ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2014. Вип. 6, № 8. С. 121–136

УДК 517.9

ЗАДАЧІ АПРІОРНОГО СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

І. Г. Баланенко, П. І. Когут

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ,
E-mail: balanenko-ig@rambler.ru, p.kogut@i.ua

Досліджено один клас задач оптимального керування для виродженого параболічного рівняння з крайовими умовами Діріхле на межі області та з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку. Показано, що для таких задач існують оптимальні розв'язки у вагових просторах Соболєва за умови компактності операторів, які формують обернений зв'язок.

Ключові слова: оптимальне керування, нерівність Харді – Пуанкаре, параболічне рівняння, апріорний синтез.

1. Вступ

Основним об'єктом досліджень виступає задача оптимального керування виродженим параболічним рівнянням

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}\, (\rho(x)\nabla y) = f(t,x) + p(t,x)$$

з крайовими умовами Діріхле на межі області за умови, що є апріорі задана структура керування у формі оберненого зв'язку

$$p(t,x) = \sum_{j=1}^{M} u_j(t)\mathcal{M}_j(y),$$

де $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)\right)^*$ — лінійні неперервні оператори, а функції $u = [u_1,\dots,u_M]^T \in L^2(0,T)^M$ підлягають визначенню.

Характерною рисою вироджених параболічних рівнянь та пов'язаних із ними початково-крайових задач є та обставина, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ (див., напр., [3, 7]). Той факт, що функція ρ може бути необмеженою на області Ω чи досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, означає, що диференціальний оператор $\operatorname{div}\,(\rho(x)\nabla)$ втрачає властивість коерцитивності та неперервності на

$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Як наслідок, наведені задачі можуть успадковувати неєдиність слабких розв'язків та інші ефекти, притаманні некоректним задачам математичної фізики.

Як відомо (див., напр., [1, 2]), базовим у теорії початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь є поняття вагового простору Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$. Оскільки простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є в загальному випадку щільний у $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$, то ця обставина породжує суттєві труднощі в обгрунтуванні проблеми єдиності слабких розв'язків таких задач та отриманні відповідних апріорних оцінок для них. У зв'язку з цим автори показують, що таке обгрунтування стає можливим, якщо вагову функцію $\rho=\rho(x)$ наділити певними додатковими властивостями, що не виводять її з класу необмежених та вироджених на Ω функцій. Такою умовою є приналежність ρ до класу функцій потенціального типу. В результаті, залучивши нерівність типу Харді – Пуанкаре та умови компактності для операторів $\mathcal{M}_j$, стало можливим установити, що задача апріорного синтезу оптимального керування для вихідного виродженого параболічного рівняння має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболєва. Для цього розв'язку отримано та обгрунтовано апріорні оцінки.

Окрім цього, у роботі розглянуто геометричне узагальнення задачі оптимального керування з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку, яке полягає в тому, що оператори $\mathcal{M}_j$ обираються у вигляді

$$\mathcal{M}_j(\phi)=c\sqrt{\rho(x)}\int_{B(b_j,r)}\phi(s)\sqrt{\rho}(s)\,ds,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx),$$

де центри b_j "позиціювання" куль $B(b_j,r)$ вважають невідомими і вони підлягають визначенню. Показано, що така задача має розв'язок за умови, що примежовий шар множини Ω є недопустимий для вибору точок b_j.

2. Основні позначення та факти

Нехай $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 3)$ — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$. Нехай $Q=(0,T)\times\Omega$ є циліндром в $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^N$, де $T<+\infty$. Через $\Sigma=(0,T)\times\partial\Omega$ позначимо його бокову поверхню. Нехай $H_0^1(\Omega)$ є простором Соболєва, який утворено замиканням множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega|\nabla y(x)|^2_{\mathbb{R}^N}\;dx\right)^{1/2}.$$

Нехай є заданою функція $\rho:\Omega\to\mathbb{R}$ така, що: $\rho(x)>0$ майже скрізь (м.с.) на Ω,

$$\rho\in L^1(\Omega),\ \rho^{-1}\in L^1(\Omega),\ \nabla|\ln\rho|\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)\ \text{ і }\ \rho+\rho^{-1}\notin L^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Надалі будемо пов'язувати з функцією ρ такі вагові простори $L^2(\Omega, \rho\, dx)$, $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ та $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$, де через $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ позначено ваговий простір Соболєва, утворений елементами з $W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких є скінченна норма

$$\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} := \left(\int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx\right)^{1/2}.$$

Означення 2.1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо

(i) $\rho > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$;

(ii) існує підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) \geqslant \delta > 0$,

$$\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*}) \quad \text{і} \quad \rho(x) \geqslant \sigma \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_* \quad \text{за деякого} \quad \sigma > 0; \tag{2.2}$$

(iii) існують сталі $C > 0$, $\lambda < \lambda_* := (N-2)^2/4$ та система внутрішніх точок $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_K^*\}$ множини Ω) такі, що

$$-C \leqslant V(x) \leqslant \frac{2\lambda}{K}\left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right), \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.3}$$

де позначено $V(x) = -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N}$.

