ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2015. Вип. 7, № 8. С. 138–144

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 519.6

ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ ОДНОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В. І. Рубан*, В. В. Чорна**

* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра математичного аналізу, Дніпропетровськ, 49010, e-mail: v_ruban@ukr.net*

** *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, Дніпропетровськ, 49010, e-mail: valeria.chyornaya@gmail.com*

Досліджено поведінку деяких одновимірних динамічних систем із дискретним часом, для яких обчислення з округленням до різної кількості розрядів після коми зумовлює якісну зміну орбіт, тобто появу нових динамічних систем.

Ключові слова: одновимірна динамічна система, дискретизація динамічних систем, порядок округлення.

1. Вступ

У даній роботі досліджуються динамічні системи, визначені ітераційним процесом:

$$x_{t+i} = f(x_i),\ i = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

де f — деяке відображення відрізка $I = [0, 1]$ у себе або кола S^1, яке будемо ототожнювати з відрізком I зі склеєними кінцями.

Систему (1.1) називають одновимірною динамічною системою з дискретним часом.

Для довільного $x_0 \in X$ процес (1.1) задає послідовність $x_t, t = 0, 1, 2, ...$, яку називають *орбітою* точки x_0.

Динамічні системи (одновимірні) з неперервним часом — це диференціальні рівняння вигляду

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.2}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = x(t), t \in \mathbb{R}$.

Системи з дискретним часом виникають, зокрема, при числовому дослідженні систем з неперервним часом (1.2) шляхом заміни похідної $\dot{x}$ на поділену різницю:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

та заміни t на $t_0 + i\Delta t$.

Якісну поведінку таких систем докладно описано у [1] і [2].

За умов числового обчислення траєкторії системи (1.1), як правило, застосовують округлення до деякої фіксованої кількості десяткових знаків після коми. Це означає, що система (1.1) замінюється на динамічну систему вигляду

$$x_{i+1} = \tilde{f}(x_i), \tag{1.3}$$

для якої область визначення функції $\tilde{f}$ є підмножиною точок з I або S^1, у десятковому зображені яких (без дев'ятки у періоді) усі цифри після коми, починаючи з цифри під номером $k+1$, є нулі. Відображення $\tilde{f}$ системи (1.3) — це суперпозиція відображення f та відображення округлення до k знаків після коми.

Числом k далі будемо називати *порядок округлення*.

У наступних розділах цієї статті покажемо, що зміна порядку округлення може суттєво змінити якісну поведінку траєкторії динамічної системи.

2. Приклади динамічних систем, що змінюють свої властивості із застосуванням обчислень із округленням

У цьому розділі наведемо приклади одновимірних динамічних систем із нерегулярною поведінкою за умови зміни порядку округлення.

Розглянемо множину A_N чисел із відрізка $[0,1]$, десяткове подання яких має вигляд $0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N$, де $\alpha_i = 0,1,2,\dots,9; i = 1,\dots,N$. Через F позначимо відображення $A_N \to A_N$:

$$F(x) = \{10x\} + [10x] \cdot 10^{-N},$$

де $[x]$ — ціла частина числа x, $\{x\}$ — дробова частина числа x, тобто $x = [x] + \{x\}$. Для $x \in A_N$ відображення F діє так:

$$\text{якщо } x = 0,x_1x_2 \dots x_N, \text{ то } F(x) = 0,x_2x_3 \dots x_Nx_1,$$

тобто дія відображення F полягає у циклічному переставленні цифр $x_i, i = 1,\dots,N$, що утворюють десяткове подання числа.

Відображення F має 10 нерухомих точок вигляду $0,\alpha\alpha \dots \alpha$, де $\alpha = 0,1,2,\dots,9$. Якщо k є дільником числа N, тоді елементи множини A_N вигляду $0,\underbrace{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k}_{N}$, $\alpha_i = 0,1,2,\dots,9, i = 1,\dots,k$, – є k-періодичними за відображенням F.

Далі через $g : A_N \to A_N$ позначимо відображення, яке ставить у відповідність елементу $a \in A_N$ такий: $\tilde{a} = 0,\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_N$, де $\tilde{\alpha}_N = 0$, а $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_{N-1}$ –

дробова частина числа a, округленого до $(N-1)$-го знака після коми. Тобто відображення g округлює число a до $(N-1)$-го знака після коми і відкидає цілу частину числа, що могла утворитися в результаті округлення.

Через $\tilde{F}$ позначимо наступну суперпозицію: $g \circ F$. Тоді для будь-якого $a \in A_N$, $a = 0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N$, $\tilde{F}(a)$ діє таким чином: спочатку циклічно переставляє місцями α_i, а потім на отримане число $a' = F(a)$ діє відображенням округлення g, яке у цьому числі на N-му місці після коми залишає 0: $\tilde{F}(a) = g(a') = 0,\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3 \dots \tilde{\alpha}_N 0$.

