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y+\varepsilon(v-y)-y_d)(v-y)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (v-y)_t' p\,dx\,dt\\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega (\nabla p, \nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega (\nabla(v-y), A(x)\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt. \quad (3.15)
\end{aligned}
$$

4. Необхідні умови оптимальності

Наразі піде мова про необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування (2.1)-(2.4), але спочатку введемо необхідне в подальшому поняття квазіспряженого оператора.

Означення 4.1. [3] Нехай $u_\theta \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ — допустиме керування і нехай ε_θ — задана величина, а y_θ — слабкий розв'язок задачі (2.1)-(2.3). Нехай $(u_0,y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (2.1)-(2.4). Розподілення ψ_θ будемо називати квазіспряженим станом до $y_0 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ для фіксованих $\theta \in [0,1]$, $\varepsilon_\theta \in [0,1]$, якщо ψ_θ задовольняє тотожність

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla\psi_\theta)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega (\psi_\theta)_t'\varphi\,dx\,dt\\
&\qquad\qquad = -2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y_0-y_d)\varphi\,dx\,dt, \quad (4.1)
\end{aligned}
$$

де $u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u}-u_0)$, $y_\theta = y_0 - \varepsilon_\theta(y(u_\theta)-y_0)$. Тут $\widehat{u} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ — довільне допустиме керування.

Відзначимо, що для вищеозначеного оператора має місце такий результат:

Твердження 4.1. Нехай $(u_0,y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (2.1)-(2.4), а $(u_\theta, y(u_\theta))$ — допустима пара цієї ж задачі. Тоді для заданого $\theta \in [0,1]$ і $\varepsilon_\theta \in [0,1]$, ψ_ε — квазіспряжений оператор до $y_0 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, якщо $\psi_\theta \in D$ і є слабким розв'язком початково-крайової задачі:

$$
\begin{cases}
-(\psi_\theta)_y' - \operatorname{div}(I-A)\nabla\psi_\theta + 2\lambda(y_0-y_d) = 0\\
\psi_\theta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\times[0,T]\\
\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\nu_{I-A}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2\times[0,T]\\
\psi_\theta(T,0) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega.
\end{cases} \quad (4.2)
$$

Перед тим як перейти до необхідних умов оптимальності, припустимо, що виконуються такі гіпотези:

(I) Нехай $(u_0, y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (2.1)-(2.4); $\widehat{u}$ — довільне допустиме керуванняі $u_\theta = u_0+\theta(\widehat{u}-u_0)$ для кожного $\theta \in [0,1]$. Тоді існує послідовність відповідних розв'язків крайової задачі (2.1)-(2.3) $y_\theta := y(u_\theta) = \{y(u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0))\}_{\theta\to 0}$, яка є така, що

$$y_\theta \rightharpoonup y(u_0) \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

коли $\theta \to 0$ і $y \in D$ для достатньо малих θ.

(II) Нехай $(u_0, y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (2.1)-(2.4), $\widehat{u}$ — довільне допустиме керуванняі $u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0)$ для будь-якого $\theta \in [0,1]$. Тоді для кожного $\theta \in [0,1]$, $\varepsilon_\theta \in [0,1]$ існує $\gamma \in (0,\infty]$:

$$\nabla\psi_\theta \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega)) \tag{4.3}$$

$$\text{або } A(x) \in L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega;\mathbb{S}^N), \nabla\psi_\theta \in L^2(0,T;L^{2+\gamma}(\Omega))$$

і послідовність квазіспряжених операторів $\{\psi_\theta\}_{\theta\to 0}$ є відносно компактна в сильній топології простору $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Теорема 4.1. *Нехай* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *— задані розподілення і* (u_0, y_0) *— оптимальна пара задачі* (2.1)-(2.4)*. Тоді виконання гіпотез (I)-(II) означає існування елементів* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *і* $\bar\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *таких, що* λ *і* $\bar\psi$ *одночасно не дорівнюють 0 і*

$$\int_0^T\int_\Omega (y_0)'_t\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y_0 + A\nabla y_0)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt =$$
$$= \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Gamma_2} u_0\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt, \tag{4.4}$$

$$\int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla\bar\psi + A\nabla\bar\psi)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega (\bar\psi)'_t\varphi\,dx\,dt =$$
$$= -2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y_0 - y_d)\varphi\,dx\,dt, \quad \forall\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega)) \tag{4.5}$$

$$\int_0^T\int_{\Gamma_2} (\widehat{u} - u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \geq \int_0^T\int_{\Gamma_2} (\widehat{u} - u_0)\bar\psi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt. \tag{4.6}$$

Доведення. Нехай $(\widehat{u}, \widehat{y}) \in \Xi$ — допустима пара вихідної задачі, тоді покладемо

$$u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0),$$

де $\theta \in [0,1]$, очевидно, що $u_\theta \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ і $u_\theta \to u_0$. Нехай $y_\theta := y(u_\theta) = y(u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0))$ — розв'язок задачі (2.1)-(2.3). Тоді (II) означає, що

$$(u_\theta, y_\theta) \xrightarrow{\tau} (u_0, y_0), \tag{4.7}$$

коли $\theta \to 0$. Далі розглянемо рівність

$$\begin{aligned}\triangle\widehat{L} = \widehat{L}(u_\theta, y_\theta, \lambda, p) - \widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p) = \widehat{L}(u_\theta, y_\theta, \lambda, p)\\ - \widehat{L}(u_\theta, y_0, \lambda, p) + \widehat{L}(u_\theta, y_0, \lambda, p) - \widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p)\\ = \triangle_y\widehat{L}(u_\theta, y_\theta, \lambda, p) + \triangle_A\widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p) \geq 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