3. Постановка задачі оптимального керування

Нехай $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$, та $y_0 \in L^2(\Omega)$ — задані функції. Нехай $M \in \mathbb{N}$ та $\nu \neq 0$ — фіксовані сталі. Нехай U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(0,T)^M$.

Розглянемо в циліндрі $Q = (0,T) \times \Omega$ наступну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння з апріорі заданою структурою закону оберненого зв'язку:

$$I(u,y) = \int_0^T \left\| y(t,\cdot) - \frac{y_{ad}(t,\cdot)}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2\, dt \longrightarrow \inf, \tag{3.1}$$

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) = f(t,x) + p(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T) \times \Omega, \tag{3.2}$$

$$y(t,x) = 0 \quad \text{на} \quad (0,T) \times \partial\Omega, \tag{3.3}$$

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(0,x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

$$p(t,x) = \sum_{j=1}^M u_j(t)\mathcal{M}_j(y), \quad u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_\partial. \tag{3.5}$$

Тут $N_j > 0$ — задані сталі, $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ — лінійні неперервні оператори такі, що

$$\Big|\langle \mathcal{M}_j(y), y\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}\Big| \leqslant C\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}\|y\|_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} \tag{3.6}$$

для всіх $j = 1, \dots, M$ зі сталою $C > 0$, яка не залежить від y та j.

Для початку розглянемо задачу оптимального керування (3.1)–(3.5), яка полягає у визначенні функцій $(u_1^0, \dots, u_M^0, y^0) \in L^2(0,T)^M \times L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho)$ (надалі їх будемо називати оптимальними), які в слабкому сенсі задовольняють співвідношення (3.2)–(3.5) і на яких функціонал (3.1) досягає свого найменшого можливого значення.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (3.2)–(3.4) лінійний оператор $A : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$, залучивши правило:

$$\langle Ay, v\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} = \int_\Omega (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx).$$

Ясно, що $Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y)$, а отже, з огляду вихідних припущень оператор $A : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ не задовольняє умову коерцитивності. Дійсно, оскільки

$$\langle A(y), y\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} = \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \neq \|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)},$$

то немає жодних підстав стверджувати виконання наступної умови:

$$\frac{\langle A(y), y - v_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}}{\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}} \to +\infty \text{ при } \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \to \infty.$$

У результаті проблема існування та єдиності розв'язків початково-крайової задачі (3.1)–(3.5) на класі допустимих керувань залишається відкритим питанням.

Таким чином, характерною рисою задачі оптимального керування (3.1)–(3.5) є те, що за певного вибору функції ρ з властивостями (2.1) відповідна множина допустимих розв'язків задачі (3.1)–(3.5) може виявитися порожньою.

4. Попередній аналіз задачі оптимального керування (3.1)–(3.5)

Твердження 4.1. Для довільного елемента $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ має місце подання $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ і покажемо, що $z = y\sqrt{\rho} \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Дійсно, маємо

$$\|z\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |y\sqrt{\rho}|^2\, dx = \left(\int_\Omega y^2 \rho\, dx\right) \leqslant C\|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}.$$

Далі, залучаючи перетворення

$$\nabla(\sqrt{\rho}\,y) = y\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho + \sqrt{\rho}\,\nabla y = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{1}{2\rho}y\nabla\rho\right) = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right)$$

та властивості вагової функції $\rho(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} &= \int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right)\right|_{\mathbb{R}^N} dx \\ &\leqslant \int_\Omega |\sqrt{\rho}\nabla y|_{\mathbb{R}^N}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\sqrt{\rho}y\nabla\ln\rho|_{\mathbb{R}^N}\,dx \\ &\leqslant \left(\int_\Omega \rho|\nabla y|_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}|\Omega|^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_\Omega y^2\rho\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)^{1/2} \\ &\leqslant C_1\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)}.\end{aligned}$$

Таким чином, $z \in W^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Окрім того, елемент $z = y\sqrt{\rho}$ успадковує властивості сліду вздовж межі області $\partial\Omega$ від елемента y, і нарешті, отримаємо $z \in W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Твердження доведено. $\square$

Насправді, відображення $\varphi : W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx) \to W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, що визначається як $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$, не є сюр'єктивне. Проте у просторі $W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ множина його образів $\varphi(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx))$ є щільна. Легко бачити, що для довільного $z \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, маємо $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)$. Дійсно,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \int_\Omega z^2\rho\,dx + \int_\Omega \left|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx \\ &\leqslant \|z^2\|_{C(\Omega)}\int_\Omega \rho\,dx + 2\int_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega z^2|\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx \\ &\leqslant \|z^2\|_{C(\Omega)}\|\rho\|_{L^1(\Omega)} + 2\||\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}\|_{C(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z^2\|_{C(\Omega)}\|\nabla\ln\rho\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \infty.\end{aligned}$$

Таким чином, як очевидний наслідок попереднього результату та неперервності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, отримаємо наступний результат.