Під $\tilde{F}^{(n)}$ будемо розуміти суперпозицію

$$\tilde{F}^{(n)} = \tilde{F} \circ \tilde{F}^{n-1}, n = 1, 2, ...,$$

де $\tilde{F}^0$ — тотожне відображення.

Теорема 2.1. $\exists n \in \mathbb{N} : \tilde{F}^{(n)}(a) = 0$, *для всіх* $a \in A_N$.

Доведення. Для $a = 0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N$ через $\sigma(a)$ позначимо суму $\sigma(a) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $0,0\alpha_2 \dots \alpha_N \xrightarrow{\tilde{F}} 0,\alpha_2 \dots \alpha_N 0$, тобто $\sigma(a) = \sigma(\tilde{F}(a))$.

Коли $1 \le \alpha_1 \le 4$, то $0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N \xrightarrow{\tilde{F}} 0,\alpha_2 \dots \alpha_N 0$, тобто $\sigma(\tilde{F}(a)) = \sigma(a) - \alpha_1$.

Якщо $\alpha_1 \ge 5$ та $\alpha_{N-1} < 9$, то $0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N \xrightarrow{\tilde{F}} 0,\alpha_2 \dots \alpha_N + 1\ 0$, тобто $\sigma(\tilde{F}(a)) = \sigma(a) - \alpha_1 + 1$.

Нарешті за умови $\alpha_1 \ge 5$ та $\alpha_N = \alpha_{N-1} = \dots = \alpha_{N-m} = 9$, де $m \ge 0$, маємо

$$0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_N \xrightarrow{\tilde{F}} 0,\alpha_2 \dots \alpha_{N-m-1} + 1\ \underbrace{0 \dots 0}_{m},$$

тобто $\sigma(\tilde{F}(a)) = \sigma(a) - 9(m+1) + 1$.

Отже, якщо серед цифр $\beta_i, i = 1, ..., N$, числа $b = 0,\beta_1\beta_2 \dots \beta_N$ є ненульові, то для деякого $k > 0$

$$\sigma(\tilde{F}^{(k)}(b)) < \sigma(b). \tag{2.1}$$

Із (2.1) випливає, що для кожного $a \in A_N$ існує $N(a)$, для якого

$$\sigma(\tilde{F}^{(N(a))}(a)) = 0,$$

тобто $\tilde{F}^{(N(a))}(a) = 0$. Нехай

$$N = \max_{a \in A_N} N(a).$$

Тоді для всіх $a \in A_N$, $\sigma(\tilde{F}^{(N)}(a)) = 0$.

□

Із теорими 2.1 випливає, що унаслідок округлення на один розряд, незважаючи на те, наскільки велике N, можемо мати якісну зміну динамічної системи.

Наведемо ще один приклад нерегулярної поведінки результатів дискретизації динамічної системи у разі подрібнення кроку дискретизації.

Розглянемо відображення $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(x) = \left\{x + 10^{-K}\right\}$. Відображення φ можна вважати відображенням кола S^1, утвореного ототожненням точок 0 та 1, тоді відображення φ діє як обертання кола на кут $2\pi/10^K$.

Далі через φ_N позначимо відображення $A_N \to A_N$, яке є суперпозицією звуження φ на A_N і округлення до N десяткових знаків, $\varphi_N = O_N \circ \varphi$, де O_N — це операція округлення до N десяткових знаків.

Перевіримо правильність наступного твердження.

Теорема 2.2. *Якщо $N < K$, то φ_N буде тотожним відображенням, якщо $N = K$, то усі точки A_N утворюють цикл, і якщо $N > K$, то точки A_N утворять 10^{N-K} циклів довжиною 10^K.*

3. Числове дослідження одновимірних систем

Наведемо результати, отримані шляхом точних обчислень і подальшого контрольованого округлення. У цьому розділі будемо використовувати зображення числа у двійковій позиційній системі числення.

Числове дослідження проводимо таким чином:

(1) динамічною системою обираємо одновимірну дискретну динамічну систему, утворену відображенням $f_i, i = 1, 2$ відрізка $[0,1]$ у себе;

(2) нехай $f_1(x) = 3x(1-x)$;

(3) нехай $f_2(x) = \begin{cases} 0,9x, x < 2/3, \\ 1,8(1-x), x \geq 2/3. \end{cases}$

(4) розбиваємо відрізок $[0,1]$ на 2^{12} рівних частин; 2^{12+1} одержаних точок цього розбиття обираємо за множину визначення динамічної системи, (працюємо у двійковій позиційній системі обчислення, де степінь числа 2^{12} означає, що точки мають 12 знаків (0 або 1) після коми);