для будь-яких $\theta \in [0,1]$ і $(\lambda, p) \in \mathbb{R}_+ \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Врахувавши подання (3.1)-(3.2), отримаємо

$$\begin{aligned}&\triangle_A\widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p) = \widehat{L}(u_\theta, y_0, \lambda, p) - \widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\Big[\widehat{L}(u_\theta, y_0, \lambda, \varphi_\delta) - \widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, \varphi_\delta)\Big] = \lambda\theta^2\|\widehat{u} - u_0\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}\\ &+ 2\lambda\theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u} - u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt - \theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u} - u_0)p\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt\end{aligned} \tag{4.9}$$

для будь-якої послідовності $\{\varphi_\delta\}_{\delta>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ такої, що $\varphi_\delta \to p$ в просторі $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Тепер розглянемо $\triangle_y\widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p)$ і припустимо, що p належить до простору $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і задовольняє (3.14). Тоді за лемою 3.2 існує додатна величина $\varepsilon_\theta \in [0,1]$ така, що

$$\begin{aligned}&\triangle_y\widehat{L}(u_0, y_0, \lambda, p) = \widehat{L}(u_\theta, y_\theta, \lambda, p) - \widehat{L}(u_\theta, y_0, \lambda, p)\\ &= \langle D_y\widehat{L}(u_\theta, y_0 + \varepsilon_\theta(y_\theta - y_0), \lambda, p), y_\theta - y_0\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\ &= 2\lambda\int_0^T\int_\Omega(y_0 + \varepsilon_\theta(y_\theta - y_0) - y_d)(y_\theta - y_0)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega(y_\theta - y_0)'_t p\,dx\,dt\\ &+ \int_\Omega(\nabla p, \nabla(y_\theta - y_0))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_\Omega(\nabla(y_\theta - y_0), A\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Таким чином, враховуючи (4.9) і (4.10), беручи до уваги властивість (3.14) і лему 3.3, перепишемо рівність (4.8) таким чином:

$$\triangle\widehat{L} = 2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y_0+\varepsilon_\theta(y_\theta-y_0)-y_d)(y_\theta-y_0)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (y_\theta-y_0)'_t p\,dx\,dt$$
$$+\int_\Omega (\nabla p, \nabla(y_\theta-y_0))_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_\Omega (\nabla(y_\theta-y_0), A\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt$$
$$+\lambda\theta^2\|\widehat{u}-u_0\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} + 2\lambda\theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt$$
$$-\theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)p\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt. \quad (4.11)$$

Враховуючи (4.3), означимо елемент p в (4.11) як квазіспряжений оператор до стану $y_0 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, тобто покладемо $p=\psi_\theta$, де ψ_θ задовольняє таку рівність:

$$\int_0^T\int_\Omega \varphi'_t\psi_\theta\,dx\,dt + \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla p - A\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt$$
$$= \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla p - A\nabla p)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega \varphi(\psi_\theta)'_t\,dx\,dt$$
$$= 2\lambda\int_0^T\int_\Omega (y_0+\varepsilon_\theta(y_\theta-y_0)-y_d)\varphi\,dx\,dt, \quad (4.12)$$

де $\varphi = y_\theta - y_0$. Таким чином,

$$\frac{\triangle\widehat{L}}{\theta} = \frac{\widehat{L}(u_\theta,y_\theta,\lambda,\psi_\theta)-\widehat{L}(u_0,y_0,\lambda,\psi_\theta)}{\theta} = \lambda\theta\|\widehat{u}-u_0\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}$$
$$+2\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt - \int_0^T\int_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)\psi_\theta\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \ge 0, \quad (4.13)$$

тут $\widehat{u} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$.

Залишилось перейти до границі в (4.12) і (4.13), для цього відзначимо, що

$$u_\theta \to u_0, \quad \text{коли} \quad \theta \to 0,$$
$$y_\theta \to y_0 \quad \text{в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$\text{існує } \overline{\psi} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)): \ \psi_\theta \to \overline{\psi} \quad \text{в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Тоді

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\triangle\widehat{L}}{\theta} = 2\lambda\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)\overline{\psi}\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \geq 0.$$

Звідси випливає, що

$$2\lambda\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \geq \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_2}(\widehat{u}-u_0)\overline{\psi}\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt.$$

Отже, якщо в (4.12) перейти до границі за $\theta \to 0$, то отримаємо (4.5), що і потрібно було встановити. □

Бібліографічні посилання

1. *Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров — М.: Наука, 1974. — 479 с.
2. *Горбонос С. О.* Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами / Горбонос С.О., Когут П.І. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання. – 2013. – Вип. 5. – С. 69–83.
3. *Horsin T.* Optimal L^2-Control Problem in Coefficients for a Linear Elliptic Equation / T. Horsin, P. Kogut, submitted to Mathematical Control and Related Fields, 2013, 1-60. (arXiv:1306.2513)
4. *Salsa S.* Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory / S. Salsa — Milan: Springer-Verlag, 2008. — 556 p.

Надійшла до редколегії 23.01.2014