Наслідок 4.1. *Існує щільна множина $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$, така що*

$$\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx),\ \forall\, z \in D_\rho.$$

Беручи до уваги дане твердження, введемо до розгляду таке лінійне відображення:

$$\mathfrak{F} : D_\rho \subset H_0^1(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx), \quad \text{де} \quad \mathfrak{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}.$$

Оскільки область визначення D_ρ даного відображення є щільною множиною банахового простору $H_0^1(\Omega)$, то для $\mathfrak{F}$, як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор $\mathfrak{F}^* : D(\mathfrak{F}^*) \subset W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1}dx) \to H^{-1}(\Omega)$ такий, що

$$\langle \mathfrak{F}^* v, z\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)} = \langle v, \mathfrak{F} z\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}\,, \ \forall\, z \in D_\rho \text{ і } \forall\, v \in D(\mathfrak{F}^*)\,,$$

де

$$D(\mathfrak{F}^*) = \left\{ v \in W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1}\, dx) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, C > 0 \text{ таких, що для всіх } z \in D_\rho \\ \left|\langle v, \mathfrak{F} z\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}\right| \leqslant C\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array} \right\}.$$

Проте, у загальному випадку, оператор $\mathfrak{F}^*$ не є щільно визначений. Наступне твердження встановлює важливу властивість оператора A.

Теорема 4.1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді*

$$\langle A(\mathfrak{F} z)\,, \mathfrak{F} v\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} = \langle B(z), v\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)}\,, \tag{4.1}$$

де

$$B(z) = -\triangle z - \frac{1}{2}V(x)z, \tag{4.2}$$

$$V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \tag{4.3}$$

і лінійний оператор B визначає ізоморфізм простору $H_0^1(\Omega)$ в його дуальний простір $H^{-1}(\Omega)$.

Доведення. Нехай v та z — довільні елементи з $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$. Тоді, за наслідком 4.1, маємо $\mathfrak{F} z, \mathfrak{F} v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$. Далі, згідно з означенням оператора $\mathfrak{F}$, можна отримати таку низку перетворень:

$$\begin{aligned} A(\mathfrak{F} z) &= -\mathrm{div}\,(\rho A_\theta \nabla(\mathfrak{F} z)) = -\mathrm{div}\left(\rho\, \nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right) \\ &= -\rho^{1/2}\triangle z + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\left(\rho\triangle\rho - \frac{1}{2}|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right) z \\ &= -\sqrt{\rho}\,\triangle z - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\, z\left(-\frac{\triangle\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}\right) \\ &= \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\, z\, V(x)). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \\ &\triangle \ln\rho = \mathrm{div}(\nabla \ln\rho) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right) = \frac{\triangle\rho\cdot\rho - (\nabla\rho, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} \\ &\qquad = \frac{\triangle\rho\cdot\rho}{\rho^2} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = \frac{\triangle\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}, \end{aligned}$$

то функцію $V(x)$ можна подати у вигляді

$$V(x) = -\triangle \ln\rho - \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = -\triangle \ln\rho - \frac{1}{2}|\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}. \qquad (4.4)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\left\langle A\left(\mathfrak{F}z\right), \mathfrak{F}v\right\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)\right)^*;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} \\
&\quad= \left\langle -\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)\right)^*;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} \\
&\quad= \left\langle \rho^{1/2}\Big(-\mathrm{div}\,(\nabla z) - \frac{1}{2}V(x)z\Big), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)\right)^*;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} \\
&\quad= \left\langle -\triangle z - \frac{1}{2}V(x)z, v\right\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)} = \langle B(z), v\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Насамкінець, оскільки ρ є функцією потенціального типу, то з (2.3) та нерівності Харді – Пуанкаре (див. [2,3])

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda_*}{K}\left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x-x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right)y^2\right]dx \geqslant C(\Omega)\int_\Omega y^2\,dx, \qquad (4.5)$$

випливає, що норми $\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)y^2\right]\,dx\right)^{1/2}$ та $\left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}$ є еквівалентні в просторі $H_0^1(\Omega)$, а це означає, що оператор B визначає ізоморфізм між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$. □

Беручи до уваги даний результат, перейдемо у початково-крайовій задачі (3.2)–(3.4) до її еквівалентного опису. Маємо таке твердження:

Твердження 4.2. $y \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx))$ є розв'язком задачі (3.2)–(3.4) тоді і тільки тоді, коли $y(t) = \frac{z(t)}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \dot z(t)w\,dx + \nu\int_\Omega (\nabla z(t),\nabla w)_{\mathbb{R}^N}\,dx - \nu\int_\Omega \frac{1}{2}V(x)z(t)w\,dx \\
&= \sum_{j=1}^M u_j(t)\int_\Omega \widehat{\mathcal{M}}_j(z(t))w\,dx + \int_\Omega \frac{f(t)}{\sqrt{\rho}}w\,dx, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \text{ м.с. } (0,T) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0+}(z(t),\varphi)_{L^2(\Omega)} = (y_0,\varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (4.7)$$

Тут $\widehat{\mathcal{M}}_j : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ є лінійними операторами такими, що $\widehat{\mathcal{M}}_j(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z)$ для всіх $j = 1,\dots,M$, і при цьому існує стала величина $C > 0$, яка забезпечує виконання наступних оцінок за всіх $z \in H_0^1(\Omega)$:

$$\left|\left\langle \widehat{\mathcal{M}}_j(z), z\right\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)}\right| \leqslant C\|z\|_{H_0^1(\Omega)}\|z\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, j = \overline{1,M}. \qquad (4.8)$$

Доведення. Беручи до уваги теорему 4.1 та залучаючи необхідіні міркування з [2, 3], достатньо зауважити, що для довільного $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ існує елемент $w \in H_0^1(\Omega)$ такий, що $v = \mathfrak{F}w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$. Отже, мають місце наступні перетворення:

$$\int_\Omega f v \rho\, dx = \int_\Omega f \frac{w}{\sqrt{\rho}}\, dx = \int_\Omega \frac{f}{\sqrt{\rho}} w\, dx, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega),$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx &= \langle \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y), v\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \\
&= \langle \operatorname{div}(\rho(x)\nabla(\mathfrak{F}z)), \mathfrak{F}w\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \\
&= \left\langle \operatorname{div}\left(\rho(x)\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{w}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \\
&= \left\langle \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\, z\, V(x)), \frac{w}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*; W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \\
&= \left\langle -\triangle z - \frac{1}{2}\, V(x) z, w\right\rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} \\
&= \int_\Omega (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{2} V(x) z w\, dx,
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \mathcal{M}_j(v) w\, dx = \int_\Omega \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z))\mathfrak{F}w\, dx = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z))w\, dx, \ \forall\, j = 1, \dots, M.$$

Що торкається оцінок (4.8), то вони є прямим наслідком (3.6), твердження 4.1 та означення вагових просторів $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ і $L^2(\Omega, \rho\, dx)$. □

Беручи до уваги отримані результати, введемо до розгляду наступну задачу оптимального керування:

$$J(u, z) = \int_0^T \|z - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2\, dt \longrightarrow \inf \tag{4.9}$$

за обмежень

$$\dot{z} - \nu\, \Delta z - \frac{\nu}{2} V(x) z = f \rho^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{j=1}^M u_j(t) \widehat{\mathcal{M}}_j(z) \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \tag{4.10}$$

$$z(t, x) = 0 \ \text{ на } \ (0, T) \times \partial\Omega, \tag{4.11}$$

$$z(0, x) = y_0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega, \tag{4.12}$$

$$u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_\partial. \tag{4.13}$$

Як буде показано далі, задачі оптимального керування (3.1)–(3.4) та (4.9)–(4.13) є в певному сенсі еквівалентні. Дійсно, має місце такий результат.

Теорема 4.2. *Нехай* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *є ваговою функцією потенціального типу. Нехай* $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$ *та* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *є заданими* *функціями, і нехай лінійні оператори* $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ *підпорядковуються оцінкам* (3.6). *Тоді допустима пара* (u^0, z^0) *є оптимальна в задачі* (4.9)–(4.13) *у тому і тільки у тому разі, коли*

$$(u^0, y^0) = \big(u^0, \mathfrak{F}z^0\big) := \left(u^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.14}$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (3.1)–(3.4). *При цьому має місце рівність*

$$\inf J(u, z) = J(u^0, z^0) = I(u^0, y^0) = \inf I(u, y). \tag{4.15}$$

Доведення. Справедливість даного результату легко встановити у спосіб, повністю ідентичний доведенню теореми 3.3 з [2]. При цьому потенціальність вагової функції ρ, а отже, справедливість неріності типу Харді – Пуанкаре, та оцінки (4.8) гарантують (деталі див. [6, с.52]), що для довільних $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ та $u \in U_\partial$ існує єдиний розв'язок z початково-крайової задачі (4.10)–(4.12) такий, що

$$z \in W(0, T) := \left\{w \ : \ w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega), \dot{w} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\right\}.$$

□

5. Теорема існування оптимального керування з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку

Доведемо розв'язність вихідної задачі оптимального керування (3.1)–(3.4).