(5) будуємо послідовність точок $x_n = f(x_{n-1})$;

(6) значення x_n на кожному кроці ітерації округляємо до деякого двійкового знака після коми $k = 3, 4, 5, 6$. Ці округлення розбивають відрізок $[0,1]$ на рівні проміжки, кількість яких залежить від порядку округлення; на кожному з цих проміжків значення функції f округлене, тобто функція набуває постійних значень, тому точки кожного з проміжків можна ототожнити з однією точкою цього ж проміжку, наприклад, лівим кінцем;

Таблиця 1: Кількість точок на проміжку залежно від розбиття відрізка та сума відповідних комірок для порівняння, f_1

Номер проміжку	2^6	2^5	2^4	2^3
0	440			
1	44	880		
2	88			
3	44	88	1760	
4	44			
5	134	178		
6	46			
7	46	92	182	3580
Сума	886	1238	1942	3580
8	90			
9	48	94		
10	48			
11	94	276	374	
12	50			
13	184	100		
14	50			
15	52	102	202	394
Сума	616	572	576	394
16	100			
17	52	198		
18	102			
19	54	110	216	
20	56			
21	148	208		
22	58			
23	108	118	606	842
Сума	678	634	822	842
24	62			
25	110	400		
26	64			
27	160	130	254	
28	66			
29	118	234		
30	72			
31	256	144	480	532
Сума	908	908	734	532
32	126			
33	76	254		
34	134			
35	82	164	316	
36	315			
37	1853	633		
38	8969			
39	100	10584	909	7281
Сума	11655	11635	1225	7281
40	2838			
41	2082	5218		
42	2212			
43	2168	3722	17272	
44	2086			
45	3008	5318		
46	9997			
47	1709	11470	18082	21508
Сума	26100	25728	35354	21508

Таблиця 2: Кількість точок на проміжку в залежності від розбиття відрізка та сума відповідних комірок для порівняння, f_2

Номер проміжку	2^6	2^5	2^4	2^3
0	3916			
1	782	7827		
2	853			
3	924	1564	16901	
4	995			
5	1067	1707		
6	1209			
7	1351	1849	3812	30272
Сума	11097	12947	20713	30272
8	1494			
9	1707	1991		
10	1209			
11	711	3385	3528	
12	2603			
13	640	3243		
14	2532			
15	569	3101	3243	3528
Сума	11465	11720	6771	3528
16	2461			
17	498	2959		
18	2390			
19	427	2817	2959	
20	426			
21	1892	711		
22	356			
23	355	1963	2674	2959
Сума	8805	8450	5633	2959
24	1821			
25	285	569		
26	284			
27	1750	1821	2390	
28	214			
29	213	427		
30	1536			
31	142	1678	2105	2390
Сума	6245	4495	4495	2390
32	143			
33	142	285		
34	1465			
35	71	1536	1821	
36	72			
37	71	143		
38	1394			
39	0	1394	1537	1821
Сума	3358	3358	3358	1821

(7) перший ітераційний крок проводиться з усіма 2^{12+1} точками. Результатом є округлення значення функції f до числа з меншою кількістю двійкових знаків k, тобто кожна точка x_i потрапить у один із k проміжків;

(8) під час наступної ітерації відображення f діє вже на округлене значення і т.д. Кількість ітерацій фіксована і дорівнює 10.

Порівнюємо результати дії динамічної системи залежно від того, до якого знака здійснювали округлення. Для цього підраховуємо кількість точок на кожному з проміжків. Ця кількість має залишатися постійною на відповідних проміжках за умов різних порядків округлення. Результати для розглянутих функцій $f_i, i = 1, 2$ наведено в табл. 1,2.

Бібліографічні посилання

1. *Шарковский, А. Н.* Разностные уравнения и их приложения / А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко. — К.: Наукова думка, 1986. — 103 с.
2. *Шарковский, А. Н.* Динамика одномерных отображений / А. Н. Шарковский, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко. — К.: Наукова думка, 1989. — 195 с.
3. *Tucker, W.* Fundamentals of chaos / W. Tucker // Intelligent Computing Based on Chaos, 2009. – P. 1–24.
4. *Берг, Д. Б.* "Цифровые" реалии "аналитических" моделей / Д. Б. Берг, А. П. Сергеев, С. В. Губарев // Вестн. Уральского отд. РАН, 2009. — Том. 28, № 2. — С.38–49.
5. *Васин, В. В.* Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу / В. В. Васин, Л. Б. Ряшко. — М : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Ин-т компьютер. исслед., 2006. — 192 с.
6. *Магницкий, А. Н.* Новые методы хаотической динамики / А. Н. Магницкий, С. В. Сидоров. — М.: Едиториал УРРС, 2004. — 11 с.

Надійшла до редколегії 23.01.2015