Теорема 5.1. *Нехай* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *є ваговою функцією потенціального типу. Нехай* $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$, *та* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *є заданими функціями, і нехай лінійні неперервні оператори* $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ *підпорядковуються оцінкам* (3.6) *та їх образи*

$$\widehat{\mathcal{M}}_j : L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \to L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

є компактні з простору $W(0, T)$ *в* $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. *Тоді задача оптимального керування* (3.1)–(3.4) *має єдиний розв'язок*

$$(u^0, y^0) \in L^2(\Omega)^M \times L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)).$$

Доведення. За теоремою 4.2 задачі (4.9)–(4.13) та (3.1)–(3.4) є еквівалентні. Отже, для однозначної розв'язності задачі (3.1)–(3.4) достатньо показати, що задача (4.9)–(4.13) має єдиний розв'язок.

Нехай $\left\{(u^k, z^k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна мінімізаційна послідовність для задачі (4.9)–(4.13), тобто $z^k := z(u^k)$ є відповідними розв'язками задачі (4.10)–(4.12) і при цьому

$$\lim_{k\to\infty}\left[\int_0^T \|z^k - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \sum_{j=1}^{M} N_j \int_0^T |u_j^k(t)|^2\,dt\right] = \inf J(u,z) \geqslant 0. \quad (5.1)$$

Отже, можемо вважати, що $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є слабкозбіжна послідовність. Нехай $u^* \in L^2(0,T)^M$ — її слабка границя. Оскільки $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U_\partial$, то, зважаючи на зроблені припущення щодо множини U_∂ та за теоремою Мазура, отримуємо: $u^* \in U_\partial$. Покажемо, що відповідна послідовність розв'язків $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є обмежена в просторі $W(0,T)$. Дійсно, для цього перепишемо співвідношення (4.10)–(4.12) у варіаційній формі

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz^k(t)}{dt}, \phi\right)_{L^2(\Omega)} &+ \nu\left(\nabla z^k(t), \nabla\phi\right)_{L^2(\Omega)^N} - \frac{\nu}{2}\left(\phi, V z^k(t)\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}}, \phi\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{M} u_j^k(t)\left(\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k), \phi\right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\,\phi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2)\end{aligned}$$

Залучаючи нерівність (4.5) та властивість потенціальності функції ваги ρ, отримаємо:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)y^2\right]dx &\overset{(2.3)}{\geqslant} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda}{K}\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{|x-x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right)y^2\right]dx \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right)\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda_*}\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda_*}{K}\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{|x-x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right)y^2\right]dx \\ &\overset{(4.5)}{\geqslant} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right)\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*}\int_\Omega y^2\,dx.\end{aligned}$$

Покладемо тепер в (5.2) $\phi = z^k(t)$ і скористаємося попередньою нерівністю. Маємо:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1\|z^k(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_2\|z^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad\leqslant C\sum_{j=1}^{M}|u_j^k(t)|\|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t)\,\rho^{-1/2}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad\leqslant \frac{C_1}{2}\|z^k(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_3\sum_{j=1}^{M}|u_j^k(t)|^2\|z^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_4\|f(t)\,\rho^{-1/2}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Оскільки $ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ для довільних $\varepsilon > 0$, то

$$\begin{aligned}\|z^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_5 \int_0^t \|z^k(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\, ds \\ \leqslant C_6 \int_0^t \left(1 + |u^k(s)|^2_{\mathbb{R}^M}\right) \|z^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \\ + C_6 \int_0^t \|f(s)\,\rho^{-1/2}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, ds + |y_0|^2.\end{aligned}$$

В результаті, залучаючи інтегральну нерівність Гронуолла – Беллмана, приходимо до таких апріорних оцінок:

$$\begin{aligned}\|z^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \widehat{C} := \left[|y_0|^2 + C_6 \int_0^T \|f(s)\,\rho^{-1/2}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, ds\right] \\ \times \exp\left(C_6 \left[\int_0^T \left(1 + |u^k(s)|^2_{\mathbb{R}^M}\right)\, ds\right]\right),\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\int_0^T \|z^k(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\, ds \leqslant \widehat{C} C_6^{-1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Таким чином, послідовність $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є обмежена, а отже, і слабкокомпактна в просторі $W(0,T)$. Тому, з точністю до підпослідовності, можемо вважати, що існує елемент $z^* \in W(0,T)$ такий, що $z^k \rightharpoonup z^*$ слабко в $W(0,T)$. Беручи до уваги властивість компактності операторів $\widehat{\mathcal{M}}_j : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, отримуємо:

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \to \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall\, j = \overline{1,M}. \tag{5.5}$$

Об'єднуючи цей факт з властивістю слабкої збіжності керувань $u^k \rightharpoonup u^*$ в просторі $L^2(0,T)^M$, доходимо висновку:

$$u^k_j(t)\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \rightharpoonup u^*_j(t)\widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \quad \text{слабко в} \quad L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall\, j = \overline{1,M}. \tag{5.6}$$

Переходячи тепер до границі в інтегральній тотожності (5.2) з урахуванням властивостей (5.5)–(5.6), легко бачити, що пара (u^*, z^*) є допустима для задачі (4.9)–(4.13). Що стосується оптимальності цієї пари та її єдиності, то дана обставина є прямим наслідком співвідношення (5.1), строгої опуклості функціонала J та його напівнеперервності знизу відносно збіжностей (5.5)–(5.6). Таким чином, за теоремою 4.2, пара $(u^*, y^*) := \left(u^*, \frac{z^*}{\sqrt{\rho}}\right)$ є єдиний оптимальний розв'язок для задачі (3.1)–(3.4), що і потрібно було встановити. □

Беручи до уваги умови теореми 5.1, доречно навести приклади операторів $\mathcal{M}_j : W^{1,2}_0(\Omega, \rho\, dx) \to \left(W^{1,2}_0(\Omega, \rho\, dx)\right)^*$, які таким умовам підпорядковуються.

Нехай $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ є заданою сукупністю відкритих підмножин множини Ω з ненульовою лебеговою мірою. Покладемо

$$\mathcal{M}_j(\phi) = \frac{\sqrt{\rho(x)}}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \phi(s)\sqrt{\rho}(s)\, ds, \quad \forall\, j = 1, \ldots, M. \tag{5.7}$$

Покажемо для початку, що $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$. Дійсно, оскільки дуальний простір $\Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ можна утотожнити з простором $W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$, то типовим представником простору $\Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*$ є такий функціонал:

$$
\begin{aligned}
&< F, y >_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*, W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} = \int_\Omega f_0 y\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i D_i y\, dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int_\Omega f_0^2 \rho^{-1}\, dx\right)^{1/2} \|y\|_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} + \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho^{-1}\, dx\right)^{1/2} \|D_i y\|_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=0}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho^{-1}\, dx\right)^{1/2} \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)},
\end{aligned}
$$

Отже, виходячи з (5.7), маємо:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_j(\phi)\|^2_{\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*} &\leqslant \int_\Omega \left(\frac{\sqrt{\rho(x)}}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \phi(s)\sqrt{\rho}(s)\, ds\right)^2 \frac{1}{\rho}\, dx \\
&\leqslant \frac{1}{|\Omega_j|^2} \int_\Omega \int_{\Omega_j} \phi^2(s)\rho(s)\, ds \int_{\Omega_j} ds\, dx \\
&\leqslant \frac{|\Omega|}{|\Omega_j|} \|\phi\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} \leqslant \frac{|\Omega|}{|\Omega_j|} \|\phi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)},
\end{aligned}
$$

що означає $\mathcal{M}_j \in \mathcal{L}\left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx), \Big(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\Big)^*\right)$ за всіх $j = 1, \ldots, M$.

Тепер покажемо, що оператори $\widehat{\mathcal{M}}_j : L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ є компактні з простору $W(0,T)$ в $L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Дійсно, за побудовою маємо (див. твердження 4.2)

$$
\widehat{\mathcal{M}}_j(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F} z) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z(s)\, ds, \quad \forall\, j = 1, \ldots, M,\ \forall\, z \in H_0^1(\Omega).
$$

Отже, якщо послідовність $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається слабко в $W(0,T)$ до деякого елемента $z^* \in W(0,T)$, то за теоремою про компактне вкладення простору $W(0,T)$ в $L^2(0,T; L^2(\Omega))$ (див. [4]) отримуємо:

$$
z^k \to z^* \ \text{ сильно в } \ L^2(0,T; L^2(\Omega)).
$$

Таким чином, має місце наступна збіжність числової послідовності:

$$
\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) := \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z^k(s)\, ds \longrightarrow \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z^*(s)\, ds = \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*),
$$

що означає:

$$
\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \to \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \ \text{ сильно в } \ L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).
$$

Отже, властивість компактності встановлено.

6. Геометричне узагальнення задачі оптимального керування з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку

Нехай всюди в цьому параграфі E є замкнена непорожня вимірна підмножина множини Ω така, що dist $(E, \partial\Omega) \geqslant r > 0$. З довільною точкою $b \in E$ далі будемо пов'язувати відкриту кулю $B(b,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \;:\; |x-b| < r\right\}$. Нехай $c^{-1} = |B(b,r)|$ є лебегова міра такої кулі. Введемо до розгляду таку сукупність лінійних операторів:

$$\mathcal{M}_j(\phi) = c\sqrt{\rho(x)} \int_{B(b_j,r)} \phi(s)\sqrt{\rho}(s)\, ds, \quad \forall\, j = 1,\dots,M, \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx), \tag{6.1}$$

де $\{b_1,\dots,b_M\}$ є деяка система точок в E. Як легко бачити (див. попередній параграф),

$$\mathcal{M}_j \in \mathcal{L}\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx), \left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)\right)^*\right), \quad \forall\, j = 1,\dots,M.$$

Розглянемо тепер узагальнення задачі оптимального керування (3.1)–(3.4), суттєва відмінність якого від постановки (3.1)–(3.4) полягає в тому, що "позиціювання" $b_j \in E$ апріорно заданого закону оберненого звязку у формі (3.5) є невідоме і підлягає визначенню:

$$I(u,b,y) = \int_0^T \left\| y(t,\cdot) - \frac{y_{ad}(t,\cdot)}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2\, dt \longrightarrow \inf, \tag{6.2}$$

$$\rho(x)\dot{y} - \nu\, \mathrm{div}\, (\rho(x)\nabla y) = f(t,x) + p(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{6.3}$$

$$y(t,x) = 0 \quad \text{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \tag{6.4}$$

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(0,x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на} \quad \Omega, \tag{6.5}$$

$$p(t,x) = \sum_{j=1}^M u_j(t)\mathcal{M}_j(y) = c\sqrt{\rho(x)} \sum_{j=1}^M u_j(t) \int_{B(b_j,r)} y(t,s)\sqrt{\rho}(s)\, ds, \tag{6.6}$$

$$u = [u_1,\dots,u_M]^T \in U_\partial, \quad b = [b_1,\dots,b_M]^T \in E^M. \tag{6.7}$$

Тут $N_j > 0$ — задані сталі; U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(0,T)^M$.

У повній аналогії до теореми 4.2 можна показати, що задача (6.2)–(6.7) є еквівалентна (в сенсі бієкції $(u,b,z) \mapsto (u,b,\mathfrak{F}z)$) наступній задачі оптимального керування:

$$J(u,b,z) = \int_0^T \|z - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \sum_{j=1}^{M} N_j \int_0^T |u_j(t)|^2\, dt \longrightarrow \inf, \tag{6.8}$$

$$\dot z - \nu\,\Delta z - \frac{\nu}{2} V(x) z = f\rho^{-\frac12}(x) + q(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{6.9}$$

$$z(t,x) = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\partial\Omega, \tag{6.10}$$

$$z(0,x) = y_0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega, \tag{6.11}$$

$$q(t,x) = c\sum_{j=1}^{M} u_j(t) \int_{B(b_j,r)} z(t,s)\, ds, \tag{6.12}$$

$$u = [u_1,\dots,u_M]^T \in U_\partial, \quad b = [b_1,\dots,b_M]^T \in E^M. \tag{6.13}$$

Для доведення розв'язності задачі (6.8)–(6.13) скористаємося відомими результатами теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами (див., напр., [5, 6]).

Теорема 6.1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\,dx))$, та $y_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Нехай E є замкненою непорожньою вимірною підмножиною множини Ω такою, що $\operatorname{dist}(E,\partial\Omega) \geqslant r > 0$. Тоді задача оптимального керування (6.2)–(6.7) є розв'язна, тобто існує принаймні один набір функцій (u^0, b^0, y^0) у просторі $L^2(\Omega)^M \times E^M \times L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega, \rho\,dx))$ такий, що $u^0 \in U_\partial$, $b^0 \in E^M$, $y^0 = y(u^0,b^0)$ і при цьому*

$$J(u^0,b^0,y^0) \leqslant J(u,b,y), \quad \textit{для всіх допустимих наборів } \ (u,b,y).$$

Доведення. Нехай $\{(u^k,b^k,z^k)\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна мінімізаційна послідовність для задачі (6.8)–(6.13). Отже, $u^k \in U_\partial$, $b^k \in E^M$, $z^k = z(u^k,b^k)$ є відповідними розв'язками задачі (6.9)–(6.11) і при цьому

$$\lim_{k\to\infty} \left[\int_0^T \|z^k - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \sum_{j=1}^{M} N_j \int_0^T |u_j^k(t)|^2\, dt \right] = \inf J(u,b,z) \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Оскільки множина E є обмежена та замкнена, то знайдеться вектор $b^* = [b_1^*,\dots,b_M^*] \in E^M$ такий, що з точністю до підпослідовності маємо:

$$b^k \to b^* \ \text{ в } \ \mathbb{R}^{MN} \ \text{ за } \ k\to\infty. \tag{6.15}$$

Зважаючи на те, що величина c в (6.12) (c^{-1} є лебеговою мірою множин $B(b_j^k, r)\cap\Omega$) не залежить від вибору центрів $b_j^k \in E$, можемо скористатися аргументами з доведення теореми 5.1 та отриманими там апріорними оцінками щодо компактності послідовностей $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U_\partial$ та $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W(0,T)$.

Отже, існують елементи $u^* \in U_\partial$ та $z^* \in W(0,T)$ такі, що мають місце слабкі збіжності (на відповідних підпослідовностях)

$$z^k \rightharpoonup z^* \ \text{ в } \ W(0,T), \quad u^k \rightharpoonup u^* \ \text{ в } \ L^2(0,T)^M. \tag{6.16}$$

Покажемо, що граничні елементи пов'язані співвідношенням $z^* = z(u^*, b^*)$. Це означає, що z^* є розв'язком початково-крайової задачі (6.9)–(6.11) за $u = u^*$ та $b = b^*$. Дійсно, як випливає із структури інтегральної тотожності (5.2), для цього досить встановити, що за кожного значення індекса $j = 1, \ldots, M$ має місце наступна збіжність:

$$u_j^k(t) \int_{B(b_j^k, r)} z^k(t,s)\, ds \rightharpoonup u_j^*(t) \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t,s)\, ds \ \text{ слабко в } \ L^1(Q). \tag{6.17}$$

Проте, беручи до уваги властивість $(6.16)_2$, для виконання умови (6.17) досить гарантувати, що

$$\int_{B(b_j^k, r)} z^k(t,s)\, ds \to \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t,s)\, ds \ \text{ сильно в } \ L^2(Q). \tag{6.18}$$

З цією метою зауважимо таке: оскільки

$$\begin{aligned} \int_{B(b_j^k, r)} z^k(t,s)\, ds &- \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t,s)\, ds \\ &= \int_{B(b_j^k, r)} \Big(z^k(t,s) - z^*(t,s) \Big)\, ds \\ &- \int_{B(b_j^*, r)\, \Delta\, B(b_j^k, r)} z^*(t,s)\, ds = g^k + h^k, \end{aligned}$$

де позначено

$$B(b_j^*, r)\, \Delta\, B(b_j^k, r) = \Big[B(b_j^*, r) \setminus B(b_j^k, r) \Big] \cup \Big[B(b_j^k, r) \setminus B(b_j^*, r) \Big], \tag{6.19}$$

то, беручи до уваги компактність вкладення $W(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ та властивість $(6.16)_1$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_Q |g^k|^2\, dz dt &= \int_0^T \int_\Omega \left(\int_{B(b_j^k, r)} \Big(z^k(t,s) - z^*(t,s) \Big)\, ds \right)^2 dx dt \\ &\leqslant |\Omega|^2 \int_0^T \int_\Omega \Big| z^k(t,x) - z^*(t,x) \Big|^2 dx dt \to 0 \quad \text{за } \ k \to \infty. \end{aligned}$$

Що стосується відхилення h^k, то, виходячи з геометричних міркувань, маємо таку оцінку для лебегової міри множин (6.19):

$$\Big| B(b_j^*, r)\, \Delta\, B(b_j^k, r) \Big| \leqslant C^* |b_j^k - b_j^*|_{\mathbb{R}^N},$$

де стала C^* не залежить від положення центрів куль b_j^k та b_j^*. Отже, за нерівністю Коші – Буняковського та властивістю (6.15), доходимо висновку:

$$\begin{aligned}\int_Q |h^k(t,x)|^2\,dxdt &= \int_0^T\int_\Omega\left(\int_{B(b_j^*,r)\,\Delta\,B(b_j^k,r)} z^*(t,s)\,ds\right)^2 dxdt\\ &\leqslant C^*|b_j^k-b_j^*|_{\mathbb{R}^N}\int_0^T\int_\Omega\left(\int_\Omega |z^*(t,x)|^2\,ds\right)dxdt\\ &= C^*|\Omega|\,\|z^*\|^2_{L^2(Q)}|b_j^k-b_j^*|_{\mathbb{R}^N}\to 0 \quad \text{за}\ \ k\to\infty.\end{aligned}$$

Таким чином, умови (6.18), а отже, і (6.17), встановлено. Отриманий результат дозволяє перейти до границі в інтегральній тотожності (5.2) за $k\to\infty$ і показати, що трійка елементів (u^*, b^*, z^*) є допустима для задачі (6.8)–(6.13). Що стосується оптимальності цього розв'язку, то дана обставина є прямим наслідком співвідношення (6.14) та властивості напівнеперервності знизу функціонала J відносно збіжностей (6.15)–(6.16). Таким чином, за теоремою 4.2, керування (u^*, b^*) є оптимальне і для задачі (6.2)–(6.7), що і потрібно було встановити. □

Бібліографічні посилання

1. *Баланенко І. Г.* Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ. — 2011, Вип. 3, № 8.— С. 55–73.
2. *Баланенко І. Г.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ. — 2012, Вип. 4, № 8.— С. 3–18.
3. *Баланенко І. Г.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ. — 2013, Вип. 5, № 8.— С. 47–61.
4. *Иваненко В. И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами/ В. И. Иваненко, В. С. Мельник.— К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
5. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations/ J.-L. Lions.— Berlin, Springer-Verlag, 1971.
6. *Lions J.-L.* Some Aspects of the Optimal Control of Distributed Parameters Systems/ J.-L. Lions.— Philadelpfia, Society for Industrial and Applies Mathematics, 1972.
7. *Vazquez J. L.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential/ J. L.. Vazquez, E. Zuazua // J. of Functional Analysis. — 2000. — Vol. 173.— P. 103–153.

Надійшла до редколегії 27.01.2014